LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Florian Cajori

(Người dịch: Nguyễn Hữu Điển)

Title: A History of Mathematics

Author: Florian Cajori

Release Date: January 24, 2010 [EBook #31061]

Language: English

Character set encoding: ISO-8859-1

Produced by Andrew D. Hwang, Peter Vachuska, Carl Hudkins
and the Online Distributed Proofreading Team at
http://www.pgdp.net

TRANSCRIBER'S NOTE

Figures may have been moved with respect to the surrounding text. Minor typographical corrections and presentational changes have been made without comment. This PDF file is formatted for screen viewing, but may be easily formatted for printing. Please consult the preamble of the LaTeX source file for instructions.

A HISTORY OF

MATHEMATICS

BY

FLORIAN CAJORI, Ph.D.

Formerly Professor of Applied Mathematics in the Tulane University
of Louisiana; now Professor of Physics
in Colorado College

"I am sure that no subject loses more than mathematics by any attempt to dissociate it from its history."—J. W. L. Glaisher

New York

THE MACMILLAN COMPANY

LONDON: MACMILLAN & CO., Ltd.

1909

Set up and electrotyped January, 1894. Reprinted March, 1895; October, 1897; November, 1901; January, 1906; July, 1909.

Norwood Press:
J. S. Cushing & Co.—Berwick & Smith.
Norwood, Mass., U.S.A.

LỜI NÓI ĐẦU



SỰ QUAN TÂM ngày càng tăng đối với lịch sử của các ngành khoa học chính xác được thể hiện trong những năm gần đây bởi các giáo viên ở khắp mọi nơi và sự chú ý dành cho việc tìm hiểu lịch sử trong các lớp học toán học và hội thảo của các trường đại học hàng đầu của chúng tôi, khiến tôi tin rằng một tổng quát ngắn gọn Lịch sử Toán học sẽ được giáo viên và học sinh chấp nhận.

Các trang xử lý—nhất thiết phải ở dạng rất cô đọng—về những tiến bộ đạt được trong thế kỷ hiện tại, được đưa ra với sự khác biệt lớn, mặc dù tôi đã dành nhiều thời gian nỗ lực để làm cho chúng chính xác và đầy đủ một cách hợp lý. Nhiều gợi ý và phê bình có giá trị về chương "Thời gian gần đây" đã được Tiến sĩ E. W đưa ra. Davis, thuộc Đại học Nebraska. Các tờ kiểm chứng của chương này cũng đã được gửi cho Tiến sĩ J. E. Davies và giáo sư C. A. Van Velzer, cả hai đều thuộc Đại học Wisconsin; tới Tiến sĩ G. B. Halsted, Đại học Texas; Giáo sư L. M. Hoskins, thuộc Đại học Leland Stanford Jr. và Giáo sư G. D. Olds, của Đại học Amherst,—tất cả đều đã dành sự hỗ trợ quý báu. Tôi đặc biệt biết ơn Giáo sư F. H. Loud, của Đại học Colorado, người đã đọc xuyên suốt các bản kiểm chứng. Đối với tất cả các quý ông có tên ở trên, cũng như Tiến sĩ Carlo Veneziani ở Thành phố Salt Lake, người đã đọc phần đầu tiên của tác phẩm của tôi trong bản thảo, tôi muốn bày tỏ lời cảm ơn chân thành. Nhưng để ghi nhận lòng tốt của họ, tôi tin tưởng rằng dường như tôi sẽ không quy cho họ bất kỳ phần trách nhiệm nào đối với những sai sót mà tôi có thể đã đưa ra trong lần sửa đổi văn bản sau này.

FLORIAN CAJORI.

COLORADO COLLEGE, December, 1893.

BẢNG MỤC LỤC

SÁCH THAM KHẢO

CUỐN SÁCH, tờ rơi và bài báo sau đây đã được sử dụng để chuẩn bị cho lịch sử này. Tham chiếu đến bất kỳ trong số chúng được thực hiện trong văn bản bằng cách đưa ra số tương ứng. Những lịch sử được đánh dấu sao là những lịch sử duy nhất được sử dụng rộng rãi.

1. GÜNTHER. *Ziele und Resultate der neueren Mathematisch-historischen Forschung.* Erlangen, 1876.
2. CAJORI, F. *The Teaching and History of Mathematics in the U. S.* Washington, 1890.
3. *CANTOR, MORITZ. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig. Bd. I., 1880; Bd. II., 1892.
4. EPPING, J. *Astronomisches aus Babylon. Unter Mitwirkung von* P. J. R. STRASSMAIER. Freiburg, 1889.
5. BRETSCHNEIDER, C. A. *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides.* Leipzig, 1870.
6. *GOW, JAMES. *A Short History of Greek Mathematics.* Cambridge, 1884.
7. *HANKEL, HERMANN. *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter.* Leipzig, 1874.
8. *ALLMAN, G. J. *Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin, 1889.
9. DE MORGAN, A. "Euclides" in *Smith's Dictionary of Greek and Roman Biography and Mythology*.
10. HANKEL, HERMANN. *Theorie der Complexen Zahlensysteme.* Leipzig, 1867.
11. WHEWELL, WILLIAM. *History of the Inductive Sciences.*
12. ZEUTHEN, H. G. *Die Lehre von den Kegelschnitten im Alterthum.* Kopenhagen, 1886.
13. *CHASLES, M. *Geschichte der Geometrie.* Aus dem Franzö-schen übertragen durch DR. L. A. SOHNCKE. Halle, 1839.
14. MARIE, MAXIMILIEN. *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques.* Tome I.–XII. Paris, 1883–1888.
15. COMTE, A. *Philosophy of Mathematics*, translated by W. M. GILLESPIE.
16. HANKEL, HERMANN. *Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten.* Tübingen, 1884.

17. GÜNTHER, SIEGMUND und WINDELBAND, W. *Geschichte der antiken Naturwissenschaft und Philosophie.* Nördingen, 1888.

18. ARNETH, A. *Geschichte der reinen Mathematik.* Stuttgart, 1852.

19. CANTOR, MORITZ. *Mathematische Beiträge, zum Kulturleben der Vöker.* Halle, 1863.

20. MATTHIESSEN, LUDWIG. *Grundzüge der Antiken und Modernen Algebra der Litteralen Gleichungen.* Leipzig, 1878.

21. OHRTMANN und MÜLLER. *Fortschritte der Mathematik.*

22. PEACOCK, GEORGE. Article "Arithmetic," in *The Encyclopædia of Pure Mathematics*. London, 1847.

23. HERSCHEL, J. F. W. Article "Mathematics," in *Edinburgh Encyclopædia*.

24. SUTER, HEINRICH. *Geschichte der Mathematischen Wissenschaften.* Züich, 1873–75.

25. QUETELET, A. *Sciences Mathématiques et Physiques chez les Belges.* Bruxelles, 1866.

26. PLAYFAIR, JOHN. Article "Progress of the Mathematical and Physical Sciences," in *Encyclopædia Britannica*, 7th edition, continued in the 8th edition by SIR JOHN LESLIE.

27. DE MORGAN, A. *Arithmetical Books from the Invention of Printing to the Present Time.*

28. NAPIER, MARK. *Memoirs of John Napier of Merchiston.* Edinburgh, 1834.

29. HALSTED, G. B. "Note on the First English Euclid," *American Journal of Mathematics*, Vol. II., 1879.

30. MADAME PERIER. *The Life of Mr. Paschal.* Translated into English by W. A., London, 1744.

31. MONTUCLA, J. F. *Histoire des Mathématiques.* Paris, 1802.

32. DÜHRING E. *Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik.* Leipzig, 1887.

33. BREWSTER, D. *The Memoirs of Newton.* Edinburgh, 1860.

34. BALL, W. W. R. *A Short Account of the History of Mathematics.* London, 1888, 2nd edition, 1893.

35. DE MORGAN, A. "On the Early History of Infinitesimals," in the *Philosophical Magazine*, November, 1852.

36. *Bibliotheca Mathematica*, herausgegeben von GUSTAF ENESTRÖM, Stockholm.

37. GÜTHER, SIEGMUND. *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.* Leipzig, 1876.

38. *GERHARDT, C. I. *Geschichte der Mathematik in Deutschland.* Müchen, 1877.

39. GERHARDT, C. I. *Entdeckung der Differenzialrechnung durch Leibniz.* Halle, 1848.

40. GERHARDT, K. I. "Leibniz in London," in *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Academie der Wissenschaften zu Berlin*, Februar, 1891.

41. DE MORGAN, A. Articles "Fluxions" and "Commercium Epistolicum," in the *Penny Cyclopædia*.

42. *TODHUNTER, I. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge and London, 1865.

43. *TODHUNTER, I. *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials.* Edited and completed by KARL PEARSON. Cambridge, 1886.

44. TODHUNTER, I. "Note on the History of Certain Formulæin Spherical Trigonometry," *Philosophical Magazine*, February, 1873.

45. *Die Basler Mathematiker, Daniel Bernoulli und Leonhard Euler.* Basel, 1884.

46. REIFF, R. *Geschichte der Unendlichen Reihen.* Tübingen, 1889.

47. WALTERSHAUSEN, W. SARTORIUS. *Gauss, zum Gedächtniss.* Leipzig, 1856.

48. BAUMGART, OSWALD. *Ueber das Quadratische Reciprocitätsgesetz.* Leipzig, 1885.

49. HATHAWAY, A. S. "Early History of the Potential," *Bulletin of the N. Y. Mathematical Society*, I. 3.

50. WOLF, RUDOLF. *Geschichte der Astronomie.* Müchen, 1877.

51. ARAGO, D. F. J. "Eulogy on Laplace." Translated by B. POWELL, *Smithsonian Report*, 1874.

52. BEAUMONT, M. ELIE DE. "Memoir of Legendre." Translated by C. A. ALEXANDER, *Smithsonian Report*, 1867.

53. ARAGO, D. F. J. "Joseph Fourier." *Smithsonian Report*, 1871.

54. WIENER, CHRISTIAN. *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie.* Leipzig, 1884.

55. *LORIA, GINO. *Die Hauptsächlichsten Theorien der Geometrie in ihrer früheren und heutigen Entwickelung*, ins deutsche übertragen von FRITZ SCHÜTTE. Leipzig, 1888.

56. CAYLEY, ARTHUR. Inaugural Address before the British Association, 1883.

57. SPOTTISWOODE, WILLIAM. Inaugural Address before the British Association, 1878.

58. GIBBS, J. WILLARD. "Multiple Algebra," *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science*, 1886.

59. FINK, KARL. *Geschichte der Elementar-Mathematik*. Tübingen, 1890.

60. WITTSTEIN, ARMIN. *Zur Geschichte des Malfatti'schen Problems*. Nödingen, 1878.

61. KLEIN, FELIX. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen, 1872.

62. FORSYTH, A. R. *Theory of Functions of a Complex Variable*. Cambridge, 1893.

63. GRAHAM, R. H. *Geometry of Position*. London, 1891.

64. SCHMIDT, FRANZ. "Aus dem Leben zweier ungarischer Mathematiker Johann und Wolfgang Bolyai von Bolya." *Grunert's Archiv*, 48:2, 1868.

65. FAVARO, ANTON. "Justus Bellavitis," *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 26:5, 1881.

66. DRONKE, AD. *Julius Plüker*. Bonn, 1871.

67. BAUER, GUSTAV. *Gedächtnissrede auf Otto Hesse*. Müchen, 1882.

68. ALFRED CLEBSCH. *Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen von einigen seiner Freunde*. Leipzig, 1873.

69. HAAS, AUGUST. *Versuch einer Darstellung der Geschichte des Krümmungsmasses*. Tübingen, 1881.

70. FINE, HENRY B. *The Number-System of Algebra*. Boston and New York, 1890.

71. SCHLEGEL, VICTOR. *Hermann Grassmann, sein Leben und seine Werke*. Leipzig, 1878.

72. ZAHN, W. V. "Einige Worte zum Andenken an Hermann Hankel," *Mathematische Annalen*, VII. 4, 1874.

73. MUIR, THOMAS. *A Treatise on Determinants*. 1882.

74. SALMON, GEORGE. "Arthur Cayley," *Nature*, 28:21, September, 1883.

75. CAYLEY, A. "James Joseph Sylvester," *Nature*, 39:10, January, 1889.

76. BURKHARDT, HEINRICH. "Die Anfänge der Gruppentheorie und Paolo Ruffini," *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, Supplement, 1892.

77. SYLVESTER, J. J. *Inaugural Presidential Address to the Mathematical and Physical Section of the British Association at Exeter*. 1869.

78. VALSON, C. A. *La Vie et les travaux du Baron Cauchy*. Tome I., II., Paris, 1868.

79. SACHSE, ARNOLD. *Versuch einer Geschichte der Darstellung willkürlicher Funktionen einer variablen durch trigonometrische Reihen.* Göttinngen, 1879.

80. BOIS-REYMOND, PAUL DU. *Zur Geschichte der Trigonometrischen Reihen, Eine Entgegnung.* Tübingen.

81. POINCARÉ, HENRI. *Notice sur les Travaux Scientifiques de Henri Poincaré.* Paris, 1886.

82. BJERKNES, C. A. *Niels-Henrik Abel, Tableau de sa vie et de son action scientifique.* Paris, 1885.

83. TUCKER, R. "Carl Friedrich Gauss," *Nature*, April, 1877.

84. DIRICHLET, LEJEUNE. *Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi.* 1852.

85. ENNEPER, ALFRED. *Elliptische Funktionen. Theorie und Geschichte.* Halle a/S., 1876.

86. HENRICI, O. "Theory of Functions," *Nature*, 43:14 and 15, 1891.

87. DARBOUX, GASTON. *Notice sur les Travaux Scientifiques de M. Gaston Darboux.* Paris, 1884.

88. KUMMER, E. E. *Gedächtnissrede auf Gustav Peter Lejeune-Dirichlet.* Berlin, 1860.

89. SMITH, H. J. STEPHEN. "On the Present State and Prospects of Some Branches of Pure Mathematics," *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. VIII., Nos. 104, 105, 1876.

90. GLAISHER, J. W. L. "Henry John Stephen Smith," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, XLIV., 4, 1884.

91. *Bessel als Bremer Handlungslehrling.* Bremen, 1890.

92. FRANTZ, J. *Festrede aus Veranlassung von Bessel's hundertjährigem Geburtstag.* Königsberg, 1884.

93. DZIOBEK, O. *Mathematical Theories of Planetary Motions.* Translated into English by M. W. Harrington and W. J. Hussey.

94. HERMITE, CH. "Discours prononcé devant le président de la République," *Bulletin des Sciences Mathématiques*, XIV., Janvier, 1890.

95. SCHUSTER, ARTHUR. "The Influence of Mathematics on the Progress of Physics," *Nature*, 25:17, 1882.

96. KERBEDZ, E. DE. "Sophie de Kowalevski," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, V., 1891.

97. VOIGT, W. *Zum Gedächtniss von G. Kirchhoff.* Göttingen, 1888.

98. BÖCHER, MAXIME. "A Bit of Mathematical History," *Bulletin of the N. Y. Math. Soc.*, Vol. II., No. 5.

99. CAYLEY, ARTHUR. *Report on the Recent Progress of Theoretical Dynamics.* 1857.

100. GLAZEBROOK, R. T. *Report on Optical Theories.* 1885.

101. ROSENBERGER, F. *Geschichte der Physik.* Braunschweig, 1887–1890.

LỊCH SỬ TOÁN HỌC



GIỚI THIỆU

VIỆC suy ngẫm về các bước khác nhau mà nhân loại đã sở hữu kho kiến thức toán học khổng lồ khó có thể không thu hút sự quan tâm của nhà toán học. Họ tự hào về thực tế rằng khoa học của họ, hơn bất kỳ khoa học nào khác, là một khoa học *chính xác*, và hầu như không có bất cứ điều gì từng được thực hiện trong toán học lại tỏ ra vô dụng. Nhà hóa học mỉm cười trước những nỗ lực trẻ con của các nhà giả kim, nhưng nhà toán học thấy hình học của người Hy Lạp và số học của người Hindu hữu ích và đáng ngưỡng mộ như bất kỳ nghiên cứu nào ngày nay. Ông vui mừng nhận thấy rằng mặc dù trong quá trình phát triển của mình, toán học đã có những giai đoạn tăng trưởng chậm, nhưng về cơ bản, nó vẫn là một ngành khoa học *tiến bộ* ưu việt.

Lịch sử toán học có thể mang tính hướng dẫn cũng như có ích; nó có thể không chỉ nhắc nhở chúng ta về những gì chúng ta có mà còn có thể dạy chúng ta cách mở rộng tri thức của mình. De Morgan nói, "Lịch sử ban đầu của tư duy con người liên quan đến toán học khiến chúng ta chỉ ra những lỗi của chính mình; và về mặt này, thật tốt khi chú ý đến lịch sử của toán học." Nó cảnh báo chúng ta về những kết luận vội vàng; nó chỉ ra tầm quan trọng của một ký hiệu tốt đối với sự tiến bộ của khoa học; nó không khuyến khích sự chuyên môn hóa quá mức của các nhà điều tra , bằng cách cho thấy các nhánh riêng biệt rõ ràng đã được phát hiện có các liên kết kết nối không mong đợi như thế nào; nó giúp học sinh khỏi lãng phí thời gian và sức lực vào những vấn đề mà có lẽ đã được giải quyết từ lâu; nó không khuyến khích anh ta tấn công một vấn đề chưa được giải quyết bằng

cùng một phương pháp đã khiến các nhà toán học khác thất bại; nó dạy rằng các công sự có thể bị chiếm theo những cách khác ngoài tấn công trực tiếp, rằng khi bị đẩy lùi khỏi một cuộc tấn công trực tiếp, tốt nhất là nên do thám và chiếm lĩnh vùng đất xung quanh, đồng thời khám phá những con đường bí mật để có thể chiếm được vị trí dường như không thể chinh phục được. Tầm quan trọng của quy tắc chiến lược này có thể được nhấn mạnh bằng cách trích dẫn một trường hợp trong đó nó đã bị vi phạm. Một lượng năng lượng trí tuệ không kể xiết đã được sử dụng cho hình vuông của vòng tròn, nhưng không có cuộc chinh phục nào được thực hiện bằng cách tấn công trực tiếp. Những người bình phương hình tròn đã tồn tại rất nhiều kể từ thời Archimedes. Sau vô số thất bại để giải quyết vấn đề tại một thời điểm, ngay cả khi các nhà điều tra sở hữu công cụ mạnh nhất đó là phép tính vi phân, những người thông thạo toán học đã bỏ qua chủ đề này, trong khi những người vẫn kiên trì hoàn toàn không biết gì về lịch sử của nó và thường hiểu sai các điều kiện của vấn đề. De Morgan nói: "Vấn đề của chúng ta là bình phương vòng tròn với *phương tiện cho phép cũ*: Các định đề của Euclid và không gì khác. Chúng tôi không thể nhớ nổi trường hợp nào mà một câu hỏi được giải bằng *phương pháp xác định* đã được thử bởi những cái đầu giỏi nhất và cuối cùng được trả lời, *bằng phương pháp đó*, sau hàng ngàn lần thất bại hoàn toàn." Nhưng tiến bộ đã được thực hiện về vấn đề này bằng cách tiếp cận nó từ một hướng khác và bằng những con đường mới được khám phá. Lambert đã chứng minh vào năm 1761 rằng tỷ lệ của chu vi hình tròn với đường kính của nó là không thể so sánh được. Vài năm trước, Lindemann đã chứng minh rằng tỷ lệ này cũng siêu việt và rằng phương trình cầu phương của đường tròn, chỉ bằng thước và compa, là *không thể*. Do đó, ông đã chứng minh bằng bằng chứng thực tế rằng điều mà các nhà toán học có đầu óc nhạy bén đã nghi ngờ từ lâu; cụ thể là, đội quân vĩ đại của những người theo vòng tròn, trong hai nghìn năm, đã tấn công một pháo đài không thể phá hủy như bầu trời.

Một lý do khác cho mong muốn nghiên cứu lịch sử là giá trị của kiến thức lịch sử đối với giáo viên toán học. Sự quan tâm của học sinh đối với việc học của chúng có thể tăng lên rất nhiều nếu lời giải của các bài toán và logic lạnh lùng của các biểu diễn hình học được xen kẽ với các nhận xét và giai thoại lịch sử. Một lớp học về số học sẽ rất vui khi được nghe về người Hindu và việc họ phát minh ra "ký hiệu Ả Rập"; họ sẽ ngạc nhiên trước hàng nghìn năm đã trôi qua trước khi người ta nghĩ đến việc đưa vào ký hiệu số rằng quả trứng Columbus—số không; họ sẽ thấy ngạc nhiên rằng lẽ ra phải mất nhiều thời gian như vậy để *phát minh ra* một ký hiệu mà giờ đây bản thân họ có thể *học* trong một tháng. Sau khi học sinh đã học cách chia đôi một góc cho trước, hãy làm chúng ngạc nhiên bằng cách kể về nhiều nỗ lực vô ích đã được thực hiện để giải, bằng hình học cơ bản, bài toán dường như rất đơn giản về sự chia ba của một góc. Khi chúng biết cách dựng một hình vuông có diện tích gấp đôi diện tích của một hình vuông đã cho, hãy nói với chúng về sự nhân đôi của hình lập phương—làm thế nào cơn thịnh nộ của thần Apollo có thể được xoa dịu chỉ bằng cách xây dựng một bàn thờ hình lập phương gấp đôi bàn thờ đã cho , và các nhà toán học đã vật lộn với vấn đề này trong một thời gian dài như thế nào. Sau khi cả lớp đã cạn kiệt năng lượng về định lý tam giác vuông, hãy kể cho họ nghe truyền thuyết về người khám phá ra nó—làm thế nào mà Pythagoras, vui mừng trước thành tựu vĩ đại của mình, đã hy sinh một hecatomb cho Muses người đã truyền cảm hứng cho anh ấy. Khi giá trị của việc đào tạo toán học bị nghi ngờ, hãy trích dẫn dòng chữ trên lối vào học viện của triết gia Plato: "Không ai không quen thuộc với hình học vào đây." Sinh viên học hình học giải tích nên biết đôi điều về Descartes, và sau khi học phép tính vi phân và tích phân, họ nên làm quen với các phần mà Newton, Leibniz và Lagrange đóng vai trò trong việc tạo ra ngành khoa học đó. Trong bài nói chuyện lịch sử của mình, giáo viên có thể nói rõ với học sinh rằng toán học không phải là một môn khoa học chết, mà là một môn

khoa học sống trong đó có sự tiến bộ đều đặn. [2]

Lịch sử toán học cũng quan trọng như một đóng góp có giá trị cho lịch sử của nền văn minh. Tiến bộ của con người được xác định chặt chẽ với tư tưởng khoa học. Các nghiên cứu toán học và vật lý là một bản ghi đáng tin cậy về tiến bộ trí tuệ. Lịch sử toán học là một trong những cửa sổ lớn mà qua đó con mắt triết học nhìn vào các thời đại đã qua và lần theo dấu vết của sự phát triển trí tuệ.

THỜI CỔ XƯA



NGƯỜI BABYLON

THUNG LŨNG màu mỡ của Euphrates và Tigris là một trong những vị trí nguyên thủy của xã hội loài người. Lịch sử đích thực của các dân tộc sinh sống ở khu vực này chỉ bắt đầu với nền tảng, ở Chaldæ và Babylonia, của một vương quốc thống nhất từ các bộ lạc đã bị chia cắt trước đây. Lịch sử của họ đã được hé lộ nhiều điều nhờ việc khám phá ra nghệ thuật đọc *chữ hình nêm* hay hệ thống chữ viết hình nêm.

Khi nghiên cứu về toán học Babylon, chúng ta bắt đầu với ký hiệu của các con số. Một hình nêm dọc 𒁹 tượng trưng cho 1, trong khi các ký tự 𒌋 và 𒁹𒀸 tương ứng biểu thị 10 và 100. Grotefend tin rằng ký tự với giá 10 ban đầu là hình ảnh của hai bàn tay, như đang cầu nguyện, lòng bàn tay áp vào nhau, các ngón tay áp sát vào nhau, nhưng ngón tay cái chìa ra. Trong ký hiệu của người Babylon, hai nguyên tắc đã được sử dụng- –phép cộng và phép nhân. Các số dưới 100 được thể hiện bằng các ký hiệu có giá trị tương ứng phải là *cộng*. Do đó, 𒁹𒁹 là viết tắt của 2, 𒁹𒁹𒁹 cho 3 , 𒁹𒁹𒁹𒁹 cho 4, 𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹 cho 23, 𒌋𒌋𒌋 cho 30. Ở đây, các ký hiệu cấp cao hơn luôn xuất hiện ở bên trái của các ký hiệu cấp thấp hơn . Mặt khác, khi viết hàng trăm, một ký hiệu *nhỏ hơn* được đặt ở bên trái của 100, và trong trường hợp đó, được *nhân* với 100. Do đó, 𒌋 𒁹𒀸 signified 10 lần 100 hoặc 1000. Nhưng bản thân biểu tượng này cho 1000 đã được sử dụng cho một đơn vị mới, đơn vị này có thể lấy các hệ số nhỏ hơn ở bên trái của nó. Do đó, 𒌋𒌋 𒁹𒀸 được biểu thị, không phải 20 lần 100, mà là 10 lần 1000. Trong số những con số lớn nhất được viết bằng ký hiệu chữ hình nêm cho đến nay vẫn chưa được tìm thấy, không có con số nào cao đến một triệu. [3]

Theo như hầu hết các chuyên gia tin rằng, nếu những người Sumer đầu tiên là những người phát minh ra chữ viết hình nêm, thì rất có thể họ cũng quen thuộc với ký hiệu số. Đáng ngạc nhiên nhất, trong mối liên hệ này, là thực tế là các bia ký của người Sumer tiết lộ việc sử dụng, không chỉ hệ thống *thập phân* ở trên, mà còn cả hệ thống *sexagesimal*. Loại thứ hai được sử dụng chủ yếu trong việc xây dựng các bảng cho trọng lượng và thước đo. Nó chứa đầy sự quan tâm lịch sử. Sự phát triển hệ quả của nó, cho cả số nguyên và phân số, cho thấy mức độ hiểu biết cao về toán học. Chúng tôi sở hữu hai bảng khắc Babylon thể hiện công dụng của nó. Một trong số chúng, có thể được viết từ 2300 đến 1600 TCN, chứa một bảng các số vuông lên tới 60^2. Các số 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, lần lượt được cho dưới dạng bình phương của bảy số nguyên đầu tiên. Chúng ta có $1,4 = 8^2$ tiếp theo, $1,21 = 9^2$, $1,40 = 10^2$, $2,1 = 11^2$, v.v. tỷ lệ, tức là $1,4 = 60 + 4$, $1,21 = 60 + 21$, $2,1 = 2,60 + 1$. Máy tính bảng thứ hai ghi lại độ lớn của phần được chiếu sáng trên đĩa mặt trăng mỗi ngày từ khi mới đến khi trăng tròn, toàn bộ đĩa được giả định bao gồm 240 phần. Các phần được chiếu sáng trong năm ngày đầu tiên là chuỗi 5, 10, 20, 40, $1,20(= 80)$, đây là một cấp số nhân. Từ đây, chuỗi trở thành một cấp số cộng, các số từ ngày thứ năm đến ngày thứ mười lăm lần lượt là $1,20$, $1,36$, $1,52$, 1.8, $2,24$, $2,40$, $2,56$, $3,12$, $3,28$, $3,44$, 4. Bảng này không chỉ thể hiện việc sử dụng hệ thống thập lục phân mà còn cho thấy sự quen thuộc của người Babylon với các cấp số. Không nên bỏ qua một thực tế là trong ký hiệu lục phân của số nguyên, "nguyên tắc vị trí" đã được sử dụng. Do đó, trong $1,4$ $(= 64)$, 1 được tạo ra để thay thế cho 60, đơn vị bậc hai, do vị trí của nó đối với 4. Việc giới thiệu nguyên tắc này vào một thời điểm quá sớm càng đáng chú ý hơn, bởi vì trong ký hiệu thập phân, nó không được giới thiệu cho đến khoảng thế kỷ thứ năm hoặc thứ sáu sau Công nguyên. Nguyên tắc vị trí, trong ứng dụng chung và có hệ thống của nó, yêu cầu một ký hiệu cho số không. Chúng tôi hỏi, người Babylon có sở hữu một cái không? Phải chăng họ đã thực hiện một bước vĩ đại trong việc

biểu diễn *vắng mặt* đơn vị bằng một ký hiệu? Cả hai bảng trên đều không trả lời được câu hỏi này, vì chúng không chứa số nào có cơ hội sử dụng số không. Hệ lục thập phân cũng được sử dụng ở dạng phân số. Do đó, trong các bản khắc của người Babylon, $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ được chỉ định bởi 30 và 20, theo suy nghĩ của anh ta, người đọc được cho là sẽ cung cấp từ "sixtieths." Hypsicles hình học người Hy Lạp và nhà thiên văn học người Alexandrian Ptolemé đã mượn ký hiệu lục thập phân của các phân số từ của người Babylon và du nhập nó vào Hy Lạp. Kể từ thời điểm đó, phân số lục thập phân gần như thống trị hoàn toàn trong các tính toán thiên văn và toán học cho đến thế kỷ 16, khi chúng cuối cùng nhường chỗ cho phân số thập phân. Có thể hỏi, Điều gì đã dẫn đến việc phát minh ra hệ thống lục phân? Tại sao 60 phần được chọn? Đối với điều này, chúng tôi không có câu trả lời tích cực. *Mười* đã được chọn, trong hệ thập phân, vì nó đại diện cho số ngón tay. Nhưng không có gì của cơ thể con người có thể gợi ý 60. Cantor đưa ra giả thuyết sau: Lúc đầu, người Babylon tính một năm là 360 ngày. Điều này dẫn đến việc chia vòng tròn thành 360 độ, mỗi độ đại diện cho số lượng hàng ngày của vòng quay được cho là hàng năm của mặt trời quanh trái đất. Bây giờ, rất có thể, họ đã quen thuộc với thực tế là bán kính có thể được áp dụng cho chu vi của nó dưới dạng một hợp âm 6 lần, và mỗi hợp âm này nằm dưới một cung có số đo chính xác là 60 độ. Tập trung sự chú ý của họ vào các mức độ này, việc phân chia thành 60 phần có thể đã gợi ý cho họ. Do đó, khi độ chính xác cao hơn đòi hỏi phải chia nhỏ mức độ, thì nó được chia thành 60 phút. Theo cách này, ký hiệu lục phân có thể đã bắt nguồn. Việc chia ngày thành 24 giờ, và giờ thành phút và giây theo thang 60, là do người Babylon.

Có vẻ như những người ở lưu vực sông Tigro-Euphrates đã có những tiến bộ đáng kể trong lĩnh vực số học. Kiến thức của họ về cấp số cộng và hình học đã được ám chỉ . Iamblichus gán cho chúng kiến thức về tỷ lệ, và thậm chí là việc phát minh ra cái gọi là tỷ lệ *âm nhạc*. Mặc dù chúng tôi không có bằng chứng thuyết phục, nhưng

chúng tôi vẫn có lý do để tin rằng trong tính toán thực tế, họ đã sử dụng *bàn tính*. Trong số các chủng tộc ở Trung Á, thậm chí cho đến tận Trung Quốc, bàn tính cổ xưa như một câu chuyện ngụ ngôn. Giờ đây, Babylon đã từng là một trung tâm thương mại lớn,—thủ đô của nhiều quốc gia,—và do đó, không phải vô lý khi cho rằng các thương nhân của nó đã sử dụng công cụ hỗ trợ tiên tiến nhất này để tính toán.

Trong hình học, người Babylon hầu như không đạt được gì. Bên cạnh việc chia chu vi thành 6 phần theo bán kính và thành 360 độ, họ còn có một số kiến thức về các hình hình học, chẳng hạn như tam giác và tứ giác, mà họ sử dụng trong các điềm báo của mình . Giống như người Do Thái (1 Kin. 7:23), họ lấy $\pi = 3$. Tất nhiên, không có dấu vết của các biểu diễn hình học. “Như một quy luật, trong tâm trí phương Đông, sức mạnh trực giác lấn át lý trí và logic một cách nghiêm trọng.”

Thiên văn học của người Babylon đã thu hút nhiều sự chú ý. Họ tôn thờ các thiên thể từ những thời kỳ lịch sử sớm nhất. Khi Alexander Đại đế, sau trận chiến Arbela (331 TCN), chiếm đóng Babylon, Callisthenes đã tìm thấy ở đó các ghi chép thiên văn bằng gạch nung quay trở lại như cho đến năm 2234 TCN Porphyrius nói rằng những thứ này đã được gửi đến Aristotle. Ptolemy, nhà thiên văn học người Alexandria, sở hữu một kỷ lục về nhật thực của người Babylon có từ năm 747 TCN. Gần đây, Epping và Strassmaier [4] đã làm sáng tỏ đáng kể về niên đại và thiên văn học của người Babylon bằng cách giải thích hai lịch của các năm 123 TCN và 111 TCN, được lấy từ các bảng chữ hình nêm sắp tới, có lẽ là, từ một đài quan sát cũ. Các học giả này đã thành công trong việc giải thích cách tính toán trăng non và trăng tròn của người Babylon, và đã xác định được bằng cách tính toán tên các hành tinh của người Babylon, mười hai cung hoàng đạo và 28 ngôi sao bình thường tương ứng ở một mức độ nào đó với hai mươi tám *nakshatras* của người Hindu. Chúng tôi nối thêm một phần của báo cáo thiên văn của người Assyria, được

dịch bởi Oppert:—

"Gửi Đức vua, thưa ngài, người hầu trung thành của ngài, Mar-Istar."

"...Vào ngày đầu tiên, khi mặt trăng mới của tháng Thammuz suy yếu, mặt trăng lại xuất hiện trên hành tinh Sao Thủy (Mercury), như tôi đã tiên đoán với chủ nhân của mình là Vua. Tôi không sai."

NGƯỜI AI CẬP

Mặc dù có sự khác biệt lớn về quan điểm liên quan đến sự cổ xưa của nền văn minh Ai Cập, nhưng tất cả các nhà chức trách đều đồng ý trong tuyên bố rằng, dù họ có đi xa đến đâu, họ cũng không tìm thấy tình trạng xã hội kém văn minh nào. "Menes, vị vua đầu tiên, đã thay đổi dòng chảy của sông Nile, tạo ra một hồ chứa lớn, và xây dựng đền thờ Phthah ở Memphis." Người Ai Cập đã xây dựng các kim tự tháp vào thời kỳ rất sớm. Chắc chắn một người tham gia vào doanh nghiệp tầm cỡ như vậy phải biết chút ít về toán học—ít nhất là về toán học thực tế.

Tất cả các nhà văn Hy Lạp đều nhất trí trong việc gán cho Ai Cập ưu tiên phát minh trong các ngành khoa học toán học mà không hề ghen tị. Plato trong *Phædrus* nói: "Tại thành phố Ai Cập của Naucratis có một vị thần cổ nổi tiếng tên là Theuth; loài chim được gọi là cò quăm rất linh thiêng đối với ông, và ông là người phát minh ra nhiều môn nghệ thuật, chẳng hạn như số học và tính toán, hình học và thiên văn học và bản nháp và xúc xắc , nhưng khám phá vĩ đại của ông là việc sử dụng các chữ cái."

Aristotle nói rằng toán học ra đời ở Ai Cập, bởi vì ở đó tầng lớp tu sĩ có thời gian nhàn rỗi cần thiết để nghiên cứu về nó. Đặc biệt, hình học được Herodotus, Diodorus, Diogenes Laertius, Iamblichus và các nhà văn cổ đại khác cho rằng có nguồn gốc từ Ai Cập. [5] Trong Herodotus, chúng ta tìm thấy điều này (II. c. 109): "Họ cũng nói rằng vị vua này [Sesostris] đã chia đất cho tất cả người Ai Cập để cấp cho mỗi người một hình tứ giác có kích thước bằng nhau và

lấy từ mỗi người thu nhập của mình, bằng cách áp đặt một loại thuế được đánh hàng năm. Nhưng bất cứ ai bị dòng sông cuốn đi bất cứ thứ gì, đều phải đến gặp anh ta và thông báo những gì đã xảy ra; Sau đó, ông cử những người giám sát, những người phải đo xem mảnh đất đã trở nên nhỏ hơn bao nhiêu, để chủ sở hữu có thể trả phần còn lại, tương ứng với toàn bộ số thuế đã áp dụng. Theo cách này, dường như đối với tôi, hình học bắt nguồn, từ đó truyền sang Hellas."

Chúng tôi không đưa ra ý kiến bổ sung của người Hy Lạp về toán học Ai Cập, hoặc không sa đà vào những phỏng đoán hoang đường. Chúng tôi dựa trên bằng chứng tài liệu. Một giấy cói hieratic, nằm trong bộ sưu tập Rhind của Bảo tàng Anh, đã được Eisenlohr giải mã vào năm 1877, và được phát hiện là một sổ tay toán học chứa các bài toán về số học và hình học. Nó được viết bởi **Ahmes** khoảng thời gian nào đó trước năm 1700 TCN, và được thành lập dựa trên một tác phẩm cũ hơn mà Birch cho rằng có niên đại từ năm 3400 TCN! Tấm giấy cói gây tò mò này– -cuốn sổ tay toán học cổ xưa nhất mà chúng ta biết đến—ngay lập tức đưa chúng ta tiếp xúc với tư tưởng toán học ở Ai Cập cách đây ba hoặc năm nghìn năm. từ đó thấy rằng người Ai Cập quan tâm rất ít đến các kết quả lý thuyết. Các định lý hoàn toàn không được tìm thấy trong đó. Nó chứa "hầu như không có bất kỳ quy tắc chung nào về quy trình, mà chủ yếu chỉ là các tuyên bố về kết quả dự định có thể được giải thích bởi một giáo viên cho học sinh của mình ."[6] Trong hình học, sở trường của người Ai Cập nằm ở việc xây dựng và xác định diện tích. Diện tích của một tam giác cân, trong đó các cạnh có kích thước 10 *ruths* và đáy 4 *ruths*, đã bị nhầm là 20 vuông *ruths* hoặc một nửa tích của cơ sở của một bên. Tương tự, diện tích của một hình thang cân cũng được tính bằng cách nhân một nửa tổng các cạnh song song với một trong các cạnh không song song. Diện tích hình tròn được tính bằng cách trừ chiều dài $\frac{1}{9}$ từ đường kính và bình phương phần còn lại. Ở đây π là đã lấy $=(\frac{16}{9})^2 = 3,1604\ldots$, một giá trị gần đúng rất công bằng. [6]

Giấy cói cũng giải thích các vấn đề như sau,—Để đánh dấu trong trường một tam giác vuông có các cạnh là 10 và 4 đơn vị; hoặc một hình thang có các cạnh song song là 6 và 4, và các cạnh không song song mỗi cạnh 20 đơn vị.

Một số vấn đề trong giấy cói này dường như ngụ ý một kiến thức thô sơ về tỷ lệ.

Các đường cơ sở của các kim tự tháp chạy theo hướng bắc và nam, đông và tây, nhưng có lẽ chỉ các đường chạy theo hướng bắc và nam được xác định bằng các quan sát thiên văn. Điều này, cùng với thực tế là từ *harpedonaptæ* áp dụng cho các nhà hình học Ai Cập, có nghĩa là "máy căng dây", sẽ chỉ ra kết luận rằng người Ai Cập, giống như các nhà hình học Ấn Độ và Trung Quốc, đã xây dựng một tam giác vuông trên một đường thẳng nhất định, bằng cách kéo căng quanh ba chốt một sợi dây gồm ba phần theo tỷ lệ $3:4:5$, và do đó tạo thành một tam giác vuông. [3] Nếu cách giải thích này đúng thì người Ai Cập đã quen thuộc, 2000 năm TCN, với tính chất nổi tiếng của tam giác vuông, cho trường hợp đặc biệt ít nhất là khi các cạnh có tỷ lệ $3:4:5$.

Trên các bức tường của ngôi đền nổi tiếng về thần Horus tại Edfu đã được tìm thấy những chữ tượng hình, được viết vào khoảng năm 100 TCN, liệt kê các mảnh đất thuộc sở hữu của giới tư tế và cho biết diện tích của chúng. Diện tích của bất kỳ tứ giác nào, dù không đều, được tìm thấy theo công thức $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}$. Do đó, đối với một tứ giác có các cạnh đối diện là 5 and 8, 20 and 15, có diện tích là $113\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$. [7] Công thức saiæ của Ahmes trong 3000 năm TCN thường mang lại kết quả gần đúng hơn so với kết quả của các bản khắc Edfu, được viết 200 năm sau Euclid!

Thực tế là hình học của người Ai Cập bao gồm chủ yếu là các công trình xây dựng, đã đi xa để giải thích một số khiếm khuyết lớn của nó. Người Ai Cập đã thất bại ở hai điểm thiết yếu mà nếu không có *khoa học* hình học, theo đúng nghĩa của từ này, thì không thể tồn

tại. Trước hết, họ đã thất bại trong việc xây dựng một hệ thống hình học logic chặt chẽ, dựa trên một vài tiên đề và định đề. Rất nhiều quy tắc của họ, đặc biệt là những quy tắc trong hình học rắn, có lẽ chưa được chứng minh, nhưng được biết là đúng chỉ nhờ quan sát hoặc như những vấn đề thực tế. Khiếm khuyết lớn thứ hai là họ không có khả năng đưa vô số trường hợp đặc biệt dưới một cái nhìn tổng quát hơn, và do đó đi đến những định lý rộng hơn và cơ bản hơn. Một số chân lý hình học đơn giản nhất được chia thành vô số trường hợp đặc biệt mà mỗi trường hợp được cho là cần được xử lý riêng.

Một số chi tiết về hình học Ai Cập có thể được đề cập một cách thuận lợi hơn liên quan đến các nhà toán học Hy Lạp sơ khai đã đến gặp các linh mục Ai Cập để được hướng dẫn.

đã có được cái nhìn sâu sắc về các phương pháp tính số của người Ai Cập thông qua việc giải mã tài tình các chữ tượng hình của Champollion, Young và những người kế vị của họ. Các ký hiệu được sử dụng như sau: 𓏺 cho 1, 𓎆 cho 10, 𓍢 cho 100, 𓆼 cho 1000 , 𓂭 cho 10.000, 𓆐 cho 100.000, 𓁨 cho 1.000.000, Ω cho 10.000.000. [3] Biểu tượng cho 1 đại diện cho một cây trượng thẳng đứng; cái đó với giá 10.000 đô la một ngón tay trỏ; cái đó với giá 100.000 đô la một con cá bơn; cái đó với giá 1,000,000, một người đàn ông kinh ngạc. Ý nghĩa của các biểu tượng còn lại là rất đáng nghi ngờ. Việc viết các con số với những chữ tượng hình này rất phức tạp. Ký hiệu đơn vị của mỗi thứ tự được lặp lại nhiều lần khi có các đơn vị trong thứ tự đó. Nguyên tắc được sử dụng là *thêm vào*. Do đó, 23 được viết 𓎆𓎆𓏺𓏺𓏺.

Bên cạnh chữ tượng hình, Ai Cập còn sở hữu chữ viết *hieratic* và *demotic*, nhưng vì muốn có không gian nên chúng tôi bỏ qua chúng.

Herodotus đưa ra một tuyên bố quan trọng liên quan đến phương thức tính toán của người Ai Cập. Anh ấy nói rằng họ "*tính toán với những viên sỏi* bằng cách di chuyển bàn tay từ phải sang trái, trong

khi người Hellenes di chuyển nó từ trái sang phải." Ở đây, chúng ta một lần nữa nhận ra rằng phương pháp tính toán *công cụ* được sử dụng rộng rãi bởi các dân tộc cổ đại. Người Ai Cập đã sử dụng thang đo thập phân. Vì khi tính toán, họ di chuyển bàn tay theo chiều ngang, có vẻ như họ đã sử dụng bảng mật mã có cột dọc. Trong mỗi cột không được có nhiều hơn chín viên sỏi, vì mười viên sỏi sẽ bằng một viên sỏi ở cột bên trái.

Giấy cói Ahmes chứa thông tin thú vị về cách người Ai Cập sử dụng phân số. Tất nhiên, phương thức hoạt động của của họ hoàn toàn khác với phương pháp của chúng ta. Phân số là một chủ đề rất khó đối với người xưa. Người ta thường tránh thay đổi đồng thời cả tử số và mẫu số. Khi thao túng phân số, người Babylon giữ mẫu số (60) không đổi. Người La Mã cũng giữ chúng không đổi, nhưng tương đương với 12. Mặt khác, người Ai Cập và Hy Lạp đã giữ nguyên các tử số và xử lý các mẫu số thay đổi. Ahmes sử dụng thuật ngữ "phân số" theo nghĩa hạn chế, vì ông chỉ áp dụng nó cho *phân số đơn vị*, hoặc phân số có tử số bằng một. Nó được chỉ định bằng cách viết mẫu số và sau đó đặt lên trên nó một dấu chấm. Các giá trị phân số không thể biểu thị bằng bất kỳ một phân số đơn vị nào được biểu thị dưới dạng *sum* của hai hoặc nhiều trong số chúng. Do đó, anh ấy đã viết $\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}$ thay cho $\frac{2}{5}$. Vấn đề quan trọng đầu tiên nảy sinh một cách tự nhiên là làm thế nào để biểu diễn bất kỳ giá trị phân số nào dưới dạng tổng của các phân số đơn vị. Điều này đã được giải quyết nhờ sự trợ giúp của một bảng, được đưa ra trong giấy cói, trong đó tất cả các phân số có dạng $\dfrac{2}{2n+1}$ (trong đó n chỉ định liên tiếp tất cả các số lên tới 49) được rút gọn thành tổng của các phân số đơn vị. Do đó, $\frac{2}{7} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{28}$; $\frac{2}{99} = \frac{1}{66}\,\frac{1}{198}$. Chúng tôi không biết bảng này được tính khi nào, bởi ai và như thế nào. Có lẽ nó được biên soạn theo kinh nghiệm vào những thời điểm khác nhau, bởi những người khác nhau. Ta sẽ thấy rằng bằng cách áp dụng lặp đi lặp lại bảng này, một phân số có tử số lớn hơn hai có thể được

biểu thị ở dạng mong muốn, với điều kiện là có một phân số trong bảng có cùng mẫu số mà *it* có. Lấy ví dụ, bài toán chia 5 cho 21. Đầu tiên, $5 = 1 + 2 + 2$. Từ bảng, chúng tôi nhận được $\frac{2}{21} = \frac{1}{14}\,\frac{1}{42}$. Khi đó $\frac{5}{21} = \frac{1}{21} + (\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}) + (\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}) = \frac{1}{21} + (\frac{2}{14}\,\frac{2}{42}) = \frac{1}{21}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{21} = \frac{1}{7}\,\frac{2}{21} = \frac{1}{7}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{42}$. Giấy cói chứa các bài toán yêu cầu các phân số được nâng lên bằng cách cộng hoặc nhân với các số nguyên đã cho hoặc với các phân số khác. Ví dụ: bắt buộc phải tăng $\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{45}$ đến 1. Mẫu số chung được lấy dường như là 45, vì các số được nêu là $11\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$, $4\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1. Tổng của các khoản này là $23\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$ bốn mươi lăm. Thêm vào $\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$ này, và tổng là $\frac{2}{3}$. Thêm $\frac{1}{3}$ và chúng ta có 1. Do đó số lượng cần thêm vào phân số đã cho là $\frac{1}{3}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{40}$.

Sau khi hoàn thành chủ đề về phân số, Ahmes chuyển sang giải phương trình của một đại lượng chưa biết. Đại lượng chưa biết được gọi là ‘hau’ hoặc đống. Do đó, vấn đề, “đống, của nó $\frac{1}{7}$, toàn bộ của nó, nó tạo ra 19,” *nghĩa là* $\frac{x}{7} + x = 19$. Trong trường hợp này, giải pháp như sau: $\frac{8x}{7} = 19$; $\frac{x}{7} = 2\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$; $x = 16\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}$. Nhưng trong các vấn đề khác, các giải pháp được thực hiện bằng nhiều phương pháp khác. Do đó, có vẻ như sự khởi đầu của đại số cũng cổ xưa như hình học.

Khiếm khuyết chính của số học Ai Cập là thiếu một biểu tượng đơn giản, toàn diện—một khiếm khuyết mà ngay cả người Hy Lạp cũng không thể loại bỏ.

Giấy cói Ahmes chắc chắn đại diện cho những thành tựu tiên tiến nhất của người Ai Cập về số học và hình học. Điều đáng chú ý là lẽ ra họ phải đạt được trình độ toán học cực kỳ thông thạo ở một thời kỳ xa xưa như vậy. Nhưng thực sự kỳ lạ là, trong suốt hai nghìn năm tới, lẽ ra họ không đạt được bất kỳ tiến bộ nào trong đó. Chúng tôi tự rút ra kết luận rằng họ giống người Trung Quốc ở *tính cách cố định*, không chỉ về chính phủ mà còn về học thức của họ. Tất cả kiến thức về hình học mà họ có được khi các học giả Hy Lạp đến thăm họ, sáu thế kỷ trước Công nguyên, chắc chắn là họ đã biết đến hai nghìn năm trước đó, khi họ xây dựng những công trình kỳ vĩ và

khổng lồ đó—các kim tự tháp. Người ta đã tìm cách giải thích cho sự trì trệ trong học tập này là do những khám phá ban đầu của họ về toán học và y học đã không may bị ghi vào những cuốn sách thiêng liêng của họ và rằng, về sau, việc tăng thêm hoặc sửa đổi bất cứ thứ gì trong đó bị coi là dị giáo. Vì vậy, những cuốn sách tự đóng cánh cổng để tiến bộ.

NGƯỜI HY LẠP

HÌNH HỌC HY LẠP

Khoảng thế kỷ thứ bảy TCN một giao dịch thương mại tích cực đã nảy sinh giữa Hy Lạp và Ai Cập. Đương nhiên, đã nảy sinh sự trao đổi về ý tưởng cũng như về hàng hóa. Người Hy Lạp, khao khát kiến thức, đã tìm kiếm các linh mục Ai Cập để được hướng dẫn. Thales, Pythagoras, Œnopides, Plato, Democritus, Eudoxus, tất cả đều đã đến thăm vùng đất của các kim tự tháp. Do đó, các ý tưởng của người Ai Cập đã được truyền qua biển và ở đó đã kích thích tư tưởng của người Hy Lạp, hướng nó vào những dòng mới và tạo cơ sở cho nó hoạt động. Do đó, văn hóa Hy Lạp không phải là nguyên thủy. Không chỉ trong toán học, mà còn trong thần thoại và nghệ thuật, Hellas mắc nợ các quốc gia lâu đời hơn. Đối với Ai Cập, Hy Lạp mắc nợ, trong số những thứ khác, vì hình học cơ bản của nó. Nhưng điều này không làm giảm đi sự ngưỡng mộ của chúng ta đối với đầu óc Hy Lạp. Kể từ thời điểm các nhà triết học Hy Lạp tự nghiên cứu hình học Ai Cập, khoa học này đã mang một khía cạnh hoàn toàn khác. Plato nói: "Bất cứ điều gì người Hy Lạp chúng tôi nhận được, chúng tôi đều cải tiến và hoàn thiện. Người Ai Cập không đưa hình học đi xa hơn hoàn toàn cần thiết cho nhu cầu thực tế của họ. Mặt khác, người Hy Lạp mang trong mình khuynh hướng đầu cơ mạnh mẽ. Họ cảm thấy khao khát khám phá ra nguyên nhân của mọi thứ. Họ tìm thấy niềm vui khi chiêm ngưỡng những mối quan hệ *lý tưởng* và yêu khoa học *như* khoa học.

Các nguồn thông tin của chúng tôi về lịch sử hình học Hy Lạp trước Euclid chỉ bao gồm các thông báo rải rác của các tác giả cổ đại. Các nhà toán học đầu tiên, Thales và Pythagoras, không để lại tài liệu nào về những khám phá của họ. Toàn bộ lịch sử về hình học và thiên văn học Hy Lạp trong thời kỳ này, được viết bởi Eudemus, một học trò của Aristotle, đã bị thất lạc. Nó rất nổi tiếng với Proclus, người, trong các bài bình luận của mình về Euclid, đã mô tả ngắn gọn về nó. Bản tóm tắt này cấu thành thông tin đáng tin cậy nhất của chúng tôi. Chúng tôi sẽ thường xuyên trích dẫn nó dưới tên *Tóm tắt Eudemian*.

Trường phái Ionic

Gửi tới **Thales** của Miletus (640–546 TCN), một trong “bảy người thông thái ” và là người sáng lập ra trường phái Ionic, rất vinh dự được giới thiệu nghiên cứu này của hình học vào Hy Lạp. Trong thời trung niên, ông tham gia vào các hoạt động thương mại, điều này đã đưa ông đến Ai Cập. Ông được cho là đã cư trú ở đó, và đã nghiên cứu khoa học vật lý và toán học với các linh mục Ai Cập. Plutarch tuyên bố rằng Thales đã sớm vượt trội các bậc thầy của mình, và khiến Vua Amasis kinh ngạc khi đo chiều cao của các kim tự tháp từ bóng của chúng. Theo Plutarch, điều này được thực hiện bằng cách xem xét rằng cái bóng do một cây trượng thẳng đứng có chiều dài đã biết tạo ra có cùng tỷ lệ với bóng của kim tự tháp cũng như chiều cao của cây trượng với chiều cao của kim tự tháp. Giải pháp này giả định trước một kiến thức về tỷ lệ, và giấy cói Ahmes thực sự cho thấy rằng nguyên tắc tỷ lệ đã được người Ai Cập biết đến. Theo Diogenes Laertius, Thales đã đo các kim tự tháp theo một cách khác; viz. bằng cách tìm chiều dài của bóng của kim tự tháp tại thời điểm khi bóng của một cây trượng bằng với chiều dài của chính nó.

Tóm tắt Eudemian quy cho Thales là người đã phát minh ra các định lý về sự bằng nhau của các góc đối đỉnh, sự bằng nhau của các

góc ở đáy của một tam giác cân, phân giác của một đường tròn bằng bất kỳ đường kính nào và sự đồng dạng của hai tam giác có một cạnh và hai góc kề bù lần lượt bằng nhau. Định lý cuối cùng được ông áp dụng để đo khoảng cách của các con tàu từ bờ biển. Do đó, Thales là người đầu tiên áp dụng hình học lý thuyết vào ứng dụng thực tế. Định lý rằng tất cả các góc nội tiếp trong một hình bán nguyệt đều là góc vuông được một số nhà văn cổ đại gán cho Thales, những người khác gán cho Pythagoras. Thales chắc chắn đã quen thuộc với các định lý khác, không được người xưa ghi lại. Người ta suy ra rằng ông biết tổng ba góc của một tam giác bằng hai góc vuông, và các cạnh của tam giác đều tỷ lệ. [8] Người Ai Cập hẳn đã sử dụng các định lý trên vào đường thẳng, trong một số công trình của họ được tìm thấy trong giấy cói của Ahmes, nhưng nó được để lại cho nhà triết học Hy Lạp đưa ra những sự thật này, mà những người khác đã nhìn thấy, nhưng không diễn đạt thành lời, một biểu hiện rõ ràng, trừu tượng, và đưa vào ngôn ngữ khoa học và có thể chứng minh điều mà người khác chỉ đơn thuần cảm thấy là đúng. Thales có thể được cho là đã tạo ra hình học của các đường, về cơ bản là trừu tượng trong đặc tính của nó, trong khi người Ai Cập chỉ nghiên cứu hình học của các bề mặt và những điều cơ bản của hình học khối, mang tính chất kinh nghiệm của chúng. [8]

Với Thales cũng bắt đầu nghiên cứu về thiên văn học khoa học. Ông đã trở nên nổi tiếng nhờ tiên đoán về nhật thực vào năm 585 TCN. Người ta không biết liệu ông có dự đoán ngày xảy ra hay đơn giản là năm hay không. Người ta kể về anh ta rằng khi đang ngắm sao trong một buổi đi dạo buổi tối, anh ta đã ngã xuống một con mương. Bà già tốt bụng hầu hạ ông thốt lên: “Làm sao ông biết được việc gì đang xảy ra trên trời, khi ông không thấy những gì dưới chân mình?”

Hai học trò nổi bật nhất của Thales là **Anaximander** (b. 611 TCN) và **Anaximenes** (b. 570 TCN). Họ nghiên cứu chủ yếu là thiên văn học và triết học vật lý. Về **Anaxagoras**, một học trò của Anaximenes,

và là triết gia cuối cùng của trường phái Ionic , chúng ta biết rất ít, ngoại trừ điều đó, khi ở trong tù, anh ấy đã dành thời gian của mình để cố gắng bình phương hình tròn. Đây là lần đầu tiên, trong lịch sử toán học, chúng tôi thấy đề cập đến bài toán nổi tiếng về phương trình cầu phương của hình tròn, tảng đá mà trên đó có rất nhiều danh tiếng đã bị hủy hoại. Điều này phụ thuộc vào việc xác định giá trị chính xác của π. Các phép tính gần đúng cho π đã được thực hiện bởi người Trung Quốc, người Babylon, Hebrews, và Egypts. Nhưng việc phát minh ra một phương pháp để tìm giá trị *exact* của nó, là một vấn đề nan giải đã thu hút sự chú ý của nhiều bộ óc từ thời Anaxagoras xuống của riêng chúng ta Anaxagoras đã không đưa ra bất kỳ giải pháp nào về nó, và dường như đã may mắn thoát khỏi những điều nghịch lý.

Khoảng thời gian của Anaxagoras, nhưng bị cô lập khỏi trường phái Ionic, **Œnopides** của Chios đã phát triển mạnh mẽ. Proclus gán cho anh ta cách giải các bài toán sau: Từ một điểm không có điểm, vẽ một đường vuông góc với một đường thẳng đã cho và để Vẽ một góc trên một đường thẳng bằng một góc cho trước. Việc một người có thể nổi tiếng bằng cách giải những bài toán cơ bản như thế này, cho thấy rằng hình học vẫn còn ở giai đoạn sơ khai và người Hy Lạp vẫn chưa vượt xa các công trình xây dựng của Ai Cập.

Trường Ionic tồn tại hơn một trăm năm. Sự phát triển của toán học trong thời kỳ đó là chậm so với sự phát triển của nó trong thời kỳ sau này của lịch sử Hy Lạp. Pythagoras đã đưa ra một động lực mới cho sự tiến bộ của nó.

Trường phái Pythagoras

Pythagoras (580?–500? TCN) là một trong những nhân vật đã gây ấn tượng mạnh với trí tưởng tượng của những thời kỳ tiếp theo đến mức khó có thể nhận ra lịch sử thực sự của họ thông qua màn sương mù thần thoại bao trùm lấy họ. Tường thuật sau đây của

Pythagoras loại trừ những phát biểu đáng nghi ngờ nhất. Anh ta là người gốc Samos, và bị lôi cuốn bởi sự nổi tiếng của Pherecydes đến hòn đảo Syros. Sau đó, anh ấy đã đến thăm Thales cổ đại, người đã khuyến khích anh ấy đến Ai Cập học tập. Ông đã lưu trú ở Ai Cập nhiều năm và có thể đã đến thăm Babylon. Khi trở về Samos, anh tìm thấy nó dưới sự chuyên chế của Polycrates. Thất bại trong nỗ lực tìm trường học ở đó, anh lại bỏ nhà ra đi và theo dòng chảy của nền văn minh, chuyển đến Magna Græcia ở Nam Ý. Ông định cư tại Croton và thành lập trường phái Pitago nổi tiếng. Đây không chỉ đơn thuần là một học viện giảng dạy triết học, toán học và khoa học tự nhiên, mà còn là một tình huynh đệ, các thành viên đoàn kết suốt đời. Tình anh em này có những quan sát gần giống với đặc thù của hội Tam Điểm. Họ bị cấm tiết lộ những khám phá và học thuyết của trường họ. Do đó, chúng ta buộc phải nói về các học thuyết của Pythagore như một chỉnh thể, và thấy khó xác định mỗi khám phá cụ thể sẽ được gán cho ai. Bản thân những người theo trường phái Pythagore có thói quen quy mọi khám phá về người sáng lập vĩ đại của môn phái này.

Ngôi trường này đã phát triển nhanh chóng và đạt được uy thế chính trị đáng kể. Nhưng những nghi thức thần bí và bí mật, được đưa ra để bắt chước tập quán của người Ai Cập, và xu hướng quý tộc của trường, đã khiến nó trở thành đối tượng bị nghi ngờ. Đảng dân chủ ở Hạ Ý nổi dậy và phá hủy các tòa nhà của trường phái Pitago. Pythagoras chạy trốn đến Tarentum và sau đó đến Metapontum, nơi ông bị sát hại.

Pythagoras không để lại chuyên luận toán học nào, và nguồn thông tin của chúng tôi khá ít ỏi. Chắc chắn rằng, trong trường phái Pythagore, toán học là môn học chính. Pythagoras đã nâng toán học lên hàng khoa học. Số học được ông săn đón nồng nhiệt như hình học. Trên thực tế , số học là nền tảng của hệ thống triết học của ông.

Tóm tắt Eudemian nói rằng “Pythagoras đã thay đổi việc nghiên

cứu hình học thành hình thức giáo dục khai phóng, vì ông đã xem xét tận gốc rễ các nguyên tắc của nó và nghiên cứu các định lý của nó theo cách phi vật chất và trí tuệ .” Hình học của ông đã được kết nối chặt chẽ với số học của mình. Ông đặc biệt thích những quan hệ hình học thừa nhận biểu thức số học.

Giống như hình học Ai Cập, hình học của Pitago quan tâm nhiều đến diện tích. Định lý quan trọng được gán cho Pythagore là bình phương cạnh huyền của một tam giác vuông bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông. Có lẽ anh ta đã học được từ người Ai Cập chân lý của định lý trong trường hợp đặc biệt khi các cạnh lần lượt là 3, 4, 5. Chuyện kể rằng Pythagoras đã rất vui mừng trước khám phá này đến nỗi ông đã hy sinh một hecatomb. Tính xác thực của nó bị nghi ngờ, bởi vì những người theo trường phái Pythagore tin vào sự luân hồi của linh hồn và do đó phản đối việc làm đổ máu. Trong các truyền thống sau này của những người theo trường phái Tân Pythagore, sự phản đối này bị loại bỏ bằng cách thay thế sự hy sinh đẫm máu này bằng sự hy sinh của “con bò làm bằng bột mì”! Chứng minh của định luật ba bình phương, được đưa ra trong *Elements*, I. 47 của Euclid, là do chính của Euclid, chứ không phải của các học giả Pythagore. Phương pháp chứng minh của Pythagore là gì đã là một chủ đề phỏng đoán ưa thích.

Định lý về tổng ba góc của một tam giác, có lẽ đã được Thales biết đến, đã được chứng minh bởi Pythagore theo cách của Euclid. Họ cũng chứng minh rằng mặt phẳng bao quanh một điểm được lấp đầy hoàn toàn bởi sáu tam giác đều, bốn hình vuông hoặc ba hình lục giác đều, do đó có thể chia một mặt phẳng thành các hình thuộc một trong hai loại.

Từ tam giác đều và hình vuông tạo ra các khối, cụ thể là tứ diện, bát diện, nhị thập diện, và khối lập phương. Những chất rắn này, rất có thể, đã được người Ai Cập biết đến, ngoại trừ, có lẽ, icosaedron. Trong triết học Pythagore, chúng lần lượt đại diện cho bốn yếu tố

của thế giới vật chất; cụ thể là lửa, không khí, nước và đất. Sau đó, một chất rắn thông thường khác được phát hiện, gọi là khối mười hai mặt, không có nguyên tố thứ năm, được tạo ra để đại diện cho chính vũ trụ. Iamblichus tuyên bố rằng Hippasus, một người theo trường phái Pythagore, đã chết trên biển vì ông ta khoe khoang rằng lần đầu tiên ông ta tiết lộ "quả cầu có mười hai hình ngũ giác." Hình ngôi sao ngôi sao năm cánh được những người theo trường phái Pythagore sử dụng làm biểu tượng công nhận và được họ gọi là Sức khỏe.

Pythagoras gọi hình cầu là đẹp nhất trong tất cả các chất rắn và hình tròn là đẹp nhất trong tất cả các hình phẳng. Việc giải quyết các chủ đề về tỷ lệ và đại lượng vô tỷ của anh ấy và trường của anh ấy sẽ được thực hiện dưới sự hướng dẫn của số học.

Theo Eudemus, những người theo trường phái Pythagore đã phát minh ra các bài toán liên quan đến việc áp dụng các diện tích, bao gồm các trường hợp khuyết và thừa, như trong Euclid, VI. 28, 29.

Các em cũng đã làm quen với việc dựng một đa giác có diện tích bằng một đa giác cho trước và có diện tích bằng với một đa giác cho trước khác. Vấn đề này phụ thuộc vào một số định lý quan trọng và có phần nâng cao, đồng thời chứng minh rằng các học giả Pitago không đạt được tiến bộ đáng kể nào trong hình học.

Trong số các định lý thường được gán cho trường phái Ý, một số không thể được gán cho chính Pythagoras, cũng như cho những người kế vị sớm nhất của ông. Tất nhiên, tiến độ từ các giải pháp thực nghiệm đến các giải pháp lý luận phải chậm. Điều đáng chú ý là trên đường tròn không có định lý quan trọng nào được phát hiện bởi trường phái này.

Mặc dù chính trị đã phá vỡ tình huynh đệ Pythagore, nhưng trường học vẫn tiếp tục tồn tại ít nhất hai thế kỷ nữa. Trong số những người theo chủ nghĩa Pythagore sau này, Philolaus và Archytas là nổi bật nhất. **Philolaus** đã viết một cuốn sách về các

học thuyết của Pythagore . Bởi ông lần đầu tiên được trao cho thế giới những lời dạy của trường phái Ý, vốn đã được giữ bí mật trong cả thế kỷ. **Archytas** lỗi lạc của Tarentum (428–347 TCN), được biết đến như một chính khách và vị tướng vĩ đại, và được mọi người ngưỡng mộ vì đức tính của ông, là nhà hình học vĩ đại duy nhất của người Hy Lạp khi Plato mở ra trường học của anh. Archytas là người đầu tiên áp dụng hình học vào cơ học và xử lý môn học thứ hai một cách có phương pháp. Ông cũng đã tìm ra một giải pháp cơ học rất tài tình cho bài toán nhân đôi khối lập phương. Giải pháp của ông liên quan đến các khái niệm rõ ràng về sự tạo thành hình nón và hình trụ. Bài toán này tự rút gọn thành việc tìm hai tỷ lệ trung bình giữa hai đường thẳng đã cho. Các tỷ lệ trung bình này được Archytas thu được từ mặt cắt của một nửa hình trụ. Học thuyết về tỷ lệ đã được phát triển thông qua ông.

Có mọi lý do để tin rằng những người theo thuyết Pythagore sau này đã có ảnh hưởng mạnh mẽ đến việc nghiên cứu và phát triển toán học ở Athens. Các nhà ngụy biện đã tiếp nhận hình học từ các nguồn của Pythagore. Plato đã nghiên cứu các tác phẩm của Philolaus và từ một người bạn thân thiết ở Archytas.

Trường phái Ngụy biện

Sau thất bại của quân Ba Tư dưới tay Xerxes trong trận Salamis, 480 TCN, một liên minh được thành lập giữa những người Hy Lạp để bảo vệ quyền tự do của các thành phố Hy Lạp hiện đã được giải phóng trên các hòn đảo và bờ biển Ægæan Sea . Trong liên minh này, Athens nhanh chóng trở thành nhà lãnh đạo và nhà độc tài. Họ đã khiến ngân khố riêng của liên minh được sáp nhập vào ngân khố của Athens, và sau đó tiêu tiền của các đồng minh để làm trầm trọng thêm chính mình. Athens cũng là một trung tâm thương mại lớn. Do đó, nó trở thành thành phố giàu có và đẹp nhất thời cổ đại. Tất cả các công việc nặng nhọc đã được thực hiện bởi nô lệ. Công dân

của Athens là một người khá giả và tận hưởng rất nhiều thời gian rảnh rỗi. Chính phủ hoàn toàn dân chủ, mọi công dân là một chính trị gia. Để tạo được ảnh hưởng của mình đối với đồng loại, trước hết, mọi người phải được giáo dục. Do đó nảy sinh nhu cầu về giáo viên. Nguồn cung cấp chủ yếu đến từ Sicily, nơi các học thuyết của Pythagore đã lan rộng. Những giáo viên này được gọi là *Sophist*, hay "những nhà thông thái". Không giống như những người theo trường phái Pythagore, họ chấp nhận trả tiền cho việc giảng dạy của mình. Mặc dù thuật hùng biện là đặc điểm chính trong cách giảng dạy của họ, nhưng họ cũng dạy hình học, thiên văn học và triết học. Athens nhanh chóng trở thành trụ sở của những nhà văn Hy Lạp, và của các nhà toán học nói riêng. Ngôi nhà toán học của người Hy Lạp đầu tiên là ở Quần đảo Ionian, sau đó ở Hạ Ý, và trong thời gian hiện đang được xem xét, ở Athens.

Hình học của vòng tròn, mà hoàn toàn bị bỏ quên bởi những người theo thuyết Pythagore, đã được các nhà ngụy biện sử dụng. Gần như tất cả những khám phá của họ đều liên quan đến vô số nỗ lực của họ để giải ba bài toán nổi tiếng sau: - –

(1) Để cắt một cung hoặc một góc.

(2) Để "gấp đôi khối lập phương," *nghĩa là* để tìm một khối lập phương có *thể tích* gấp đôi khối lập phương đã cho.

(3) Để "cầu phương hình tròn" *nghĩa là* để tìm một hình vuông hoặc một số hình phẳng khác có diện tích chính xác bằng một hình tròn cho trước.

Những vấn đề này có lẽ đã là chủ đề của nhiều cuộc thảo luận và nghiên cứu hơn bất kỳ vấn đề nào khác trong toán học. Sự phân giác của một góc là một trong những bài toán dễ nhất trong hình học. Mặt khác, việc cắt ba góc lại gây ra những khó khăn bất ngờ. Một góc vuông đã được chia thành ba phần bằng nhau bởi những người theo trường phái Pythagore. Nhưng vấn đề chung, mặc dù có vẻ ngoài dễ dàng, đã vượt qua sức mạnh của hình học *tiểu học*.

Trong số đầu tiên vật lộn với nó là **Hippias of Elis**, một người cùng thời với Socrates, và sinh vào khoảng năm 460 TCN. Giống như tất cả các nhà hình học sau này, ông đã thất bại trong việc thực hiện phép chia ba chỉ bằng thước kẻ và compa. Proclus đề cập đến một người đàn ông, Hippias, có lẽ là Hippias xứ Elis, với tư cách là người phát minh ra một đường cong siêu việt dùng để chia một góc không chỉ thành ba mà còn thành bất kỳ số phần bằng nhau nào. Sau đó, chính đường cong này đã được Deinostratus và những người khác sử dụng cho phép cầu phương của hình tròn. Trên tài khoản này, nó được gọi là *quadratrix*.

Các học giả Pitago đã chỉ ra rằng đường chéo của một hình vuông là cạnh của một hình vuông khác có diện tích gấp đôi diện tích của hình vuông ban đầu. Điều này có lẽ gợi ra bài toán nhân đôi hình lập phương, *nghĩa là* để tìm cạnh của một hình lập phương có thể tích gấp đôi thể tích của một hình lập phương đã cho. Eratosthenes gán cho vấn đề này có nguồn gốc khác. Người Delian đã từng bị dịch bệnh và được nhà tiên tri ra lệnh nhân đôi một bàn thờ hình khối nhất định. Những người thợ thiếu suy nghĩ chỉ đơn giản là xây dựng một khối lập phương với các cạnh dài gấp đôi, nhưng điều này không làm hài lòng các vị thần. Lỗi được phát hiện, Plato đã được tư vấn về vấn đề này. Ông và các đệ tử của mình háo hức tìm kiếm lời giải cho "Bài toán Delian" này. **Hippocrates of Chios** (khoảng 430 TCN), một nhà toán học tài năng, nhưng chậm chạp và ngu ngốc, là người đầu tiên chỉ ra rằng bài toán có thể được rút gọn thành việc tìm hai tỷ lệ trung bình giữa một đường cho trước và một đường khác dài gấp đôi. Vì, theo tỷ lệ $a:x=x:y=y:2a$, vì $x^2=ay$ và $y^2=2ax$ và $x^4=a^2y^2$, chúng ta có $x^4=2a^3x$ và $x^3=2a^3$. Nhưng anh ấy đã thất bại trong việc tìm ra hai tỷ lệ trung bình. Nỗ lực của anh ta để làm tròn vòng tròn cũng là một thất bại; vì mặc dù anh ấy tự tôn vinh mình bằng cách bình phương một mặt trăng, nhưng anh ấy đã mắc lỗi khi cố gắng áp dụng kết quả này vào bình phương của hình tròn.

Trong nghiên cứu của mình về phép cầu phương và các bài toán

gấp đôi hình vuông, Hippocrates đã đóng góp rất nhiều cho hình học đường tròn.

Chủ đề về những con số tương tự đã được nghiên cứu và phát triển một phần bởi Hippocrates. Điều này liên quan đến lý thuyết về tỷ lệ. Tỷ lệ, cho đến nay, chỉ được người Hy Lạp sử dụng theo số lượng. Họ chưa bao giờ thành công trong việc thống nhất các khái niệm về số lượng và độ lớn. Thuật ngữ "số" được họ sử dụng theo nghĩa hạn chế. Cái mà chúng ta gọi là số vô tỷ không được bao gồm trong khái niệm này. Thậm chí không phải phân số hợp lý được gọi là số. Họ sử dụng từ theo nghĩa giống như chúng ta sử dụng "số nguyên". Do đó, các số được hình thành là *không liên tục*, trong khi độ lớn là *liên tục*. Do đó, hai khái niệm xuất hiện hoàn toàn khác biệt. Khoảng cách giữa chúng được phơi bày rõ ràng trong tuyên bố của Euclid rằng "độ lớn không thể so sánh được không có cùng tỷ lệ với các số." Trong *Elements* của Euclid, chúng ta tìm thấy lý thuyết về tỷ lệ độ lớn được phát triển và xử lý độc lập với lý thuyết về các con số. Việc chuyển lý thuyết tỷ lệ từ số sang độ lớn (và đặc biệt là độ dài) là một bước khó khăn và quan trọng.

Hippocrates đã làm tăng thêm danh tiếng của mình bằng cách viết một cuốn sách giáo khoa về hình học, được gọi là *Elements*. Ấn phẩm này cho thấy rằng thói quen giữ bí mật của Pythagore đã bị từ bỏ; bí mật trái ngược với tinh thần của cuộc sống Athen.

Nhà ngụy biện **Antiphon**, một người cùng thời với Hippocrates, đã giới thiệu *quá trình* của sự vét cạn nhằm mục đích giải bài toán cầu phương. Ông đã ghi công khi nhận xét rằng bằng cách ghi vào một hình tròn một hình vuông, và trên các cạnh của nó dựng các tam giác cân có các đỉnh của chúng nằm trong chu vi, và trên các cạnh của các tam giác này dựng các tam giác mới, v.v., người ta có thể thu được một chuỗi các đường thẳng đều đặn. các đa giác 8, 16, 32, 64 cạnh, v.v., trong đó mỗi cạnh tiếp cận gần vòng tròn hơn cạnh trước, cho đến khi vòng tròn cuối cùng *hết*. Như vậy thu được một

đa giác nội tiếp có các cạnh trùng với chu vi. Vì có thể tìm được các hình vuông có diện tích bằng bất kỳ đa giác nào, nên cũng có thể tìm được một hình vuông bằng với đa giác cuối cùng nội tiếp, và do đó bằng chính đường tròn đó. **Bryson xứ Heraclea** , một người cùng thời với Antiphon, đã nâng cao vấn đề của phép cầu phương một cách đáng kể bằng cách bao quanh các đa giác đồng thời với việc ông nội tiếp các đa giác. Tuy nhiên, ông đã sai lầm khi cho rằng diện tích hình tròn là trung bình cộng giữa các đa giác ngoại tiếp và nội tiếp. Không giống như Bryson và phần còn lại của các nhà hình học Hy Lạp, Antiphon dường như đã tin rằng có thể, bằng cách liên tục nhân đôi các cạnh của một đa giác nội tiếp, để thu được một đa giác trùng với đường tròn. Câu hỏi này đã làm nảy sinh những tranh chấp sôi nổi ở Athens. Nếu một đa giác có thể trùng với đường tròn, thì, Simplicius nói, chúng ta phải gạt sang một bên quan niệm rằng độ lớn là chia hết *ad infinitum*. Aristotle luôn ủng hộ lý thuyết về khả năng chia hết vô hạn, trong khi Zeno, nhà Khắc kỷ, đã cố gắng chứng minh sự phi lý của nó bằng cách chứng minh rằng nếu độ lớn là chia hết thì chuyển động là không thể. Zeno lập luận rằng Achilles không thể vượt qua một con rùa; đối với trong khi anh ta vội vã chạy đến nơi mà con rùa đã ở khi anh ta bắt đầu, con rùa tiến lên phía trước một khoảng, và trong khi Achilles đến vị trí thứ hai đó, con rùa lại tiến lên một chút, và Sớm. Vì vậy, con rùa luôn đi trước Achilles. Những lập luận như vậy đã gây bối rối lớn cho các nhà hình học Hy Lạp. Không có gì ngạc nhiên khi những nghịch lý như vậy ngăn cản họ đưa ý tưởng về vô cực vào hình học của họ. Nó không phù hợp với sự nghiêm ngặt của bằng chứng của họ.

Quá trình của Antiphon và Bryson đã tạo ra "phương pháp vét cạn" rườm rà nhưng hoàn toàn nghiêm ngặt. tăng vô hạn số cạnh, gần như cạn kiệt khoảng cách giữa đa giác và chu vi. Từ định lý rằng các đa giác tương tự nội tiếp trong các đường tròn đối với nhau là bình phương trên đường kính của chúng, các nhà hình học có thể đã dự đoán định lý được cho là của Hippocrates xứ Chios rằng các

hình tròn, khác rất ít so với hình vẽ cuối cùng đa giác, phải đối với nhau bằng bình phương đường kính của chúng. Nhưng để loại trừ mọi sự mơ hồ và khả năng nghi ngờ, các nhà hình học Hy Lạp sau này đã áp dụng cách lập luận như vậy trong Euclid, XII. 2, như sau: Cho C and c, D and d lần lượt là các đường tròn và đường kính trong câu hỏi. Sau đó, nếu tỷ lệ $D^2 : d^2 = C : c$ không đúng, giả sử rằng $D^2 : d^2 = C : c'$. Nếu $c' < c$, thì một đa giác p có thể nội tiếp trong đường tròn c mà gần nó hơn về diện tích so với c'. Nếu P là đa giác tương ứng trong C, thì $P : p = D^2 : d^2 = C : c'$, và $P : C = p : c'$. Vì $p > c'$, ta có $P > C$, vô lý. Tiếp theo, họ đã chứng minh bằng chính phương pháp *reductio quảng cáo vô lý* này sự sai lầm của giả định rằng $c' > c$. Vì c' không thể lớn hơn cũng không nhỏ hơn c, nên nó phải bằng nó, Q.E.D. Hankel đề cập đến Phương pháp làm cạn kiệt này ngược lại với Hippocrates của Chios, nhưng lý do gán nó cho nhà văn đầu tiên này, chứ không phải cho Eudoxus, dường như không đủ.

Mặc dù tiến bộ về hình học ở thời kỳ này chỉ có thể được theo dõi ở Athens, nhưng Ionia, Sicily, Abdera ở Thrace và Cyrene đã sản sinh ra những nhà toán học có những đóng góp đáng tin cậy cho khoa học. Chúng tôi chỉ có thể đề cập ở đây **Democritus của Abdera** (khoảng 460–370 TCN), một học trò của Anaxagoras, một người bạn của Philolaus, và một người ngưỡng mộ Pythagore. Ông đã đến thăm Ai Cập và có lẽ cả Ba Tư. Ông là một nhà hình học thành công và đã viết trên những dòng không thể so sánh được, về hình học, về những con số và về phối cảnh. Không có tác phẩm nào trong số này còn tồn tại. Anh ấy từng khoe khoang rằng trong việc xây dựng các hình máy bay có bằng chứng, chưa có ai vượt qua anh ấy, kể cả cái gọi là harpedonaptæ(" máy căng dây") của Ai Cập. Bằng lời khẳng định này, ông dành một lời khen ngợi tâng bốc cho kỹ năng và khả năng của người Ai Cập.

Trường phái Platon

Trong Chiến tranh Peloponnesian (431–404 TCN) sự tiến bộ của hình học đã được kiểm tra. Sau chiến tranh, Athens chìm vào hậu trường với tư cách là một cường quốc chính trị nhỏ, nhưng ngày càng tiến xa hơn với tư cách là người dẫn đầu về triết học, văn học và khoa học. Plato sinh ra tại Athens vào năm 429 TCN, năm xảy ra đại dịch hạch, và qua đời in 348 TCN. Ông là học trò và là bạn thân của Socrates, nhưng không phải từ ông mà ông có được khiếu toán học. Sau khi Socrates qua đời, Plato đã đi du lịch nhiều nơi. Ở Cyrene, ông học toán dưới sự hướng dẫn của Theodorus. Ông đến Ai Cập, sau đó đến Hạ Ý và Sicily, nơi ông tiếp xúc với những người theo chủ nghĩa Pythagore. Archytas của Tarentum và Timæus của Locri đã trở thành những người bạn thân thiết của ông . Khi trở về Athens, khoảng năm 389 TCN, ông đã thành lập ngôi trường của mình trong khu rừng *Hàn lâm*, và dành phần đời còn lại của mình cho việc giảng dạy và viết lách.

Triết lý vật lý của Plato một phần dựa trên triết lý của Pythagore. Giống như họ, trong số học và hình học , ông đã tìm kiếm chìa khóa của vũ trụ. Khi được hỏi về nghề nghiệp của Thần, Plato trả lời rằng “Ngài hình học liên tục.” Theo đó, kiến thức về hình học là sự chuẩn bị cần thiết cho việc nghiên cứu triết học. Để cho thấy giá trị to lớn của ông đối với toán học và tầm quan trọng của nó đối với sự suy đoán cao hơn, Plato đã đặt dòng chữ trên hiên nhà của mình, “Không cho phép bất kỳ ai không quen thuộc với hình học bước vào đây.” Xenocrates, người kế tục Plato là chỉ số Xenocrates giáo viên trong Học viện, theo bước chân của chủ mình, bằng cách từ chối nhận một học sinh không được đào tạo về toán học, với nhận xét, “ Hãy biến đi, vì ngươi không nắm vững triết học. ” Plato đã quan sát hình học đó rèn luyện trí óc để suy nghĩ đúng đắn và mạnh mẽ. Do đó, *Tóm tắt Eudemian* nói, “Ông đã lấp đầy các bài viết của mình bằng những khám phá toán học, và trong mọi trường hợp đều thể

hiện mối liên hệ đáng chú ý giữa toán học và triết học.”

Với Platon là hiệu trưởng, chúng ta không cần ngạc nhiên rằng trường phái Platon đã sản sinh ra một số lượng lớn các nhà toán học như vậy. Platon đã làm rất ít công việc ban đầu thực sự, nhưng ông đã tạo ra những cải tiến có giá trị về logic và các phương pháp được sử dụng trong hình học. Đúng là các nhà hình học ngụy biện của thế kỷ trước rất khắt khe trong các chứng minh của họ, nhưng như một quy luật, họ không phản ánh bản chất bên trong của các phương pháp của họ. Họ đã sử dụng các tiên đề mà không cung cấp cho chúng biểu thức rõ ràng, và các khái niệm hình học, chẳng hạn như điểm, đường thẳng, bề mặt, v.v., mà không gán cho chúng các định nghĩa chính thức. Những người theo trường phái Pythagore gọi một điểm là “sự thống nhất trong vị trí”, nhưng đây là một phát biểu của một lý thuyết triết học hơn là một định nghĩa. Plato phản đối việc gọi một điểm là “hư cấu hình học”. Ông định nghĩa một điểm là “điểm bắt đầu của một đường thẳng” hay là“một đường thẳng không thể chia cắt”, và một đường thẳng là “chiều dài không có chiều rộng”. Ông gọi điểm, đường thẳng, bề mặt, ’các ranh giới’ của đường thẳng, bề mặt, khối tương ứng. Nhiều định nghĩa trong Euclid được gán cho trường phái Platon. Điều tương tự có lẽ cũng đúng với các tiên đề của Euclid. Aristotle đề cập đến tiên đề của Plato rằng “bằng trừ bằng trừ bằng để lại bằng.”

Một trong những thành tựu vĩ đại nhất của Plato và trường phái của ông là phát minh ra *phân tích* như một phương pháp chứng minh. Chắc chắn rằng phương pháp này đã được sử dụng một cách vô thức bởi Hippocrates và những người khác; nhưng Plato, với tư cách là một triết gia thực thụ, đã biến logic bản năng thành một phương pháp có ý thức, hợp pháp.

Thuật ngữ *tổng hợp* và *phân tích* được sử dụng trong toán học theo nghĩa đặc biệt hơn là logic. Trong toán học cổ đại chúng có ý nghĩa khác với những gì chúng có bây giờ. Định nghĩa lâu đời nhất

về phân tích toán học trái ngược với tổng hợp là định nghĩa được đưa ra trong Euclid, XIII. 5, mà rất có thể đã được Eudoxus đóng khung: “Phân tích là đạt được thứ được tìm kiếm bằng cách giả định nó và do đó suy luận dẫn đến một sự thật được thừa nhận; tổng hợp là thu được điều được tìm kiếm bằng cách lập luận cho đến suy luận và chứng minh về nó.” Phương pháp phân tích không mang tính kết luận, trừ khi tất cả các hoạt động liên quan đến nó được biết là có thể đảo ngược. Để loại bỏ mọi nghi ngờ, người Hy Lạp, như một quy luật, đã thêm vào quy trình phân tích một quy trình tổng hợp, bao gồm việc đảo ngược tất cả các hoạt động xảy ra trong quá trình phân tích. Do đó, mục đích của phân tích là để hỗ trợ việc phát hiện ra các bằng chứng hoặc giải pháp tổng hợp.

Plato được cho là đã giải quyết được vấn đề về sự trùng lặp của khối lập phương. Nhưng giải pháp này cũng dẫn đến sự phản đối giống như những gì ông đã đưa ra đối với các giải pháp của Archytas, Eudoxus, và Menæchmus. Ông gọi các giải pháp của họ không phải là hình học, mà là cơ học, vì chúng yêu cầu sử dụng các dụng cụ khác ngoài thước kẻ và compa. Ông nói rằng do đó “ lợi ích của hình học bị gạt sang một bên và bị phá hủy, vì chúng ta lại quy nó vào thế giới của cảm giác, thay vì nâng tầm và thấm nhuần nó bằng những hình ảnh tư tưởng vĩnh cửu và hợp nhất, ngay cả khi nó được Chúa sử dụng, vì lý do nào mà Ngài luôn luôn là Thượng đế.” Những sự phản đối này chỉ ra rằng lời giải đã được gán sai cho Plato hoặc rằng ông ấy muốn chứng tỏ rằng có thể tìm ra các lời giải phi hình học của đặc tính đó một cách dễ dàng như thế nào. Hiện nay, người ta thường thừa nhận rằng bài toán sao chép, cũng như các bài toán tam giác và cầu phương, không thể giải chỉ bằng thước và compa.

Plato đã tạo ra một kích thích lành mạnh cho nghiên cứu mà cho đến thời của ông đã hoàn toàn bị lãng quên. Hình cầu và chất rắn thông thường đã được nghiên cứu ở một mức độ nào đó, nhưng hình lăng trụ, hình chóp, hình trụ và hình nón hầu như không được biết đến tồn tại. Tất cả những chất rắn này đã trở thành đối tượng

nghiên cứu của trường phái Platon. Một kết quả của những yêu cầu này là tạo ra kỷ nguyên. **Menæchmus**, cộng sự của Plato và học trò của Eudoxus, đã phát minh ra các mặt cắt hình nón, trong đó có chỉ một thế kỷ, đã nâng hình học lên tầm cao nhất mà nó đã được dự định đạt tới trong thời cổ đại. Menæchmus cắt ba loại hình nón, 'góc vuông', 'góc nhọn' và 'góc tù', bằng các mặt phẳng vuông góc với một cạnh của hình nón, và do đó thu được ba phần mà chúng ta bây giờ hãy gọi parabola, elip và hyperbola. Đánh giá từ hai lời giải rất tao nhã của "Bài toán Delian" bằng giao điểm của các đường cong này, Menæchmus hẳn đã thành công tốt đẹp trong việc khảo sát các tính chất của chúng.

Một nhà hình học vĩ đại khác là **Dinostratus**, anh trai của Menæchmus và là học trò của Plato. Nổi tiếng là giải pháp cơ học của ông về phương trình bậc hai của hình tròn, bằng phương pháp *quadratrix* của Hippias.

Có lẽ nhà toán học lỗi lạc nhất trong thời kỳ này là **Eudoxus**. Ông sinh ra tại Cnidus khoảng 408 TCN, theo học Archytas, và sau đó, trong hai tháng, dưới sự hướng dẫn của Plato. Ông thấm nhuần tinh thần tìm hiểu khoa học thực sự và được mệnh danh là cha đẻ của khoa học quan sát thiên văn. Từ những thông báo rời rạc về các nghiên cứu thiên văn của mình, được tìm thấy trong các tác giả sau này, Ideler và Schiaparelli đã thành công trong việc tái tạo lại hệ thống Eudoxus với biểu diễn nổi tiếng về chuyển động của các hành tinh bằng "các mặt cầu đồng tâm." Eudoxus có một trường học ở Cyzicus, cùng các học trò của mình đến Athens, thăm Plato, sau đó quay trở lại Cyzicus, nơi ông qua đời năm 355 TCN. Sự nổi tiếng của học viện Plato phần lớn là do các học sinh của Eudoxus học tại trường Cyzicus, trong số đó có Menæchmus, Dinostratus, Athenæus, và Helicon. Diogenes Laertius mô tả Eudoxus là nhà thiên văn học, bác sĩ, nhà lập pháp , đồng thời là nhà hình học. *Tóm tắt Eudemian* nói rằng Eudoxus "lần đầu tiên tăng số lượng chung định lý, được thêm vào ba tỷ lệ ba định lý nữa, và nâng lên một số

lượng đáng kể việc học tập, bắt đầu bởi Plato, về chủ đề của phần mà ông đã áp dụng phương pháp phân tích.' ' Chắc chắn 'phần' này có nghĩa là "phần vàng" (*sectio aurea*), cắt một đường ở cực và trung bình. Năm mệnh đề đầu tiên trong Euclid XIII. liên hệ với các dòng được cắt bởi phần này và thường được cho là của Eudoxus. Eudoxus đã bổ sung nhiều kiến thức về hình học chất rắn. Ông đã chứng minh, Archimedes nói, rằng một kim tự tháp có chính xác bằng một phần ba hình lăng trụ và hình nón bằng một phần ba hình trụ, có đáy và chiều cao bằng nhau. Bằng chứng rằng các quả cầu đối với nhau dưới dạng lập phương bán kính của chúng có lẽ là do ông. Anh ấy đã sử dụng thường xuyên và thành thạo phương pháp vắt kiệt mà rất có thể anh ấy là người phát minh ra phương pháp này. Một học giả về Euclid, được cho là Proclus, nói thêm rằng Eudoxus trên thực tế đã phát minh ra toàn bộ cuốn sách thứ năm của Euclid. Eudoxus cũng tìm thấy hai tỷ lệ trung bình giữa hai đường thẳng đã cho, nhưng phương pháp giải không được biết đến.

Plato đã được gọi là người tạo ra các nhà toán học. Ngoài những học sinh đã được nêu tên, *Tóm tắt Eudemian* còn đề cập đến những điều sau: **Theætetus** xứ Athens, một người đàn ông có tài năng trời phú của , người mà, chắc chắn, Euclid đã mang ơn rất nhiều trong quá trình biên soạn cuốn sách thứ 10, [8] bàn về những điều không thể so sánh được; **Leodamas** xứ Thasos; **Neocleides** và học trò của ông **Leon**, những người đã bổ sung nhiều cho công trình của những người đi trước, vì Leon đã viết một *Elements* được thiết kế cẩn thận , cả về số lượng và tiện ích của các bằng chứng của nó; **Theudius xứ Magnesia**, người đã biên soạn một cuốn sách rất hay về *Elements* và các mệnh đề tổng quát, vốn chỉ giới hạn trong các trường hợp cụ thể; **Hermotimus xứ Colophon**, người đã phát hiện ra nhiều mệnh đề của *Elements* và soạn thảo một số trên *loci*; và cuối cùng là tên của **Amyclas xứ Heraclea**, **Cyzicenus xứ Athens** và **Philippus xứ Mende**.

Một nhà toán học tài ba mà chúng ta không có thông tin chi tiết

về cuộc đời và công trình của ông là **Aristæus**, người cao tuổi, có lẽ là người cùng thời với của Euclid. Việc ông viết một công trình về tiết diện conic có xu hướng cho thấy rằng nghiên cứu của họ đã đạt được nhiều tiến bộ trong thời kỳ của Menæchmus. Aristæus đã viết cũng trên chất rắn thông thường và trau dồi phương pháp giải tích. Các tác phẩm của ông có lẽ chứa đựng một bản tóm tắt các nghiên cứu của trường phái Platon. [8]

Aristotle (384–322 TCN), người hệ thống hóa logic suy diễn, mặc dù không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp, đã thúc đẩy khoa học hình học bằng cách cải thiện một số định nghĩa khó nhất. *Vật lý* của anh ấy chứa những đoạn có gợi ý gợi ý về nguyên lý vận tốc ảo. Vào khoảng thời gian của ông ở đó đã xuất hiện một tác phẩm có tên *Mechanica*, tác phẩm mà ông được một số người coi là tác giả. Cơ học đã hoàn toàn bị bỏ quên bởi trường phái Platon.

Trường phái Alexandrian đầu tiên

Trong các trang trước, chúng ta đã thấy sự ra đời của hình học ở Ai Cập, sự di chuyển của nó đến Quần đảo Ionian, từ đó đến Hạ Ý và Athens. Chúng ta đã chứng kiến sự phát triển của nó ở Hy Lạp từ thời thơ ấu yếu ớt đến tuổi trưởng thành mạnh mẽ, và bây giờ chúng ta sẽ thấy nó quay trở lại vùng đất sinh ra nó và ở đó có được sức sống mới.

Trong những năm suy tàn của mình, ngay sau Chiến tranh Peloponnesian, Athens đã sản sinh ra những nhà khoa học và triết gia vĩ đại nhất thời cổ đại. Đó là thời của Plato và Aristotle. Vào năm 338 TCN, trong trận chiến Chæronea, Athens bị Philip of Macedon đánh bại và quyền lực của nó bị phá vỡ vĩnh viễn. Ngay sau đó, Alexander Đại đế, con trai của Philip, bắt đầu chinh phục thế giới. Trong mười một năm, ông đã xây dựng nên một đế chế vĩ đại đã tan tành chỉ trong một ngày. Ai Cập rơi vào tay Ptolemy Soter. Alexander đã thành lập cảng biển Alexandria, cảng này nhanh

chóng trở thành "thành phố cao quý nhất trong tất cả các thành phố." Ptolemy chọn Alexandria làm thủ đô. Lịch sử của Ai Cập trong ba thế kỷ tiếp theo chủ yếu là lịch sử của Alexandria. Văn học, triết học và nghệ thuật được chăm chỉ trau dồi. Ptolemy thành lập trường đại học Alexandria. Ông đã thành lập Thư viện vĩ đại và xây dựng các phòng thí nghiệm, bảo tàng, khu vườn logicövà lối đi dạo. Alexandria nhanh chóng trở thành trung tâm học tập tuyệt vời.

Demetrius Phalereus được mời từ Athens để phụ trách Thư viện, và theo Gow, có khả năng **Euclid** đã được mời cùng ông để mở trường toán học. Hoạt động vĩ đại nhất của Euclid là vào thời của Ptolemy đầu tiên, người trị vì từ năm 306 đến năm 283 TCN. Người ta biết rất ít về cuộc đời của Euclid, ngoại trừ những gì được Proclus thêm vào *Tóm tắt Eudemian*. Euclid, Proclus nói, trẻ hơn Plato và lớn hơn Eratosthenes và Archimedes, sau này trong số những người đề cập đến ông. Ông thuộc trường phái Platon và đọc rất kỹ các học thuyết của nó. Ông đã thu thập *Elements*, sắp xếp rất nhiều mà Eudoxus đã chuẩn bị, đã hoàn thành rất nhiều thứ của Theætetus, và là người đầu tiên biến thành những nỗ lực không hoàn hảo của Khi Ptolemy từng hỏi ông liệu có thể thông thạo hình học bằng một quá trình dễ dàng hơn là nghiên cứu *Elements* hay không, Euclid đã trả lời rằng, "Không có con đường hoàng gia nào để hình học." Pappus nói rằng Euclid nổi bật bởi tính cách công bằng và tốt bụng, đặc biệt là đối với những người có thể làm bất cứ điều gì để thúc đẩy khoa học toán học. Pappus rõ ràng đang tạo ra sự tương phản với Apollonius, người mà ông ám chỉ đối lập với nhân vật này. [9] Một câu chuyện nhỏ thú vị được kể bởi Stobæus: [6] "Một thanh niên bắt đầu đọc hình học với Euclid, khi anh ta học được mệnh đề đầu tiên, đã hỏi, 'Tôi phải làm gì nhận được bằng cách học những điều này?' Vì vậy, Euclid gọi người nô lệ của mình và nói, 'Hãy cho anh ta ba xu, vì anh ta phải kiếm được lợi ích từ những gì anh ta học được.' " Đây là về tất cả các chi tiết cá nhân được các nhà văn Hy Lạp lưu giữ. Các nhà văn Syria và Ả Rập tuyên bố biết nhiều hơn thế, nhưng

họ không đáng tin cậy. Đã có lúc Euclid xứ Alexandria bị mọi người nhầm lẫn với Euclid xứ Megara, người sống trước đó một thế kỷ.

Danh tiếng của Euclid luôn chủ yếu dựa vào cuốn sách của ông về hình học, được gọi là *Elements*. Cuốn sách này cho đến nay vượt trội hơn *Elements* được viết bởi Hippocrates, Leon và Theudius, đến nỗi những tác phẩm sau này đã sớm bị tiêu diệt trong cuộc đấu tranh sinh tồn. Người Hy Lạp đã dành cho Euclid sự đặc biệt tiêu đề của "tác giả của *Elements*." Có một sự thật đáng chú ý trong lịch sử hình học, đó là *Elements* của Euclid, được viết cách đây hai nghìn năm, vẫn được nhiều người coi là giới thiệu tốt nhất về khoa học toán học. Ở Anh, chúng được sử dụng rộng rãi vào thời điểm hiện tại như một cuốn sách giáo khoa trong trường học. Tuy nhiên, một số biên tập viên của Euclid đã có xu hướng ghi nhận ông nhiều hơn mức cần thiết. Họ muốn chúng tôi tin rằng một hệ thống hình học hoàn thiện và không thể có được đã nảy sinh ngay lập tức từ bộ não của Euclid, "một Minerva được trang bị vũ khí từ đầu của Sao Mộc." Họ không đề cập đến các nhà toán học lỗi lạc trước đây mà Euclid đã lấy tài liệu của mình. và bằng chứng trong *Elements* là chào những khám phá của riêng mình. Trên thực tế, bằng chứng của "Định lý Pythagoras" là bằng chứng duy nhất được gán trực tiếp cho ông. Allman phỏng đoán rằng bản chất của Sách I., II., IV. đến từ bộ môn Pythagore, là nội dung của Sách VI. là do Pythagore và Eudoxus, những người sau này đã đóng góp học thuyết về tỷ lệ áp dụng cho những thứ không thể so sánh được và cả Phương pháp Suy kiệt (Sách XII.), rằng Theætetus đã đóng góp nhiều cho Sách X. và XIII., rằng phần chính của tác phẩm gốc của chính Euclid được tìm thấy trong Sách X. [8] Euclid là nhà hệ thống hóa vĩ đại nhất trong thời đại của ông. Bằng cách lựa chọn cẩn thận từ những tài liệu trước mắt, và bằng cách sắp xếp hợp lý các mệnh đề đã chọn, ông đã xây dựng, từ một vài định nghĩa và tiên đề, một cấu trúc đầy tự hào và cao cả. Sẽ là sai lầm nếu tin rằng ông đã đưa vào *Elements* của mình tất cả các định lý cơ bản đã biết vào thời của ông. Archimedes,

Apollonius và ngay cả bản thân ông cũng coi các định lý không có trong *Elements* của mình là những chân lý nổi tiếng.

Văn bản của *Elements* hiện được sử dụng phổ biến là ấn bản của Theon. Theon of Alexandria, cha đẻ của Hypatia, đã xuất bản , khoảng 700 năm sau Euclid, với một số thay đổi trong văn bản. Kết quả là, các nhà bình luận sau này, đặc biệt là Robert Simson, người đã làm việc với ý tưởng rằng Euclid phải hoàn hảo tuyệt đối, đã coi Theon là vật tế thần cho tất cả những khiếm khuyết mà họ nghĩ rằng họ có thể phát hiện ra trong văn bản như họ đã biết. Nhưng trong số các bản thảo do Napoléon gửi I. từ Vatican đến Paris, người ta đã tìm thấy một bản sao của *Elements* được cho là có trước thời điểm Theon ký lại. Nhiều biến thể từ phiên bản của Theon đã được chú ý trong đó, nhưng chúng không quan trọng chút nào và cho thấy rằng Theon thường chỉ thực hiện các thay đổi bằng lời nói. Do đó, những khiếm khuyết trong *Elements* mà Theon bị đổ lỗi chắc chắn là do chính Euclid. *Elements* đã được coi là cung cấp các mô hình trình diễn nghiêm ngặt một cách tỉ mỉ. Chắc chắn đúng là về mặt nghiêm ngặt, nó được so sánh thuận lợi với các đối thủ hiện đại của nó; nhưng khi được xem xét dưới ánh sáng logic toán học chặt chẽ, nó đã được C. S phát biểu. Peirce bị "đầy ngụy biện." Kết quả đúng chỉ bởi vì kinh nghiệm của người viết giúp anh ấy cảnh giác.

Ở phần đầu của ấn bản *Phần tử* của chúng tôi, dưới phần đầu của các định nghĩa, chúng tôi đưa ra các giả định về các khái niệm như điểm, đường thẳng, v.v., và một số lời giải thích bằng lời nói. Sau đó làm theo ba định đề hoặc yêu cầu, và mười hai tiên đề. Thuật ngữ 'tiên đề' đã được sử dụng bởi Proclus, nhưng không phải bởi Euclid. Thay vào đó, ông nói về 'các quan niệm chung'—chung cho tất cả mọi người hoặc cho tất cả các ngành khoa học. Đã có nhiều tranh cãi giữa các nhà phê bình cổ đại và hiện đại về các định đề và tiên đề. Vô số bản thảo và bằng chứng của Proclus đặt 'tiên đề' về *góc vuông* và *song song* (Tiên đề 11 và 12) trong số các định đề. [9, 10] Đây thực sự là vị trí thích hợp của chúng, vì chúng thực sự là *giả*

định, chứ không phải *khái niệm thông thường* hay tiên đề. Định đề về *song song* đóng một vai trò quan trọng trong lịch sử của hình học phi Euclide. Định đề duy nhất mà Euclid đã bỏ qua là định đề về sự chồng chất, theo đó các hình có thể di chuyển trong không gian mà không có bất kỳ sự thay đổi nào về dạng hoặc độ lớn.

Elements chứa mười ba cuốn sách của Euclid, và hai trong số đó được cho là Hypsicles và Damascius là các tác giả. Bốn cuốn sách đầu tiên là về hình học phẳng. Cuốn sách thứ năm coi lý thuyết tỷ lệ là áp dụng cho độ lớn nói chung. Cuốn sách thứ sáu phát triển hình học của các hình tương tự. Cuốn thứ bảy, thứ tám, thứ chín là về lý thuyết về các con số, hoặc về số học. Trong cuốn sách thứ chín đã tìm thấy bằng chứng cho định lý rằng số lượng các số nguyên tố là vô hạn. Cuốn sách thứ mười đề cập đến lý thuyết về những điều không thể so sánh được. Ba cuốn sách tiếp theo là về lập thể. Phần thứ mười một chứa các định lý cơ bản hơn của nó; thứ mười hai, hệ thức lượng của hình chóp, hình lăng trụ, hình nón, hình trụ và hình cầu. Phần thứ mười ba xử lý các đa giác đều, đặc biệt là tam giác và ngũ giác, sau đó sử dụng chúng làm các mặt của năm hình khối đều; cụ thể là, khối tứ diện, bát diện, icosaedron, khối lập phương và khối thập nhị diện. Các chất rắn thông thường đã được những người theo chủ nghĩa Platon nghiên cứu rộng rãi đến mức họ nhận được cái tên "Số liệu của Platon." Tuyên bố của Proclus rằng toàn bộ mục đích của Euclid khi viết *Elements* đã đi đến việc xây dựng các chất rắn thông thường, rõ ràng là sai. Các cuốn sách thứ mười bốn và mười lăm, xử lý hình học rắn, là ngụy thư.

Một đặc điểm đáng chú ý của Euclid, và của tất cả hình học Hy Lạp trước Archimedes là nó tránh phép đo. Do đó, định lý diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của đáy và đường cao của nó là xa lạ với Euclid.

Một cuốn sách khác còn tồn tại của Euclid là *Data*. Có vẻ như được viết cho những người sau khi hoàn thành *Elements*, mong

muốn có được khả năng giải quyết các vấn đề mới được đề xuất cho họ. *Data* là một khóa thực hành về *analysis*. Nó chứa rất ít hoặc không có gì mà một sinh viên thông minh không thể tiếp thu được từ *Elements*. Do đó, nó đóng góp rất ít vào kho kiến thức khoa học. Sau đây là các tác phẩm còn tồn tại khác thường được cho là của Euclid: *Phænomena*, một tác phẩm về hình học cầu và thiên văn học; *Quang học*, phát triển giả thuyết rằng ánh sáng phát ra từ mắt chứ không phải từ vật nhìn thấy; *Catoptrica*, chứa các mệnh đề về phản xạ từ gương; *De Divisionibus*, một chuyên luận về việc chia các hình phẳng thành các phần có tỷ lệ nhất định với nhau; *Sectio Canonis*, một tác phẩm về quãng âm nhạc. Chuyên luận của ông về *Porisms* đã bị thất lạc; nhưng Robert Simson và M. Chasles đã sử dụng nhiều kiến thức để khôi phục nó từ nhiều ghi chú được tìm thấy trong các bài viết của Pappus. Thuật ngữ 'porism' có ý nghĩa mơ hồ. Mục đích của một porism không phải là phát biểu một số tính chất hoặc chân lý, như một định lý, cũng không tạo ra một cấu trúc, như một bài toán, mà là để tìm và đưa ra quan điểm một thứ nhất thiết phải tồn tại với các số đã cho hoặc một cấu trúc đã cho, chẳng hạn như để tìm tâm của một đường tròn đã cho hoặc để tìm G.C.D. của hai số đã cho. [6] Các tác phẩm bị thất lạc khác của ông là *Sai lầm*, bao gồm các bài tập phát hiện sai lầm; *Các phần Conic*, trong bốn cuốn sách là nền tảng cho một tác phẩm về cùng chủ đề của Apollonius; và *Loci on a Surface*, ý nghĩa của không hiểu tiêu đề. Heiberg tin rằng nó có nghĩa là " locus là bề mặt."

Những người kế vị trực tiếp của Euclid trong trường toán học tại Alexandria có lẽ là **Conon**, **Dositheus** và **Zeuxippus**, nhưng ít được biết đến của họ.

Archimedes (287?–212 TCN), nhà toán học vĩ đại nhất của thời cổ đại, sinh ra ở Syracuse. Plutarch gọi ông là họ hàng của Vua Hieron; nhưng đáng tin cậy hơn là tuyên bố của Cicero, người nói với chúng ta rằng anh ấy xuất thân thấp kém. Diodorus nói rằng anh ấy đã đến thăm Ai Cập, và vì anh ấy là một người bạn tuyệt vời của

Conon và Eratosthenes, nên rất có thể anh ấy đã học ở Alexandria. Niềm tin này được củng cố bởi thực tế là ông đã có kiến thức sâu rộng nhất về tất cả các công việc đã làm trước đây trong toán học. Tuy nhiên, ông đã quay trở lại Syracuse, nơi ông trở nên hữu ích cho người bạn và người bảo trợ ngưỡng mộ của mình, Vua Hieron , bằng cách áp dụng thiên tài phát minh phi thường của mình vào việc chế tạo các loại động cơ chiến tranh khác nhau, nhờ đó ông đã gây ra nhiều tổn thất cho người La Mã trong cuộc vây hãm Marcellus. Những con tàu của La Mã, khi chúng đến trong tầm bắn của các bức tường, rất chuyên nghiệp. có lẽ là một hư cấu. Thành phố đã bị người La Mã chiếm giữ trong một thời gian dài, và Archimedes đã chết trong cuộc tàn sát bừa bãi sau đó. Theo truyền thống, vào thời điểm đó, ông đang nghiên cứu sơ đồ của một vấn đề nào đó được vẽ trên cát. Khi một người lính La Mã đến gần anh ta, anh ta hét lên, "Đừng làm hỏng vòng tròn của tôi." Người lính, cảm thấy bị xúc phạm, lao vào anh ta và giết chết anh ta. Không thể đổ lỗi cho vị tướng La Mã Marcellus, người đã ngưỡng mộ thiên tài của ông, và đã dựng lên để vinh danh ông một ngôi mộ có hình khối cầu được khắc trong một hình trụ. Khi Cicero ở Syracuse, ông đã tìm thấy ngôi mộ bị chôn vùi dưới đống rác.

Archimedes được đồng bào ngưỡng mộ chủ yếu vì những phát minh cơ khí của ông; bản thân ông đánh giá cao hơn nhiều những khám phá của mình trong khoa học thuần túy. Ông tuyên bố rằng "mọi loại hình nghệ thuật liên quan đến nhu cầu hàng ngày đều là đê tiện và tầm thường." Một số tác phẩm của ông đã bị thất lạc. Sau đây là những cuốn sách còn tồn tại, được sắp xếp gần đúng theo thứ tự thời gian: 1. Hai cuốn sách về *Sự cân bằng của các mặt phẳng* hoặc *Trung tâm của lực hấp dẫn của mặt phẳng*, ở giữa có chèn chuyên luận của ông về *Cung độ của các mặt phẳng Parabol*; 2. Hai cuốn sách về *Sphere* và *Cylinder*; 3. *Số đo đường tròn*; 4. *Trên Xoắn ốc*; 5. *Conoids* và *Spheroids*; 6. Cái *Máy đếm cát*; 7. Hai cuốn sách về *Cơ thể nổi*; 8. Mười lăm *Bổ đề*.

Trong cuốn sách *Số đo hình tròn*, Archimedes trước hết chứng minh rằng diện tích hình tròn bằng diện tích của một tam giác vuông có độ dài chu vi đáy và bán kính bằng đường cao. Về điều này, ông giả định rằng tồn tại một đường thẳng có chiều dài bằng chu vi—một giả định bị một số nhà phê bình cổ đại phản đối, trên cơ sở rằng không rõ ràng là một đường thẳng có thể bằng một đường cong. Việc tìm kiếm một dòng như vậy là vấn đề tiếp theo. Đầu tiên, anh ta tìm thấy giới hạn trên của tỷ lệ giữa chu vi và đường kính, hay π. Để làm điều này, anh ấy bắt đầu với một có đáy là một tiếp tuyến và đỉnh là tâm của hình tròn. Bằng cách lần lượt chia đôi góc ở tâm, bằng cách so sánh các tỷ số và bằng cách lấy căn bậc hai vô tỉ luôn hơi quá nhỏ, cuối cùng ông đi đến kết luận rằng $\pi < 3\frac{1}{7}$. Tiếp theo, anh ta tìm giới hạn dưới bằng cách ghi vào đường tròn các đa giác đều 6, 12, 24, 48, 96 cạnh, tìm cho mỗi đa giác liên tiếp chu vi của nó, tất nhiên, luôn nhỏ hơn chu vi . Vì vậy, cuối cùng ông kết luận rằng "chu vi của một hình tròn vượt quá ba lần đường kính của nó một phần nhỏ hơn $\frac{1}{7}$ nhưng hơn $\frac{10}{71}$ đường kính." Giá trị gần đúng này đủ chính xác cho hầu hết các mục đích.

Cấu phương của Parabol chứa hai giải pháp cho v ấn đề—một giải pháp cơ học, giải pháp kia là hình học. Phương pháp cạn kiệt được sử dụng trong cả hai.

Archimedes cũng nghiên cứu hình elip và lập phương trình bậc hai của nó, nhưng dường như ông ít chú ý hơn đến hyperbola. Người ta tin rằng ông đã viết một cuốn sách về mặt cắt hình nón.

Trong tất cả những khám phá của mình, Archimedes đánh giá cao nhất những khám phá trong *Sphere* và *Cylinder* của ông. Trong đó chứng minh các định lý mới, rằng bề mặt của một hình cầu bằng bốn lần một đường tròn lớn; rằng bề mặt của một đoạn của một hình cầu bằng một đường tròn có bán kính là đường thẳng vẽ từ đỉnh của đoạn đó đến chu vi của đường tròn đáy của nó; rằng thể tích và diện tích của một hình cầu lần lượt bằng $\frac{2}{3}$ thể tích và diện tích của hình

trụ ngoại tiếp hình cầu. Archimedes mong muốn rằng con số của mệnh đề cuối cùng được khắc trên lăng mộ của ông. Điều này đã được thực hiện bởi Marcellus.

Đường xoắn ốc hiện được gọi là "xoắn ốc của Archimedes" và được mô tả trong cuốn sách *On Spirals*, do Archimedes phát hiện, chứ không phải, như một số người tin, bởi người bạn của ông là Conon. [3] Chuyên luận của ông trên đó có lẽ là tác phẩm tuyệt vời nhất trong tất cả các tác phẩm của ông. Ngày nay, các chủ đề thuộc loại này được thực hiện dễ dàng bằng cách sử dụng phép tính vô hạn. Thay vào đó, người xưa đã sử dụng phương pháp vắt kiệt. Không nơi nào khả năng sinh sản của thiên tài của anh ấy được thể hiện một cách hoành tráng hơn là việc anh ấy sử dụng thành thạo phương pháp này. Với Euclid và những người đi trước ông, phương pháp của sự cạn kiệt chỉ là phương tiện để chứng minh những mệnh đề mà người ta phải nhìn thấy và tin tưởng trước khi chúng được chứng minh. Nhưng trong tay của Archimedes, nó đã trở thành một công cụ khám phá. [9]

Từ 'conoid,' trong cuốn sách của ông về *Conoids và Spheroids*, có nghĩa là vật rắn được tạo ra bởi sự quay của một parabol hoặc một hyperbol quanh trục của nó. Các nhân vật chính được tạo ra bởi vòng quay của một hình elip, và dài hoặc phẳng, tùy theo hình elip xoay quanh trục chính hay trục phụ. Cuốn sách dẫn đến hình khối của những chất rắn này.

Bây giờ chúng ta đã xem xét ngắn gọn tất cả các công trình hiện có của ông về hình học. Chuyên luận số học của ông và các vấn đề sẽ được xem xét sau. Bây giờ chúng ta sẽ chú ý đến các công trình của ông về cơ học. Archimedes là tác giả của kiến thức vững chắc đầu tiên về chủ đề này. Archytas, Aristotle và những người khác đã cố gắng biến những chân lý cơ học đã biết thành một ngành khoa học, nhưng không thành công. Aristotle biết tính chất của đòn bẩy, nhưng không thể thiết lập lý thuyết toán học thực sự của nó.

Whewell nói, khiếm khuyết cơ bản và chết người trong suy đoán của người Hy Lạp là "rằng mặc dù họ có các sự kiện và ý tưởng thuộc sở hữu của mình, nhưng *các ý tưởng này không khác biệt và phù hợp với thực tế*." ' Ví dụ, Aristotle khẳng định rằng khi một vật thể ở cuối đòn bẩy đang chuyển động, nó có thể được coi là có hai chuyển động; một theo hướng tiếp tuyến và một theo hướng bán kính; Ông nói, chuyển động trước là *thuận theo tự nhiên*, chuyển động sau là *trái với tự nhiên*. Những quan niệm không phù hợp về chuyển động 'tự nhiên' và 'không tự nhiên' này, cùng với thói quen suy nghĩ đã chi phối những suy đoán này, khiến cho việc nhận thức về cơ sở thực sự của các đặc tính cơ học là không thể. [11] Có vẻ kỳ lạ là ngay cả sau khi Archimedes đã bước vào trên con đường đúng đắn, khoa học này lẽ ra phải hoàn toàn đứng yên cho đến thời Galileo—khoảng thời gian gần hai nghìn năm.

Bằng chứng về tính chất của đòn bẩy, được đưa ra trong *Trang bị của Máy bay*, giữ vị trí của nó trong sách giáo khoa cho đến ngày nay. Ước tính của anh ấy về hiệu quả của đòn bẩy được thể hiện trong câu nói được cho là của anh ấy, “Hãy cho tôi một điểm tựa để tựa vào, và tôi sẽ di chuyển trái đất.”

Trong khi *Thiết bị* xử lý chất rắn hoặc trạng thái cân bằng của chất rắn, cuốn sách về *Các vật thể nổi* xử lý thủy tĩnh. Lần đầu tiên ông chú ý đến chủ đề trọng lượng riêng khi Vua Hieron yêu cầu ông kiểm tra xem một chiếc vương miện, được người chế tác tuyên bố là vàng nguyên chất, có phải được hợp kim với bạc hay không. Chuyện kể rằng nhà triết học của chúng ta đang tắm thì phương pháp thực sự của giải pháp lóe lên trong đầu ông. Anh ta ngay lập tức chạy về nhà, trần truồng, hét lên: “Tôi đã tìm thấy nó!” Để giải quyết vấn đề, anh ta lấy một miếng vàng và một miếng bạc, mỗi miếng nặng bằng chiếc vương miện. Theo một tác giả, ông đã lần lượt xác định thể tích nước bị chiếm chỗ bởi vàng, bạc và vương miện, rồi từ đó tính ra lượng vàng và bạc có trong vương miện. Theo một nhà văn khác, ông đã cân riêng vàng, bạc và vương miện khi ngâm trong nước, từ

đó xác định khối lượng mất đi của chúng trong nước. Từ những dữ liệu này anh dễ dàng tìm ra lời giải. Có thể là Archimedes đã giải quyết vấn đề bằng cả hai phương pháp.

Sau khi xem xét các bài viết của Archimedes, người ta có thể hiểu rõ tại sao, vào thời cổ đại, một 'bài toán Archimedes' lại có nghĩa là một vấn đề quá sâu sắc đối với trí óc bình thường để giải quyết, và làm thế nào một 'bằng chứng Archimedes' trở thành từ đồng nghĩa với sự chắc chắn không thể nghi ngờ . Archimedes đã viết về rất nhiều chủ đề và thể hiện sự sâu sắc tuyệt vời trong mỗi chủ đề. Ông là Newton của thời cổ đại.

Eratosthenes, kém Archimedes 11 tuổi, là người gốc Cyrene. Ông được đào tạo tại Alexandria dưới thời nhà thơ Callimachus, người mà ông đã kế vị với tư cách là người trông coi Thư viện Alexandrian. Hoạt động nhiều mặt của anh ấy có thể được suy ra từ các tác phẩm của anh ấy. Ông đã viết về *Thiện và Ác*, *Đo lường của Trái đất*, *Hài kịch*, *Địa lý*, *Niên đại*, *Chòm sao* và *Sao chép của Khối lập phương*. Ông cũng là một nhà triết học và một nhà thơ. Ông đã đo độ xiên của đường hoàng đạo và phát minh ra một thiết bị để tìm các số nguyên tố. Trong số các bài viết về hình học của ông, chúng tôi chỉ có một bức thư gửi cho Ptolemy Euergetes, đưa ra lịch sử của vấn đề trùng lặp và cũng mô tả về một phương án cơ học rất tài tình của riêng ông để giải quyết vấn đề đó. Về già, ông bị mất thị lực, và vì lý do đó được cho là đã tự sát bằng cách tự nguyện bỏ đói.

Khoảng bốn mươi năm sau khi Archimedes hưng thịnh **Apollonius xứ Perga**, thiên tài của ông gần sánh ngang với thiên tài của người tiền nhiệm vĩ đại. nhà toán học cổ đại. Apollonius sinh ra dưới triều đại của Ptolemy Euergetes và qua đời dưới thời Ptolemy Philopator, người trị vì 222–205 TCN. Ông học tại Alexandria dưới thời những người kế vị Euclid, và trong một thời gian, tại Pergamum, nơi ông đã làm quen với Eudemus, người mà ông đã dành tặng ba cuốn sách đầu tiên trong *Các phần của Conic*. Sự xuất sắc trong

công việc vĩ đại của ông đã mang lại cho ông danh hiệu của “Nhà hình học vĩ đại.” Đây là tất cả những gì được biết về cuộc đời ông.

Các phần hình nón của ông nằm trong tám cuốn sách, trong đó bốn cuốn đầu tiên đến với chúng ta bằng nguyên bản tiếng Hy Lạp. Ba cuốn sách tiếp theo không được biết đến ở châu Âu cho đến giữa thế kỷ XVII, khi một bản dịch tiếng Ả Rập, được thực hiện khoảng 1250, được phát hiện. Cuốn sách thứ tám chưa bao giờ được tìm thấy. Vào khoảng năm 1710, Halley ở Oxford đã xuất bản văn bản tiếng Hy Lạp của bốn cuốn sách đầu tiên và bản dịch tiếng Latinh của ba cuốn còn lại, cùng với sự phục hồi theo phỏng đoán của ông đối với cuốn sách thứ tám, dựa trên các bổ đề mở đầu của Pappus. Bốn cuốn sách đầu tiên chỉ chứa nội dung mà các nhà hình học trước đó đã làm được. Eutocius cho chúng ta biết rằng Heraclides, trong cuộc đời của Archimedes, đã buộc tội Apollonius rằng đã chiếm đoạt, trong *Conic Sections* của mình, những khám phá chưa được công bố của nhà toán học vĩ đại đó. Thật khó để tin rằng cáo buộc này dựa trên cơ sở tốt. Eutocius trích dẫn Geminus khi trả lời rằng cả Archimedes và Apollonius đều tuyên bố đã phát minh ra các mặt cắt hình nón, nhưng Apollonius đã đưa ra một cải tiến thực sự. Trong khi ba hoặc bốn cuốn sách đầu tiên được thành lập dựa trên các tác phẩm của Menæchmus, Aristæus, Euclid và Archimedes, thì bao gồm gần như hoàn toàn bằng vật chất mới. Ba cuốn sách đầu tiên được gửi đến Eudemus trong khoảng thời gian, những cuốn sách khác (sau cái chết của Eudemus) cho một Attalus. Lời nói đầu của cuốn sách thứ hai rất thú vị vì nó chỉ ra phương thức mà các cuốn sách tiếng Hy Lạp được ‘xuất bản’ vào thời điểm này. Nó viết như sau: “Tôi đã cử con trai tôi là Apollonius mang đến cho bạn (Eudemus) cuốn sách thứ hai trong bộ Conics của tôi. Hãy đọc nó cẩn thận và truyền đạt nó cho những người khác xứng đáng với nó. Nếu Philonides, nhà hình học, người mà tôi đã giới thiệu với bạn ở Ephesus, đến vùng lân cận của Pergamum, hãy đưa nó cho anh ta nữa.” [12]

Cuốn sách đầu tiên, Apollonius nói trong lời nói đầu của ông, "chứa phương thức tạo ra ba phần và các hyperbol liên hợp và các đặc điểm chính của chúng, được trình bày đầy đủ và tổng quát hơn so với các tác phẩm của các tác giả khác." Chúng tôi nhớ rằng Menæchmus, và tất cả những người kế vị ông cho đến Apollonius, chỉ xem xét các phần *bên phải* hình nón bởi một mặt phẳng vuông góc với các cạnh của chúng, và ba phần đó được lấy từ mỗi phần từ một hình nón khác nhau. Apollonius đã giới thiệu một khái quát hóa quan trọng. Ông đã tạo ra tất cả các phần từ một và cùng một hình nón, dù vuông góc hay vuông góc, và theo các phần có thể vuông góc hoặc không vuông góc với các cạnh của nó. Tên cũ của ba đường cong giờ đây không còn được áp dụng nữa. Thay vì gọi ba đường cong, các phần của hình nón 'góc nhọn', 'góc vuông' và 'góc tù', ông gọi chúng là *ellipse*, *parabola* và *hyperbola* , tương ứng. Chắc chắn, chúng ta tìm thấy các từ 'parabola' và 'ellipse' trong các tác phẩm của Archimedes, nhưng chúng có lẽ chỉ là phép nội suy. Từ 'ellipse' được áp dụng vì $y^2 < px$, p là tham số; từ 'parabola' được giới thiệu vì $y^2 = px$, và thuật ngữ 'hyperbola' vì $y^2 > px$.

Chuyên luận của Apollonius dựa trên một tính chất duy nhất của các mặt cắt hình nón, tính chất này bắt nguồn trực tiếp từ bản chất của hình nón mà các mặt cắt này được tìm thấy. M. Chasles! [13] "Conceive," ông nói, "một hình nón trên một cơ sở hình tròn; đường thẳng vẽ từ đỉnh của nó đến tâm của đường tròn tạo thành đáy của nó được gọi là *trục* của hình nón. Mặt phẳng đi qua trục, vuông góc với mặt đáy của nó, cắt hình nón theo hai đường và xác định trong đường tròn một đường kính; tam giác có đáy là đường kính này và hai đường thẳng là các cạnh của nó, được gọi là *tam giác qua trục*. Khi hình thành các mặt cắt hình nón của mình, Apollonius cho rằng mặt phẳng cắt vuông góc với mặt phẳng của tam giác qua trục. Các điểm mà mặt phẳng này cắt hai cạnh của tam giác này là *đỉnh* của đường cong; và đường thẳng nối hai điểm này là một đường kính của nó. Apollonius gọi đường kính này là *latus transversum*.

Tại một trong hai đỉnh của đường cong, dựng một đường vuông góc (*latus recect*) với mặt phẳng của tam giác qua trục, có độ dài nhất định, sẽ được xác định như chúng tôi sẽ chỉ định sau, và từ điểm cực trị của đường cong này. vuông góc vẽ một đường thẳng tới đỉnh kia của đường cong; bây giờ, qua bất kỳ điểm nào thuộc đường kính của đường cong, hãy vẽ một *toạ độ* vuông góc: hình vuông của toạ độ này, được hiểu giữa đường kính và đường cong, sẽ bằng hình chữ nhật được dựng trên phần của đường cong tung độ bao gồm giữa đường kính và đường thẳng, và phần của đường kính bao gồm giữa đỉnh đầu tiên và chân của tung độ. Đó là tính chất đặc trưng mà Apollonius nhận ra trong các mặt cắt hình nón của mình và được ông sử dụng với mục đích suy ra từ nó, bằng các phép biến đổi và suy diễn khéo léo, gần như tất cả các phần còn lại. Như chúng ta sẽ thấy, trong tay ông, nó chơi gần giống như phương trình bậc hai với hai biến (abscissa và hoành độ) trong hệ thống hình học giải tích của Descartes.

“ Từ đó sẽ nhận thấy rằng đường kính của đường cong và đường vuông góc được dựng lên tại một trong các điểm cực trị của nó đủ để dựng nên đường cong. Đây là hai yếu tố mà người xưa đã sử dụng để thiết lập lý thuyết về hình nón của họ. Họ gọi đường vuông góc là *latus erectum*; người hiện đại đổi tên này đầu tiên thành *latus recect*, sau đó thành *parameter*.”

Cuốn sách đầu tiên *Mặt cắt hình nón* của Apollonius gần như hoàn toàn dành cho việc tạo ra ba mặt cắt hình nón chính.

Cuốn sách thứ hai xử lý chủ yếu các tiệm cận, trục và đường kính.

Cuốn sách thứ ba đề cập đến sự bằng nhau hoặc tỷ lệ của các hình tam giác, hình chữ nhật hoặc hình vuông, trong đó các phần cấu thành của chúng được xác định bởi các phần của đường ngang, dây cung, tiệm cận hoặc tiếp tuyến, thường phụ thuộc vào rất nhiều điều kiện. Nó cũng đề cập đến chủ đề tiêu điểm của hình elip và hyperbola.

Trong cuốn sách thứ tư, Apollonius thảo luận về sự phân chia điều hòa của các đoạn thẳng. Ông cũng khảo sát một hệ gồm hai đường hình nón, và chỉ ra rằng chúng không thể cắt nhau quá 4 điểm. Ông nghiên cứu các vị trí tương đối có thể có khác nhau của hai hình nón, chẳng hạn như khi chúng có một hoặc hai điểm tiếp xúc với nhau.

Cuốn sách thứ năm bộc lộ trí tuệ trí tuệ khổng lồ của tác giả hơn bất kỳ cuốn sách nào khác. Những câu hỏi khó về *cực đại và cực tiểu*, trong đó có rất ít ví dụ được tìm thấy trong các tác phẩm trước đó, được giải quyết thấu đáo nhất ở đây. Chủ đề được nghiên cứu là tìm các đường dài nhất và ngắn nhất có thể được vẽ từ một điểm cho trước đến một hình nón. Ở đây người ta cũng tìm thấy mầm mống của chủ thể *tiến hóa* và *trung tâm dao động*.

Cuốn sách thứ sáu là về sự giống nhau của hình nón.

Cuốn sách thứ bảy là về đường kính liên hợp.

Cuốn sách thứ tám, do Halley khôi phục, tiếp tục chủ đề về đường kính liên hợp.

Điều đáng chú ý là Apollonius không nơi nào giới thiệu khái niệm *directrix* cho một đường cônic, và rằng, mặc dù tình cờ phát hiện ra *tiêu điểm* của một hình elip và hyperbol, nhưng ông đã làm không khám phá ra tiêu điểm của một parabola. [6] Dễ thấy trong hình học của ông là sự vắng mặt của các thuật ngữ và ký hiệu kỹ thuật, khiến cho các chứng minh trở nên dài và rườm rà.

Theo M. Chasles, [13], những khám phá của Archimedes và Apollonius đã đánh dấu kỷ nguyên rực rỡ nhất của hình học cổ đại. Hai câu hỏi đã chiếm lĩnh các nhà hình học của tất cả các thời kỳ có thể được coi là bắt nguồn từ chúng. Đầu tiên trong số này là cầu phương của các hình cong, đã khai sinh ra phép tính vô hạn. Thứ hai là lý thuyết về các mặt cắt hình nón, mở đầu cho lý thuyết về các đường cong hình học ở mọi bậc, và phần đó của hình học chỉ xem xét các dạng và tình huống của các hình và chỉ sử dụng giao điểm

của các đường và bề mặt và các tỷ lệ của khoảng cách trực tiếp. Hai bộ phận lớn này của hình học có thể được chỉ định bằng tên *Hình học đo lường* và *Hình học của các dạng và tình huống*, hoặc Hình học của Archimedes và của Apollonius.

Ngoài *Các phần Cononic*, Pappus còn gán cho Apollonius các tác phẩm sau: *On Contacts*, *Plane Loci*, *Các góc nghiêng*, *Thiết diện của một diện tích*, *Thiết diện xác định*, và đưa ra các bổ đề mà từ đó các nỗ lực đã được thực hiện để khôi phục lại bị mất bản gốc. Hai cuốn sách về *De Sectione Rationis* đã được tìm thấy bằng tiếng Ả Rập. Cuốn sách về *Danh bạ*, do Vieta khôi phục, chứa cái gọi là "Bài toán Apollonian": Cho ba vòng tròn, để tìm vòng tròn thứ tư mà sẽ chạm vào ba.

Euclid, Archimedes và Apollonius đã đưa hình học đến ở mức độ hoàn hảo cao nhất mà có lẽ nó có thể đạt được mà không cần giới thiệu một số khái niệm tổng quát hơn và mạnh mẽ hơn trước hơn so với phương pháp kiệt quệ cũ. Một biểu tượng ngắn gọn hơn, một hình học Descartes, một phép tính vô hạn, là cần thiết. Tâm trí người Hy Lạp không thích nghi với việc phát minh ra các phương pháp chung. Do đó, thay vì leo lên những độ cao vẫn còn cao hơn, chúng tôi quan sát thấy, về phía các nhà hình học Hy Lạp sau này, một sự đi xuống, trong thời gian đó họ dừng lại đây đó để nhìn xung quanh các chi tiết đã đi qua trong quá trình đi lên vội vàng. [3]

Trong số những người kế vị sớm nhất của Apollonius có **Nicomedes**. Không có gì chắc chắn được biết về ông, ngoại trừ việc ông đã phát minh ra *conchoid* ("giống hến"). Anh ấy đã nghĩ ra một chiếc máy nhỏ bằng mà đường cong có thể được mô tả dễ dàng. Với sự trợ giúp của conchoid, anh ấy đã nhân đôi khối lập phương. Đường cong cũng có thể được sử dụng để chia ba góc theo cách rất giống với bổ đề thứ tám của Archimedes. Proclus gán chế độ phân chia này cho Nicomedes, nhưng Pappus, ngược lại, tuyên bố là của riêng mình. Hình nón được Newton sử dụng để xây dựng các đường cong bậc ba.

Vào khoảng thời gian của Nicomedes, **Diocles**, người phát minh ra *cissoid* ("giống cây thường xuân") cũng phát triển rực rỡ. Ông đã sử dụng đường cong này để tìm hai tỷ lệ trung bình giữa hai đường thẳng cho trước.

Về cuộc đời của **Perseus**, chúng ta biết rất ít về cuộc đời của Nicomedes và Diocles. Anh ấy sống trong khoảng thời gian từ 200 đến 100 TCN. Từ Heron và Geminus, chúng ta biết được rằng anh ấy đã viết một trên *spire*, một loại bề mặt vòng neo được Heron mô tả là được tạo ra bởi sự quay của một vòng tròn quanh một trong các dây cung của nó như một trục. Các phần của bề mặt này tạo ra các đường cong đặc biệt được gọi là *phần xoắn ốc*, mà theo Geminus, là do Perseus nghĩ ra. Những đường cong này có vẻ giống với *Hippopede* của Eudoxus.

Có lẽ muộn hơn Perseus đã sống **Zenodorus** một chút. Ông đã viết một chuyên luận thú vị về một chủ đề mới; cụ thể là, *số đẳng lượng*. Mười bốn mệnh đề được Pappus và Theon bảo tồn. Sau đây là một vài trong số chúng: Trong đa giác đều, đa giác đều, đa giác có số góc lớn nhất sẽ có diện tích lớn nhất; hình tròn có diện tích lớn hơn mọi đa giác đều ngoại tiếp; trong số tất cả các đa giác đẳng tích có n cạnh, hình đều là lớn nhất; trong các chất rắn có diện tích các mặt bằng nhau thì khối cầu có thể tích lớn nhất.

Hypsicles (từ 200 đến 100 TCN) được cho là tác giả của cả hai cuốn sách thứ mười bốn và mười lăm của Euclid, nhưng các nhà phê bình gần đây cho rằng cuốn sách thứ mười lăm được viết bởi một tác giả người đã sống vài thế kỷ sau Chúa Kitô. Cuốn sách thứ mười bốn chứa bảy định lý tao nhã về *chất rắn thông thường*. Chuyên luận Hypsicles về *Risings* được quan tâm vì đây là tác phẩm đầu tiên của người Hy Lạp đưa ra cách phân chia chu vi thành 360 độ theo kiểu của người Babylon.

Hipparchus của Nicæa ở Bithynia là nhà thiên văn học vĩ đại nhất thời cổ đại. Ông đã thiết lập một cách quy nạp lý thuyết nổi

tiếng về ngoại luân và lập dị. Đúng như dự đoán, của anh ấy quan tâm đến toán học, không phải *per se*, mà chỉ để hỗ trợ cho việc tìm hiểu thiên văn. Không có bài viết toán học nào của ông còn tồn tại, nhưng Theon của Alexandria cho chúng ta biết rằng Hipparchus đã khởi xướng khoa học về *lượng giác*, và rằng ông đã tính một ”bảng hợp âm” trong mười hai cuốn sách. Những phép tính như vậy cần phải có kiến thức sẵn sàng về các phép toán số học và đại số.

Khoảng năm 100 TCN **Heron the Elder** của Alexandria phát triển rực rỡ. Ông là học trò của Ctesibius, người được tôn vinh vì những phát minh cơ khí tài tình của ông, chẳng hạn như cơ quan thủy lực, đồng hồ nước và máy phóng. Một số người tin rằng Heron là con trai của Ctesibius. Anh ấy đã thể hiện tài năng ngang với chủ nhân của mình bằng việc phát minh ra eolipile và một cơ chế kỳ lạ được gọi là “Suối diệc.” Tồn tại sự không chắc chắn lớn về các bài viết của anh ấy. Hầu hết các nhà chức trách đều tin rằng ông là tác giả của *Luận về Dioptra* quan trọng, trong đó tồn tại ba bản thảo, hoàn toàn không giống nhau. Nhưng M. Marie [14] cho rằng *Dioptra* là là tác phẩm của *Heron the Younger*, sống vào thế kỷ thứ bảy hoặc thứ tám sau Công nguyên và rằng *Trắc địa*, một cuốn sách khác được cho là của Heron, chỉ là một bản sao hư hỏng và khiếm khuyết của tác phẩm cũ. *Dioptra* chứa công thức quan trọng để tính diện tích của một tam giác được biểu thị bằng các cạnh của nó; nguồn gốc của nó là khá tốn công sức và nhưng cực kỳ khéo léo. Chasles, “Tôi thấy khó tin rằng một định lý tuyệt đẹp như vậy lại có thể được tìm thấy trong một tác phẩm cổ xưa như tác phẩm của Heron the Elder mà không có một số Nhà hình học Hy Lạp lẽ ra phải nghĩ đến việc trích dẫn nó.” Marie rất nhấn mạnh đến sự im lặng này của các tác giả cổ đại, và lập luận từ đó rằng tác giả thực sự phải là Heron the Younger hoặc một nhà văn nào đó gần đây hơn Heron the Elder. Nhưng không có bằng chứng đáng tin cậy nào được tìm thấy rằng thực sự tồn tại một nhà toán học thứ hai tên là Heron.

“Dioptra,” Venturi nói, là những dụng cụ có rất giống với máy kinh

vĩ hiện đại của chúng ta. Cuốn sách *Dioptra* là một chuyên luận về trắc địa chứa các giải pháp, với sự trợ giúp của các công cụ này, của một số lượng lớn các câu hỏi trong hình học, chẳng hạn như tìm khoảng cách giữa hai điểm, trong đó chỉ có một điểm có thể truy cập được hoặc giữa hai điểm các điểm có thể nhìn thấy nhưng cả hai đều không thể tiếp cận được; từ một điểm cho trước vẽ một đường vuông góc với một đường thẳng không tới được; để tìm sự khác biệt của mức độ giữa hai điểm; để đo diện tích của một lĩnh vực mà không cần nhập nó.

Heron là một nhà khảo sát thực tế. Điều này có thể giải thích cho thực tế là các bài viết của ông có rất ít điểm tương đồng với các bài viết của các tác giả Hy Lạp, những người cho rằng việc áp dụng hình học vào khảo sát là làm hạ thấp khoa học. Đặc điểm hình học của ông không phải là người Hy Lạp, mà là người Ai Cập. Thực tế này càng đáng ngạc nhiên hơn khi chúng ta biết rằng Heron đã thể hiện sự quen thuộc của mình với Euclid bằng cách viết một bài bình luận về *Elements*. [21] Một số công thức của Heron chỉ ra một nguồn gốc Ai Cập cổ đại. Do đó, bên cạnh công thức chính xác ở trên cho diện tích của một tam giác tính theo các cạnh của nó, Heron đưa ra công thức $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b}{2}$, công thức này cho kết quả một sự tương đồng nổi bật với công thức $\frac{a_1+a_2}{2}\times\frac{b_1+b_2}{2}$ để tìm diện tích của một hình tứ giác, được tìm thấy trong các bản khắc Edfu. Hơn nữa, có những điểm tương đồng giữa các tác phẩm của Heron và giấy cói cổ đại của Ahmes. Do đó, Ahmes chỉ sử dụng phân số đơn vị; Heron sử dụng chúng thường xuyên hơn các phân số khác. Giống như Ahmes và các linh mục ở Edfu, Heron chia những hình phức tạp thành những hình đơn giản hơn bằng cách vẽ các đường phụ trợ; giống như họ, anh ấy thể hiện, xuyên suốt, một niềm yêu thích đặc biệt đối với hình thang cân.

Các tác phẩm của Heron thỏa mãn nhu cầu thiết thực, và vì lý do đó đã được các dân tộc khác vay mượn rộng rãi. Chúng tôi tìm

thấy dấu vết của chúng ở Rome, ở phương Tây trong thời Trung cổ và thậm chí ở Ấn Độ.

Geminus xứ Rhodes (khoảng 70 TCN) đã xuất bản một tác phẩm thiên văn vẫn còn tồn tại. Ông cũng viết một cuốn sách, hiện đã thất lạc, về *Sự sắp xếp của toán học*, trong đó có nhiều thông báo có giá trị về lịch sử ban đầu của toán học Hy Lạp. Proclus và Eutocius thường trích dẫn nó. **Theodosius** xứ Tripolis là là tác giả của một cuốn sách không mấy hay ho về hình học của khối cầu. **Dionysodorus** xứ Amisus ở Pontus đã áp dụng giao điểm của một parabol và hyperbola để giải một bài toán mà Archimedes, trong *Quả cầu và Hình trụ* của ông, đã để lại không đầy đủ. Vấn đề là "cắt một hình cầu sao cho các phân đoạn của nó theo một tỷ lệ nhất định."

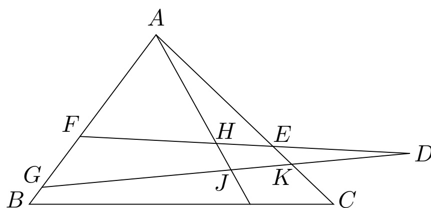
Bây giờ chúng ta đã phác họa sự tiến bộ của hình học cho đến thời Chúa Kitô. Thật không may, có rất ít thông tin về lịch sử hình học từ thời Apollonius đến đầu kỷ nguyên Cơ đốc giáo. Tên của khá nhiều nhà hình học đã được đề cập, nhưng rất ít công trình của họ hiện còn tồn tại. Tuy nhiên, chắc chắn rằng không có nhà toán học thiên tài thực sự nào từ Apollonius đến Ptolemy, ngoại trừ Hipparchus và có lẽ là Heron.

Trường phái Alexandrian thứ hai

Sự kết thúc của triều đại Lagides cai trị Ai Cập từ thời Ptolemy Soter, người xây dựng Alexandria, trong 300 năm; sự sáp nhập của Ai Cập vào Đế chế La Mã; quan hệ thương mại chặt chẽ hơn giữa các dân tộc ở phương Đông và phương Tây; sự suy giảm dần dần của chủ nghĩa ngoại giáo và sự lan rộng của Cơ đốc giáo,—những sự kiện này có ảnh hưởng sâu rộng đến sự tiến bộ của khoa học, mà sau đó có trụ sở tại Alexandria. Alexandria trở thành một cửa hàng thương mại và trí tuệ. Thương nhân của tất cả các quốc gia gặp nhau trên những con phố sầm uất của cô, và trong Thư viện, bảo tàng, giảng đường tráng lệ của cô, các học giả từ phương Đông lẫn

lộn với những học giả từ phương Tây; Người Hy Lạp bắt đầu nghiên cứu các nền văn học cũ hơn và so sánh chúng với nền văn học của họ. Do sự trao đổi ý kiến này, triết học Hy Lạp đã trở nên hợp nhất với triết học của phương Đông. Neo-Pythagoreism và Neo-Platonism là tên của các hệ thống sửa đổi. Những điều này, trong một thời gian, đối lập với Cơ đốc giáo. Việc nghiên cứu chủ nghĩa Platon và chủ nghĩa thần bí Pythagore đã dẫn đến sự hồi sinh của lý thuyết số. Có lẽ sự phân tán của người Do Thái và sự giới thiệu của họ đối với việc học tiếng Hy Lạp đã giúp mang lại sự hồi sinh này. Lý thuyết số đã trở thành một nghiên cứu yêu thích. Dòng nghiên cứu toán học mới này đã mở ra cái mà chúng ta có thể gọi là một trường phái mới. Không còn nghi ngờ gì nữa, ngay cả bây giờ hình học vẫn tiếp tục là một trong những nghiên cứu quan trọng nhất trong khóa học của người Alexandrian. Trường phái Alexandrian thứ hai này có thể được cho là bắt đầu từ kỷ nguyên Cơ đốc giáo. Nó trở nên nổi tiếng nhờ tên của Claudius Ptolemæus, Diophantus, Pappus, Theon of Smyrna, Theon of Alexandria, Iamblichus, Porphyrius và những người khác.

Bên cạnh những thứ này, chúng ta có thể đặt **Serenus** của Antissa, vì đã ít nhiều có liên hệ với ngôi trường mới này. Ông viết về tiết diện của hình nón và hình trụ trong hai cuốn sách, một trong số đó chỉ đề cập đến tiết diện tam giác của hình nón qua đỉnh. Ông đã giải bài toán, "cho trước một hình nón (hình trụ), để tìm một hình trụ (hình nón), sao cho thiết diện của cả hai bởi cùng một mặt phẳng cho các hình elip giống nhau." Định lý sau đây được quan tâm đặc biệt, là nền tảng của nó của lý thuyết hiện đại về sóng hài: If from D we vẽ DF, cắt tam giác ABC, và chọn H trên đó, sao cho $DE : DF = EH : HF$, và nếu chúng ta vẽ đường thẳng AH, thì mọi đường ngang qua D, chẳng hạn như DG, sẽ được chia cho AH sao cho



$DK : DG = KJ : JG$. **Menelaus** của Alexandria (khoảng 98 SCN) là tác giả của *Sphærica*, một tác phẩm hiện có bằng tiếng Do Thái và tiếng Ả Rập, nhưng không phải bằng tiếng Hy Lạp. Trong đó, ông chứng minh các định lý về sự đồng dạng của các tam giác cầu, và mô tả các tính chất của chúng theo cách tương tự như Euclid xử lý các tam giác phẳng. Trong đó, người ta cũng tìm thấy các định lý tổng ba cạnh của một tam giác cầu nhỏ hơn một đường tròn lớn và tổng ba góc vượt quá hai góc vuông. Nổi tiếng là hai định lý của ông về mặt phẳng và tam giác cầu. Một tam giác trên mặt phẳng là, "nếu ba cạnh bị cắt bởi một đường thẳng, thì tích của ba đoạn không có cực trị chung bằng tích của ba đoạn còn lại." Carnot lừng lẫy đưa ra mệnh đề này, được gọi là 'bổ đề của Menelaus', cơ sở cho lý thuyết về đường ngang của ông. Định lý tương ứng cho các tam giác cầu, cái gọi là "lượng tử giới tính quy luật', thu được từ phần trên bằng cách đọc "các dây cung của ba đoạn thẳng được nhân đôi" thay cho "ba đoạn thẳng."

Claudius Ptolemæus, một nhà thiên văn học nổi tiếng, là người gốc Ai Cập. Không có gì được biết về lịch sử cá nhân của ông ngoại trừ việc ông phát triển rực rỡ ở Alexandria vào năm 139 SCN và rằng ông ấy đã thực hiện những quan sát thiên văn sớm nhất được ghi lại trong các tác phẩm của mình, vào năm 125 SCN, lần gần nhất là vào năm 151 SCN. Công trình chính của ông là *Syntaxis Mathematica* (hoặc *Almagest*, như người Ả Rập gọi it) và *Geographica*, cả hai đều hiện còn tồn tại. công trình trước đây một phần dựa trên nghiên cứu của riêng ông, nhưng chủ yếu dựa trên nghiên cứu của Hipparchus. Ptolemy dường như không nhiều như một nhà điều tra độc lập, với tư cách là một người sửa lỗi và cải tiến công việc của những người tiền nhiệm vĩ đại của ông. *Almagest* tạo thành nền tảng của tất cả khoa học thiên văn cho đến Copernicus. Ý tưởng cơ bản của hệ thống của ông, "Hệ thống Ptolemaic, " là trái đất nằm ở trung tâm của vũ trụ, và rằng mặt trời và các hành tinh quay quanh trái đất. Ptolemy đã có đóng góp đáng kể cho toán học. Ông đã tạo ra, để sử

dụng trong thiên văn, một *lượng giác* hoàn hảo về hình thức. Nền tảng của ngành khoa học này được đặt bởi những người nổi tiếng Hà mã.

Almagest có trong 13 cuốn sách. Chương 9 của cuốn sách đầu tiên cho biết cách tính bảng hợp âm. Vòng tròn được chia thành 360 độ, mỗi độ giảm đi một nửa. Đường kính được chia thành 120 phần; mỗi phần này thành 60 phần, các phần này lại được chia thành 60 phần nhỏ hơn. Trong tiếng Latinh, những phần này được gọi là *partes minutæ primæ* và *partes minutæ secundæ*. Do đó, tên của chúng tôi, 'phút' và 'giây.'[3] Phương pháp phân chia vòng tròn theo hệ lục thập phân có nguồn gốc từ người Babylon và được Geminus và Hipparchus biết đến. Nhưng Phương pháp tính hợp âm của Ptolemy có vẻ nguyên bản đối với ông. Đầu tiên, ông chứng minh mệnh đề, hiện được thêm vào Euclid VI. (D), rằng "hình chữ nhật chứa bởi các đường chéo của một hình tứ giác nội tiếp trong một đường tròn thì bằng cả hai đường chéo các hình chữ nhật chứa các cạnh đối diện của nó." Sau đó, ông chỉ ra cách tìm từ các dây cung của hai cung, các dây cung của tổng và hiệu của chúng, và từ dây cung của bất kỳ cung nào tìm được một nửa của nó. Ông đã áp dụng những định lý này để tính toán các bảng hợp âm của mình. Chứng minh của các định lý này rất đẹp.

Một chương khác của cuốn sách đầu tiên trong *Almagest* dành cho *lượng giác*, và đặc biệt là *spherical* lượng giác. Ptolemy đã chứng minh 'bổ đề Menelaus,' và cũng là 'quy luật lượng tử giới tính.' Dựa trên những đề xuất này, ông đã xây dựng lượng giác của mình. Định lý cơ bản của lượng giác phẳng, rằng hai cạnh của một tam giác đối với nhau như dây cung của hai cung đo các góc đối diện với hai cạnh đó, không được ông phát biểu rõ ràng, nhưng được hàm chứa trong các định lý khác. Đầy đủ hơn là các mệnh đề trong lượng giác cầu.

Thực tế là lượng giác được phát triển không phải vì mục đích riêng của nó, mà để hỗ trợ nghiên cứu thiên văn, giải thích một thực

tế khá đáng ngạc nhiên là lượng giác cầu tồn tại ở trạng thái phát triển sớm hơn lượng giác phẳng.

Những cuốn sách còn lại của *Almagest* là về thiên văn học. Ptolemy đã viết những tác phẩm khác ít hoặc không liên quan gì đến toán học, ngoại trừ một tác phẩm về hình học. Đoạn trích từ cuốn sách này, do Proclus thực hiện, chỉ ra rằng Ptolemy đã không coi tiên đề song song của Euclid là hiển nhiên, và rằng Ptolemy là người đầu tiên trong hàng dài các nhà hình học từ thời cổ đại cho đến thời đại của chúng ta, những người đã làm việc cực nhọc trong nỗ lực vô vọng để chứng minh điều đó.

Hai nhà toán học nổi bật trong thời gian này là Nicomachus và Theon xứ Smyrna. Môn học yêu thích của họ là lý thuyết về các con số. Các cuộc điều tra trong khoa học này lên đến đỉnh điểm sau này trong đại số của Diophantus. Nhưng không có nhà hình học quan trọng nào xuất hiện sau Ptolemy trong 150 năm. Người duy nhất của khoảng trống dài này là **Sextus Julius Africanus**, người đã viết một một tác phẩm không quan trọng về hình học áp dụng cho nghệ thuật chiến tranh, có tựa đề *Cestes* .

Pappus, có lẽ sinh khoảng năm 340 SCN, tại Alexandria, là nhà toán học vĩ đại cuối cùng của trường phái Alexandrian. Thiên tài của ông thua kém Archimedes, Apollonius và Euclid, những người đã phát triển vượt bậc 500 năm trước. Nhưng, như ông đã sống, vào thời kỳ mà sự quan tâm đến hình học đang giảm sút, ông đã vượt lên trên những người cùng thời với mình "giống như đỉnh Teneriffa trên Đại Tây Dương." Ông là tác giả của một *Bình luận trên Almagest*, một *Bình luận về các nguyên tố của Euclid*, một *Bình luận về Analemma của Diodorus*,—một nhà văn của mà không ai biết đến. Tất cả những tác phẩm này đều bị thất lạc. Proclus, có lẽ trích dẫn từ *Bình luận về Euclid*, nói rằng Pappus phản đối tuyên bố rằng một góc bằng một góc vuông thì bản thân nó luôn là một góc vuông.

Tác phẩm duy nhất của Pappus còn tồn tại là *Bộ sưu tập toán học* của ông. Điều này ban đầu có trong tám cuốn sách, nhưng phần đầu tiên và một phần của cuốn thứ hai hiện đã bị thất lạc. *Bộ sưu tập toán học* dường như đã được Pappus viết để cung cấp cho các nhà hình học cùng thời với ông một phân tích ngắn gọn về các công trình toán học khó nhất và để tạo điều kiện thuận lợi cho việc nghiên cứu chúng bằng các bổ đề giải thích. Nhưng những bổ đề này được lựa chọn rất tự do và thường có rất ít hoặc không có mối liên hệ nào với chủ đề hiện có. Tuy nhiên, anh ấy đưa ra những bản tóm tắt rất chính xác về những tác phẩm mà anh ấy xử lý. *Bộ sưu tập toán học* là vô giá đối với chúng tôi vì lượng thông tin phong phú mà nó cung cấp về các chuyên luận khác nhau của các nhà toán học Hy Lạp hàng đầu, hiện đã thất lạc. Các nhà toán học của thế kỷ trước cho rằng có thể khôi phục lại các công trình đã mất từ *résumé* chỉ bằng một mình Pappus.

Bây giờ chúng ta sẽ trích dẫn định lý quan trọng hơn trong *Bộ sưu tập toán học* được cho là nguyên bản của Pappus. Trước hết, xếp hạng định lý tao nhã được khám phá lại bởi *Guldin*, hơn 1000 năm sau, tập sách được tạo ra bởi vòng quay của một đường cong phẳng nằm hoàn toàn trên một phía của trục, bằng diện tích của đường cong nhân với chu vi được mô tả bởi trọng tâm của nó. Pappus cũng chứng minh rằng trọng tâm của một tam giác là trọng tâm của một tam giác khác có các đỉnh nằm trên các cạnh của tam giác thứ nhất và chia ba cạnh của nó theo cùng một tỷ lệ. Trong cuốn sách thứ tư là những mệnh đề mới và xuất sắc về hình tứ giác cho thấy sự quen thuộc sâu sắc với các bề mặt cong. Anh ta tạo ra phương thức quadratrix như sau: Vẽ một đường xoắn ốc trên một hình trụ tròn bên phải; sau đó các đường vuông góc với trục của hình trụ được vẽ từ mỗi điểm của đường xoắn ốc tạo thành bề mặt của một vít. Một mặt phẳng đi qua một trong các đường vuông góc này, tạo một góc thuận tiện với đáy của hình trụ, cắt bề mặt trục vít theo một đường cong, hình chiếu trực giao của nó trên đáy là *tứ phương*. Phương

thức tạo thứ hai là không kém phần đáng ngưỡng mộ: Nếu chúng ta tạo đường xoắn ốc của Archimedes làm đáy của một hình trụ bên phải, và tưởng tượng một hình nón xoay có trục của nó là một cạnh của hình trụ bên phải. hình trụ đi qua điểm ban đầu của hình xoắn ốc thì hình nón này cắt hình trụ theo một đường cong kép. Các đường vuông góc với trục được vẽ qua mọi điểm trong đường cong này tạo thành bề mặt của một cái vít mà Pappus ở đây gọi là *bề mặt plectoidal*. Một mặt phẳng đi qua một trong các đường vuông góc ở bất kỳ góc thuận tiện nào sẽ cắt bề mặt đó theo một đường cong có hình chiếu trực giao lên mặt phẳng của hình xoắn ốc là *quadratrix* cần thiết. Pappus xem xét các đường cong kép còn xa hơn nữa. Anh ta tạo ra một *xoắn ốc hình cầu* bằng một điểm chuyển động đều dọc theo chu vi của một đường tròn lớn của một hình cầu, trong khi chính đường tròn lớn đó quay đều quanh đường kính của nó. Sau đó, ông tìm thấy diện tích của phần đó trên bề mặt của quả cầu được xác định bởi đường xoắn ốc hình cầu, "một lời khen ngợi khẳng định sự ngưỡng mộ sống động hơn, nếu chúng ta xem xét điều đó, mặc dù toàn bộ bề mặt của quả cầu đã được biết đến từ thời Archimedes, để đo các phần của chúng, chẳng hạn như tam giác cầu, lúc đó và trong một thời gian dài sau đó là một bài toán chưa có lời giải." [3] Một câu hỏi đã được Descartes và Newton đưa ra làm nổi bật là "bài toán của Pappus." Cho một số đường thẳng trong một mặt phẳng, để tìm quỹ tích của một điểm sao cho khi các đường vuông góc (hay tổng quát hơn, các đường thẳng tạo thành các góc đã cho) được vẽ từ nó đến các đường thẳng đã cho, thì tích của một số đường thẳng nhất định trong số chúng sẽ bằng một tỷ lệ nhất định với tích của các đường thẳng còn lại. Điều đáng chú ý là chính Pappus là người đầu tiên tìm ra tiêu điểm của parabol, đề xuất việc sử dụng đường thẳng và đề xuất lý thuyết về sự biến đổi của các điểm. Anh ấy đã giải được bài toán vẽ qua ba điểm nằm trên cùng một đường thẳng, ba đường thẳng này sẽ tạo thành một tam giác nội tiếp trong một đường tròn cho trước. [3] From *Mathematical Collection* nhiều định

lý khó không kém hơn có thể được trích dẫn vốn là nguyên bản của Pappus theo như chúng ta biết. Tuy nhiên, cần lưu ý rằng trong ba trường hợp, người ta biết rằng anh ta đã sao chép các định lý mà không công nhận, và rằng anh ta có thể đã làm điều tương tự trong những trường hợp khác mà chúng ta không có dữ liệu để xác định người khám phá thực sự.

Khoảng thời gian Pappus sống **Theon** xứ Alexandria. Anh ấy đã mang ra một ấn bản *Elements* của Euclid với các ghi chú, mà có lẽ anh ấy được sử dụng như một cuốn sách giáo khoa trong các lớp học của mình. Bài bình luận của ông về *Almagest* có giá trị đối với nhiều thông báo lịch sử, và đặc biệt đối với các mẫu số học Hy Lạp mà nó chứa đựng. Con gái của Theon **Hypatia**, một phụ nữ nổi tiếng vì vẻ đẹp và sự khiêm tốn là giáo viên danh tiếng cuối cùng của người Alexandrian, và được cho là một triết gia và nhà toán học tài ba hơn cha cô. Những ghi chú của cô ấy về các tác phẩm của Diophantus và Apollonius đã bị thất lạc. Cái chết bi thảm của bà vào năm 415 SCN được miêu tả sống động trong *Hypatia* của Kingsley.

Kể từ bây giờ, toán học không còn được trau dồi ở Alexandria. Chủ đề hàng đầu trong suy nghĩ của đàn ông là thần học Cơ đốc giáo. Ngoại giáo biến mất, và cùng với nó là học ngoại giáo. Trường phái Neo-Platonic ở Athens đã phải vật lộn trong một thế kỷ nữa. Proclus, Isidorus và những người khác đã duy trì "chuỗi vàng của sự kế vị Platon." **Proclus**, người kế vị của Syrianus, tại Athenian trường, đã viết một bài bình luận về *Elements* của Euclid. Chúng tôi chỉ sở hữu điều đó trong cuốn sách đầu tiên, nó có giá trị về thông tin mà nó chứa đựng về lịch sử hình học. **Damascius** của Damascus, học trò của Isidorus, hiện được cho là tác giả của cuốn sách thứ mười lăm của Euclid. Một học trò khác của Isidorus là **Eutocius** của Ascalon, nhà bình luận của Apollonius và Archimedes. **Simplicius** đã viết một bài bình luận về **De Cœlo** của Aristotle. Vào năm 529, Justinian, không tán thành việc học của người ngoại đạo, cuối cùng đã đóng cửa các trường học ở Athens theo sắc lệnh của hoàng gia.

Theo quy luật, các nhà hình học trong 500 năm qua cho thấy sự thiếu năng lực sáng tạo. Họ là những nhà bình luận hơn là những người khám phá.

Các đặc điểm chính của hình học cổ đại là:—

(1) Sự rõ ràng và xác định tuyệt vời của các khái niệm và sự chặt chẽ hợp lý gần như hoàn hảo của các kết luận.

(2) Hoàn toàn thiếu các nguyên tắc và phương pháp chung. Hình học cổ đại chắc chắn là *đặc biệt*. Do đó, của người Hy Lạp không có phương pháp chung để vẽ các tiếp tuyến. "Việc xác định của các tiếp tuyến với ba mặt cắt hình nón không cung cấp bất kỳ sự hỗ trợ hợp lý nào để vẽ tiếp tuyến với bất kỳ đường cong mới nào khác, chẳng hạn như hình nón, cissoid, v.v." [15] Trong việc chứng minh một định lý, đối với các nhà hình học cổ đại, có nhiều trường hợp khác nhau yêu cầu chứng minh riêng biệt cũng như có nhiều vị trí khác nhau cho các đường thẳng. Các nhà hình học vĩ đại nhất cho rằng cần phải xử lý tất cả các trường hợp có thể một cách độc lập với nhau và chứng minh từng trường hợp một cách đầy đủ như nhau. Để nghĩ ra các phương pháp mà tất cả các trường hợp khác nhau có thể được xử lý bằng một cú đánh, đã vượt quá khả năng của người xưa. "Nếu chúng ta so sánh một vấn đề toán học với một tảng đá khổng lồ mà chúng ta muốn thâm nhập vào bên trong, thì công việc của các nhà toán học Hy Lạp đối với chúng ta giống như công việc của một người thợ đẽo đá mạnh mẽ, với cái đục và cái búa, bắt đầu bằng sự kiên trì không biết mệt mỏi. , từ bên ngoài, từ từ đập vỡ tảng đá thành từng mảnh; nhà toán học hiện đại xuất hiện giống như một người thợ mỏ xuất sắc, người đầu tiên đục một vài đoạn xuyên qua tảng đá, từ đó anh ta phá vỡ nó thành từng mảnh bằng một vụ nổ cực mạnh và mang ra ánh sáng những kho báu bên trong." [16]

SỐ HỌC HY LẠP

Các nhà toán học Hy Lạp có thói quen phân biệt giữa *khoa học* của các con số và *nghệ thuật* của phép tính. Cái trước họ gọi là *arithmetica*, cái sau là *logistica*. Việc vẽ ra sự khác biệt này giữa hai người là rất tự nhiên và đúng đắn. Sự khác biệt giữa chúng được đánh dấu như sự khác biệt giữa lý thuyết và thực hành. Trong số các nhà ngụy biện, nghệ thuật tính toán là một nghiên cứu yêu thích. Mặt khác, của Plato dành sự quan tâm đáng kể đến số học triết học, nhưng coi phép tính là một nghệ thuật thô tục và trẻ con.

Khi phác thảo lịch sử tính toán của người Hy Lạp, trước tiên chúng ta sẽ trình bày ngắn gọn về phương thức đếm và viết số của người Hy Lạp. Giống như người Ai Cập và các quốc gia phương Đông, những người Hy Lạp đầu tiên đếm trên đầu ngón tay hoặc với những viên sỏi. Trong trường hợp số lượng lớn, các viên sỏi có thể được sắp xếp theo các đường thẳng đứng song song. Những viên sỏi ở dòng thứ nhất biểu thị hàng đơn vị, những viên ở hàng chục thứ hai, những viên ở hàng trăm thứ ba, v.v. Sau đó, các khung được sử dụng, trong đó các chuỗi hoặc dây thay thế cho các đường kẻ. Theo truyền thống, Pythagoras, người đã đi du lịch ở Ai Cập và có lẽ là ở Ấn Độ, lần đầu tiên đưa loại nhạc cụ quý giá này vào Hy Lạp. *Abacus*, như tên gọi của nó, đã tồn tại giữa các dân tộc khác nhau và vào những thời điểm khác nhau, ở những giai đoạn hoàn thiện khác nhau. Bàn tính vẫn được người Trung Quốc sử dụng dưới cái tên *Swan-pan*. Chúng tôi không có thông tin cụ thể về cách bàn tính Hy Lạp trông như thế nào hoặc nó được sử dụng như thế nào. Boethius nói rằng Pythagore đã sử dụng bàn tính với chín ký hiệu nhất định được gọi là *apices*, có hình dạng giống với chín ký hiệu "Ả Rập các con số." Nhưng tính đúng đắn của khẳng định này là chủ đề bị nghi ngờ nghiêm trọng.

Các ký hiệu số cổ nhất của Hy Lạp được gọi là *Dấu hiệu Herodianus* (đặt theo tên của Herodianus, một nhà ngữ pháp

Byzantine về khoảng 200 SCN, người đã mô tả chúng). Những dấu hiệu này xuất hiện thường xuyên trong bia ký của người Athen và vì lý do đó, hiện nay thường được gọi là *Gác mái*. Vì một số lý do không rõ, các ký hiệu này sau đó đã được thay thế bằng *chữ số trong bảng chữ cái*, trong mà các chữ cái trong bảng chữ cái Hy Lạp đã được sử dụng, cùng với ba chữ cái lạ và cổ ϛ, ϙ, và ϡ, và ký hiệu **M**. Sự thay đổi này rõ ràng là tồi tệ hơn, vì các chữ số Attic cũ ít nặng nề hơn đối với bộ nhớ, vì chúng chứa ít ký hiệu hơn và được điều chỉnh tốt hơn để thể hiện phép loại suy trong các phép toán số. Bảng sau đây hiển thị các chữ số trong bảng chữ cái Hy Lạp và các giá trị tương ứng của chúng:—

α	β	γ	δ	ϵ	ϛ	ζ	η	θ	ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90

ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	ϡ	$_{,}\alpha$	$_{,}\beta$	$_{,}\gamma$	etc.
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	2000	3000	

M	$\overset{\beta}{\mathbf{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathbf{M}}$	etc.
10,000	20,000	30,000	

Cần lưu ý rằng ở mức 1000, bảng chữ cái được bắt đầu lại từ đầu, nhưng, để tránh nhầm lẫn, một nét hiện được đặt trước chữ cái và thường ở dưới nó một chút. Một đường kẻ ngang được vẽ trên một số dùng để phân biệt nó dễ dàng hơn với các từ. Hệ số của **M** đôi khi được đặt trước hoặc sau thay vì trên **M**. Do đó, 43,678 được viết là $\overline{\delta \mathrm{M}_{,}\gamma\chi o\eta}$. Có thể thấy rằng người Hy Lạp không có số không.

Các phân số được biểu thị bằng cách viết tử số đầu tiên được đánh dấu bằng một dấu, sau đó mẫu số được đánh dấu bằng hai dấu và viết hai lần. Do đó, $\iota\gamma'\kappa\theta''\kappa\theta'' = \frac{13}{29}$. Trong trường hợp các phân số có tử số bằng một thì α' được bỏ qua và mẫu số chỉ được viết một lần. Do đó $\mu\delta'' = \frac{1}{44}$.

Các nhà văn Hy Lạp hiếm khi đề cập đến việc tính toán bằng các chữ số trong bảng chữ cái. Phép cộng, phép trừ và thậm chí phép nhân có thể được thực hiện trên bàn tính. Các nhà toán học chuyên

gia có thể đã sử dụng các ký hiệu. Do đó, Eutocius, một nhà bình luận của thế kỷ thứ sáu sau Công nguyên, đưa ra rất nhiều phép nhân mà sau đây là một ví dụ: [6]—

$\overline{\sigma\xi\epsilon}$	2 6 5
$\overline{\sigma\xi\epsilon}$	2 6 5
$\overset{\delta}{\mathbf{M}}\,\overset{\alpha}{\mathbf{M}}\ {}_{,}\beta\ {}_{,}\alpha$	40000, 12000, 1000
$\overset{\alpha}{\mathbf{M}}\ {}_{,}\beta\ {}_{,}\overline{\gamma\chi}\ \overline{\tau}$	12000, 3600, 300
${}_{,}\alpha\ \overline{\tau}\ \overline{\kappa\epsilon}$	1000, 300, 25
$\overset{\zeta}{\mathbf{M}}\ \overline{\sigma\kappa\epsilon}$	70225

Hoạt động được giải thích đầy đủ bằng các chữ số hiện đại được thêm vào. Trong trường hợp hỗn số, quá trình này còn vụng về hơn. Sự phân chia được tìm thấy trong bài bình luận của Theon of Alexandria về *Almagest*. Như có thể được mong đợi, quá trình này dài và tẻ nhạt.

Chúng ta đã thấy trong hình học rằng các nhà toán học cao cấp hơn thường có cơ hội rút ra căn bậc hai. Do đó, Archimedes trong *Phương trình đường tròn* của mình đưa ra một số lượng lớn các căn bậc hai. Ví dụ, anh ấy tuyên bố rằng $\sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ và $\sqrt{3} > \frac{265}{153}$, nhưng anh ấy không đưa ra manh mối nào về phương pháp mà ông đã thu được những xấp xỉ này. Không phải ngẫu nhiên mà các nhà toán học Hy Lạp đầu tiên tìm ra căn bậc hai chỉ bằng phép thử. Eutocius nói rằng phương pháp trích xuất nó được đưa ra bởi Heron, Pappus, Theon và những người bình luận khác trên *Almagest*. Theon's là phương pháp cổ xưa duy nhất mà chúng ta biết đến. Nó giống như cái được sử dụng ngày nay, ngoại trừ việc phân số thập phân được sử dụng thay cho trong số thập phân của chúng ta. Phương thức của thủ tục thực sự là gì khi các phân số lục thập phân không được sử dụng, đã là chủ đề phỏng đoán của nhiều nhà văn hiện đại. [17]

Đáng quan tâm, liên quan đến biểu tượng số học, là *Sand-Counter* (Arenarius), một bài viết của **Archimedes** gửi Gelon, vua của Syracuse. Trong đó, Archimedes chỉ ra rằng mọi người đã sai lầm khi nghĩ rằng cát không thể đếm được, hoặc nếu nó có thể đếm được, thì con số không thể được biểu thị bằng các ký hiệu số học. Ông chỉ ra rằng số lượng hạt trong một đống cát không chỉ lớn bằng toàn bộ

trái đất mà còn lớn bằng toàn bộ vũ trụ, có thể được biểu thị bằng số học. Giả sử rằng hạt cát trị giá 10.000 đô la đủ để tạo ra một chất rắn nhỏ có kích thước bằng hạt anh túc và đường kính của hạt anh túc không nhỏ hơn $\frac{1}{40}$ phần ngón tay chiều rộng; giả sử xa hơn, rằng đường kính của vũ trụ (được cho là kéo dài đến mặt trời) nhỏ hơn 10.000 đô la đường kính của trái đất và rằng đường kính của trái đất nhỏ hơn 1.000.000 đô la stadia, Archimedes tìm thấy một con số vượt quá số lượng hạt của Trái đất. cát trong quả cầu của vũ trụ. Anh ấy còn đi xa hơn nữa. Giả sử vũ trụ vươn tới các ngôi sao cố định, ông thấy rằng quả cầu, có khoảng cách từ tâm trái đất đến các ngôi sao cố định bằng bán kính của nó, sẽ chứa một số hạt cát nhỏ hơn 1000 vô số của bát phân thứ tám. Theo ký hiệu của chúng tôi, số này sẽ là 10^{63} hoặc 1 với 63 các mật mã sau nó. Khó có thể nghi ngờ rằng một đối tượng mà Archimedes đã xem xét khi thực hiện tính toán này là sự cải tiến của biểu tượng Hy Lạp. Người ta không biết liệu ông có phát minh ra một ký hiệu ngắn nào đó để biểu diễn con số trên hay không.

Chúng tôi đánh giá từ những đoạn trong cuốn sách thứ hai của Pappus rằng Apollonius đã đề xuất một cải tiến trong phương pháp viết số của Hy Lạp, nhưng chúng tôi không biết bản chất của nó . Vì vậy, chúng ta thấy rằng người Hy Lạp chưa bao giờ sở hữu lợi ích của một biểu tượng rõ ràng, toàn diện. Niềm vinh dự được cống hiến như vậy cho thế giới, một lần mãi mãi, đã được số phận trớ trêu dành cho một người Ấn Độ vô danh ở một thời kỳ không xác định, và chúng tôi không biết phải cảm ơn ai vì một phát minh có tầm quan trọng như vậy đối với sự tiến bộ chung của trí thông minh. [6]

Chuyển từ chủ đề *logistica* sang chủ đề *arithmetica*, trước tiên chúng ta chú ý đến khoa học về các con số của **Pythagoras**. Trước khi thành lập trường học của mình, Pythagoras đã theo học trong nhiều năm dưới sự hướng dẫn của các linh mục Ai Cập và làm quen với toán học và thuyết thần bí Ai Cập. Nếu ông từng ở Babylon, như một số nhà chức trách tuyên bố, thì ông có thể đã học ký hiệu lục

phân trong sử dụng ở đó; ông ấy có thể đã thu thập được kiến thức đáng kể về lý thuyết tỷ lệ, và có thể đã tìm thấy một số lượng lớn các quan sát thiên văn thú vị. Bị bão hòa với tinh thần suy đoán lúc bấy giờ tràn ngập tâm trí người Hy Lạp, ông ấy đã cố gắng khám phá ra một nguyên tắc nào đó của sự đồng nhất trong vũ trụ. Trước ông, các nhà triết học của trường Ionic đã tìm kiếm nó trong vật chất của sự vật; Pythagoras đã tìm kiếm nó trong cấu trúc của sự vật. Ông đã quan sát nhiều mối quan hệ số hoặc phép loại suy giữa các số và các hiện tượng của vũ trụ. Tin chắc rằng chính ở những con số và mối quan hệ của chúng mà ông đã tìm thấy nền tảng của triết học chân chính, ông đã tiến hành truy tìm nguồn gốc của tất cả. những thứ thành những con số. Do đó, ông quan sát thấy rằng các dây âm nhạc có độ dài bằng nhau được căng bởi các trọng lượng có tỷ lệ $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, được tạo ra các quãng là quãng tám, quãng năm và quãng bốn. Do đó, hòa âm phụ thuộc vào tỷ lệ âm nhạc; nó không là gì ngoài một mối quan hệ số bí ẩn. Ở đâu có sự hài hòa, ở đó có những con số. Do đó, trật tự và vẻ đẹp của vũ trụ bắt nguồn từ những con số. Có bảy quãng trong thang âm nhạc, và cũng có bảy hành tinh băng qua các tầng trời. Các mối quan hệ số tương tự làm cơ sở cho cái trước phải làm cơ sở cho cái sau. Nhưng ở đâu có số, ở đó có sự hài hòa. Do đó, đôi tai tâm linh của anh ấy đã nhận thấy trong các chuyển động của hành tinh một 'sự hài hòa của các quả cầu' tuyệt vời. Những người theo chủ nghĩa Pythagore đã đầu tư những con số cụ thể với những thuộc tính đặc biệt. Như vậy *one* là bản chất của sự vật; nó là một con số tuyệt đối; do đó nguồn gốc của tất cả các con số và do đó của tất cả mọi thứ. *Bốn* là con số hoàn hảo nhất và theo một cách thần bí nào đó được hình thành để tương ứng với linh hồn con người. Philolaus tin rằng 5 là nguyên nhân của màu sắc, 6 của cái lạnh, 7 của tâm trí, sức khỏe và ánh sáng, 8 của tình yêu và tình bạn. [6] Trong các tác phẩm của Plato là bằng chứng của niềm tin tương tự vào quan hệ tôn giáo của các con số. Ngay cả Aristotle cũng nhắc đến những ưu điểm của số.

Người ta đã nói đủ về những suy đoán thần bí này để cho thấy họ phải tạo ra và duy trì mối quan tâm sôi nổi như thế nào đối với toán học. Họ đã mở ra những con đường tìm hiểu toán học mà nếu không thì có lẽ đã bị đóng cửa vào thời điểm đó.

Pythagore đã phân loại các số thành số lẻ và số chẵn. Họ quan sát thấy rằng tổng của dãy số lẻ từ 1 đến $2n+1$ luôn là một số chính phương hoàn chỉnh và bằng cách cộng các số chẵn sẽ tạo ra dãy 2, 6, 12, 20, trong mà mỗi số có thể được phân tách thành hai thừa số khác nhau bằng đơn vị. Do đó, $6 = 2\cdot 3$, $12 = 3\cdot 4$, v.v. Những con số sau này được coi là đủ quan trọng để nhận được tên riêng của *heteromecic* (không bằng nhau). [7] Numbers có dạng $\frac{n(n+1)}{2}$ được gọi là *triangular*, bởi vì chúng luôn có thể được sắp xếp như vậy, ⁘. Các số bằng tổng tất cả các thừa số có thể có của chúng, chẳng hạn như 6, 28, 496, được gọi là *hoàn hảo*; vượt quá số tiền đó, *quá mức*; và những thứ ít hơn, *lỗi*. Các số *Thân thiện* là những số mà mỗi số bằng tổng các thừa số của số còn lại. Nhiều người chú ý đến chủ đề tỷ lệ của Pythagore. Các đại lượng a, b, c, d được cho là theo tỷ lệ *số học* khi $a-b=c-d$; theo tỷ lệ *geometrical*, khi $a:b=c:d$; theo tỷ lệ *harmonic*, khi $a-b:b-c=a:c$. Có thể những người theo trường phái Pytago cũng đã quen thuộc với tỷ lệ *musical* $a:\frac{a+b}{2}=\frac{2ab}{a+b}:b$. Iamblichus nói rằng Pythagoras đã giới thiệu nó từ Babylon.

Liên quan đến số học, Pythagoras đã thực hiện nhiều nghiên cứu sâu rộng về hình học. Ông tin rằng một sự kiện số học có sự tương tự trong hình học và *ngược lại*. Liên quan đến định lý của ông về tam giác vuông, ông đã nghĩ ra một quy tắc có thể tìm được các số nguyên sao cho tổng bình phương của hai trong số chúng bằng bình phương của số nguyên thứ ba. Do đó, lấy một bên là một số lẻ $(2n+1)$; thì $\frac{(2n+1)^2-1}{2}=2n^2+2n=$ mặt kia và $(2n^2+2n+1)=$ cạnh huyền. Nếu $2n+1=9$, thì hai số còn lại là 40 và 41. Nhưng quy tắc này chỉ áp dụng cho các trường hợp cạnh huyền khác với một trong

các cạnh bằng 1. Trong nghiên cứu về tam giác vuông chắc chắn đã nảy sinh những câu hỏi tế nhị khó hiểu. Do đó, cho trước một số bằng cạnh của một tam giác vuông cân, để tìm số mà cạnh huyền bằng. Cạnh có thể đã bị lấy bằng 1, 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{5}$ hoặc bất kỳ số nào khác, nhưng trong mọi trường hợp, mọi nỗ lực để tìm ra một số chính xác bằng cạnh huyền hẳn vẫn không có kết quả. Vấn đề có thể đã bị tấn công lặp đi lặp lại, cho đến khi cuối cùng "một thiên tài hiếm có nào đó, người được ban cho, trong một số khoảnh khắc hạnh phúc, để bay vút lên trên tầm suy nghĩ của con người với đường bay của đại bàng", nắm bắt được ý nghĩ vui vẻ rằng vấn đề này không thể được giải quyết. Theo một cách nào đó, có lẽ đã nảy sinh lý thuyết về *số lượng vô tỷ*, được Eudemus gán cho Pythagore. Đó thực sự là một ý nghĩ hết sức táo bạo, khi cho rằng có thể tồn tại các đường thẳng, khác nhau không chỉ về độ dài,—tức là về số lượng,—mà còn về chất lượng, mặc dù có thật, là hoàn toàn vô hình. [7] Chúng ta có cần thắc mắc rằng những người theo chủ nghĩa Pythagore đã nhìn thấy trong những điều phi lý một bí ẩn sâu sắc, một biểu tượng của điều không thể nói ra được không? Chúng ta được biết rằng người đầu tiên tiết lộ lý thuyết về những điều phi lý, mà những người theo trường phái Pythagore đã giữ bí mật, đã chết trong một vụ đắm tàu. Phát hiện ra nó được gán cho Pythagoras, nhưng chúng ta phải nhớ rằng tất cả những khám phá quan trọng của Pythagore, theo phong tục của Pythagore, đều được quy về ông. Tỷ lệ không thể so sánh đầu tiên được biết dường như là tỷ lệ giữa cạnh của một hình vuông với đường chéo của nó, như $1 : \sqrt{2}$. **Theodorus xứ Cyrene** đã thêm vào điều này một thực tế là các cạnh của hình vuông được biểu thị theo độ dài bằng $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, v.v., lên đến $\sqrt{17}$ và Theætetus, tức là các cạnh của bất kỳ hình vuông nào, được biểu thị bởi một surd, là không thể so sánh với đơn vị tuyến tính. **Euclid** (khoảng 300 TCN), trong *Elements*, X. 9 của ông, đã khái quát hóa hơn nữa: Hai độ lớn có bình phương (hoặc không) với nhau là một số bình phương với một số bình phương là tương xứng (hoặc không thể so sánh được)

và ngược lại. Trong cuốn sách thứ mười, anh ấy xử lý các số lượng không thể so sánh được ở độ dài. Anh ấy điều tra mọi loại đường có thể được biểu thị bằng $\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$, a and b đại diện cho hai đường tương xứng, và thu được 25 loài. Mọi cá thể của mọi loài đều không thể so sánh với tất cả các cá thể của mọi loài khác. De Morgan nói: "Cuốn sách này có một sự hoàn chỉnh mà không cuốn nào khác (kể cả cuốn thứ năm) có thể tự hào; và chúng ta gần như có thể nghi ngờ rằng Euclid, sau khi đã sắp xếp các tài liệu trong tâm trí của mình, và đã xây dựng hoàn chỉnh cuốn sách thứ mười, đã viết những cuốn sách trước sau đó và không còn sống để sửa đổi chúng một cách kỹ lưỡng."[9] Lý thuyết của những thứ không thể so sánh được vẫn tồn tại ở nơi mà Euclid đã để lại cho đến thế kỷ XV.

Euclid dành các cuốn sách thứ bảy, thứ tám và thứ chín trong *Elements* của mình cho số học. Chính xác bao nhiêu phần trăm chứa trong những cuốn sách này là do chính Euclid phát minh ra, còn bao nhiêu phần trăm được mượn từ những người tiền nhiệm của ông thì chúng ta không có cách nào biết được. Không còn nghi ngờ gì nữa, có nhiều điều nguyên gốc với Euclid. Cuốn *seventh* bắt đầu với 21 định nghĩa. Tất cả ngoại trừ số 'số nguyên tố' đều được biết là đã được đưa ra bởi Pythagore. Tiếp theo là quy trình tìm G.C.D. của hai hoặc nhiều số. *cuốn sách thứ tám* đề cập đến các số theo tỷ lệ liên tục và với các mối quan hệ lẫn nhau của hình vuông, hình lập phương và số mặt phẳng. Do đó, XXII., nếu ba số tỷ lệ liên tục và số đầu tiên là một hình vuông, thì số thứ ba cũng vậy. Trong *cuốn sách thứ chín*, chủ đề tương tự vẫn được tiếp tục. Nó chứa mệnh đề rằng số lượng các số nguyên tố lớn hơn bất kỳ số nào đã cho.

Sau cái chết của Euclid, lý thuyết số hầu như không thay đổi trong 400 năm. Hình học độc quyền thu hút sự chú ý của tất cả các nhà toán học Hy Lạp. Chỉ có hai người được biết là đã hoàn thành công việc về số học đáng được đề cập. **Eratosthenes** (275–194 TCN) đã phát minh ra một 'sàng' để tìm các số nguyên tố. Tất cả các hợp số được 'sàng lọc' theo cách sau: Viết liên tiếp các số lẻ từ 3 trở lên.

Bằng cách gạch bỏ mọi số thứ ba sau 3, chúng tôi loại bỏ tất cả các bội số của 3. Bằng cách gạch bỏ mọi số thứ năm sau 5, chúng tôi loại bỏ tất cả các bội số của 5. Theo cách này, bằng cách loại bỏ các bội số của 7, 11, 13, v.v., chúng ta chỉ để lại các số nguyên tố. **Hypsicles** (từ 200 đến 100 TCN) hoạt động đối với các chủ đề về số đa giác và cấp số cộng, mà Euclid hoàn toàn bỏ qua. Trong công trình của mình về 'sự mọc của các vì sao', ông đã chỉ ra (1) rằng trong một chuỗi số học $2n$ số hạng, tổng của n số hạng cuối cùng vượt quá tổng của n đầu tiên một lượng bội số của n^2; (2) rằng trong một dãy $2n+1$ số hạng như vậy, tổng của dãy bằng số các số hạng nhân với số hạng ở giữa; (3) rằng trong một chuỗi $2n$ số hạng như vậy, tổng bằng một nửa số lượng số hạng nhân với hai số hạng ở giữa. [6]

Trong hai thế kỷ sau thời Hypsicles, số học biến mất khỏi lịch sử. Nó được đưa ra ánh sáng một lần nữa vào khoảng năm 100 SCN bởi **Nicomachus**, một người theo trường phái Tân Pythagore, người đã khánh thành kỷ nguyên cuối cùng của toán học Hy Lạp. Kể từ bây giờ, số học là môn học yêu thích, trong khi hình học bị bỏ quên. Nicomachus đã viết một tác phẩm có tựa đề *Introductio Arithmetica*, rất nổi tiếng vào thời đó. Số lượng lớn các nhà bình luận đã nhận được bằng chứng cho sự nổi tiếng của nó. Boethius đã dịch nó sang tiếng Latinh. Lucian không thể dành lời khen nào cao hơn cho một máy tính như thế này: "Bạn cho là giống như Nicomachus của Gerasa." *Introductio Arithmetica* là tác phẩm toàn diện đầu tiên trong đó số học được xử lý hoàn toàn độc lập với hình học. Thay vì vẽ các đường thẳng, giống như Euclid, ông minh họa mọi thứ bằng các số thực. Để chắc chắn, trong cuốn sách của ông, danh pháp hình học cũ vẫn được giữ lại, nhưng phương pháp này là quy nạp thay vì suy diễn. "Công việc duy nhất của nó là phân loại, và tất cả các lớp của nó đều bắt nguồn từ, và được thể hiện bằng, các con số thực tế." Công trình này chứa đựng một vài kết quả thực sự độc đáo. Chúng tôi đề cập đến một đề xuất quan trọng mà có lẽ là của chính tác giả. Ông nói rằng các số lập phương luôn bằng tổng các số lẻ liên tiếp.

Do đó, $8 = 2^3 = 3 + 5$, $27 = 3^3 = 7 + 9 + 11$, $64 = 4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$, v.v.. Định lý này sau đó được sử dụng để tìm tổng của chính các số lập phương. **Theon** xứ Smyrna là tác giả của một chuyên luận về "các quy tắc toán học cần thiết cho việc nghiên cứu về Plato." Công việc được sắp xếp tồi tệ và ít giá trị. Điều đáng quan tâm là định lý, rằng mọi số bình phương, hoặc số trừ 1, đều chia hết cho 3 hoặc 4 hoặc cả hai. Một khám phá đáng chú ý là một mệnh đề được đưa ra bởi **Iamblichus** trong chuyên luận của ông về triết học Pythagore. Nó được thành lập dựa trên quan sát rằng các học giả Pythagore gọi 1, 10, 100, 1000, các đơn vị của 'khóa học' thứ nhất, thứ hai, thứ ba, thứ tư tương ứng. Định lý là thế này: Nếu chúng ta cộng ba số liên tiếp bất kỳ, trong đó lớn nhất chia hết cho 3, sau đó cộng các chữ số của tổng đó, sau đó, một lần nữa, các chữ số của *tổng đó*, v.v., tổng cuối cùng sẽ là 6. Do đó, $61 + 62 + 63 = 186$, $1 + 8 + 6 = 15$, $1 + 5 = 6$. Khám phá này đáng chú ý hơn, bởi vì hệ thống ký hiệu số Hy Lạp thông thường ít có khả năng đề xuất bất kỳ thuộc tính nào như vậy của các số so với ký hiệu "Ả Rập" của chúng tôi.

Các tác phẩm của Nicomachus, Theon of Smyrna, Thymaridas, và những tác phẩm khác đôi khi chứa đựng các nghiên cứu về các chủ đề thực sự có bản chất đại số. Thymaridas ở một chỗ sử dụng từ Hy Lạp có nghĩa là "số lượng chưa biết" theo cách khiến người ta tin rằng đại số không xa. Điều thú vị trong việc truy tìm nguồn gốc của đại số là các biểu tượng số học trong *Tuyển tập Palatine*, trong đó có về 50 bài toán dẫn đến phương trình tuyến tính. Trước khi đại số ra đời, những bài toán này được đặt ra dưới dạng câu đố. Một câu đố được cho là của Euclid và có trong *Anthology* có tác dụng như sau: Một con la và một con lừa đang đi dọc theo, chở đầy ngô. Con la nói với con lừa: "Nếu anh cho tôi một cân, tôi sẽ chở gấp đôi anh." Nếu tôi cho bạn một cái, cả hai chúng ta đều phải gánh những gánh nặng như nhau. Hãy cho tôi biết gánh nặng của chúng, hỡi bậc thầy hình học uyên bác nhất." [6]

Gow nói, nó sẽ được cho phép rằng vấn đề này, nếu xác thực,

không nằm ngoài Euclid, và sự hấp dẫn đối với hình học có vẻ cổ xưa. Một câu đố hóc búa hơn nhiều là 'bài toán gia súc', nổi tiếng mà Archimedes đã đề xuất cho các nhà toán học người Alexandrian. Vấn đề là không xác định, vì chỉ từ bảy phương trình, tám đại lượng chưa biết trong các số tích phân sẽ được tìm thấy. Có thể nói như sau: Mặt trời có một đàn bò đực và bò cái, có màu sắc khác nhau. (1) Trong số Bulls, màu trắng (W), về số lượng, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$ của màu xanh (B) và vàng (Y): B là $(\frac{1}{4}+\frac{1}{5})$ của Y và piebald (P): P là $(\frac{1}{6}+\frac{1}{7})$ của W và Y. (2) Của bò, có cùng màu (w, b, y, p),

$$w=(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4})(B+b):b=(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5})(P+p):p$$
$$=(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6})(Y+y):y=(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7})(W+w).$$

Tìm số bò đực và số bò cái. [6] Một bài toán khác trong *Tuyển tập* khá quen thuộc với các cậu học sinh: "Trong bốn ống, một ống làm đầy bể trong một ngày, hai ngày nữa, ba ngày nữa, ba ngày nữa, bốn ngày nữa: nếu tất cả chạy cùng nhau thì bao lâu sẽ đầy bể?" Rất nhiều bài toán trong số này, làm khó một nhà toán học, lẽ ra đã có thể giải được một cách dễ dàng bởi một nhà đại số học. Chúng trở nên rất phổ biến vào thời của Diophantus, và chắc chắn đã đóng vai trò như một tác nhân kích thích mạnh mẽ trong tâm trí anh ấy.

Diophantus là một trong những nhà toán học cuối cùng và phong phú nhất của trường phái Alexandrian thứ hai. Ông mất khoảng năm 330 SCN. Tuổi của ông là tám mươi bốn, như được biết từ một văn bia về tác dụng này: Diophantus đã trải qua $\frac{1}{6}$ của cuộc đời mình trong thời thơ ấu, $\frac{1}{12}$ khi còn trẻ, và $\frac{1}{7}$ more với tư cách là người độc thân; 5 năm sau khi kết hôn, ông sinh ra một cậu con trai chết trước cha mình 4 năm, bằng nửa tuổi của cha mình. Nơi sinh và nguồn gốc của Diophantus vẫn chưa được biết. Nếu các tác phẩm của ông không được viết bằng tiếng Hy Lạp, sẽ không ai nghĩ rằng chúng là sản phẩm của trí óc Hy Lạp. Không có gì trong các tác phẩm của ông khiến chúng ta nhớ lại thời kỳ cổ điển của toán học Hy Lạp. Ý tưởng của ông gần như hoàn toàn mới về một chủ đề mới. Trong giới toán

học Hy Lạp, ông đứng một mình trong lĩnh vực chuyên môn của mình. Ngoại trừ ông, chúng ta buộc phải nói rằng trong số những người Hy Lạp *đại số* luôn là một môn khoa học chưa được biết đến.

Trong số các tác phẩm của ông, chúng tôi đã mất *Porisms*, nhưng có một đoạn *Số đa giác* và bảy cuốn sách về công trình vĩ đại của ông về *Số học*, được cho là đã được viết trong 13 cuốn sách.

Nếu chúng ta ngoại trừ cuốn giấy cói Ahmes chứa gợi ý đầu tiên về ký hiệu đại số và nghiệm của phương trình, thì của anh ấy textitArithmetica là chuyên luận sớm nhất về đại số hiện còn tồn tại. Trong tác phẩm này được giới thiệu ý tưởng về một phương trình đại số được biểu thị bằng các ký hiệu đại số. Cách xử lý của ông hoàn toàn là phân tích và hoàn toàn tách biệt với các phương pháp hình học. Theo những gì chúng tôi biết, ông ấy là người đầu tiên phát biểu rằng “một số âm nhân với một số âm sẽ cho một số dương.” Điều này được áp dụng cho phép nhân các hiệu, chẳng hạn như $(x-1)(x-2)$. Tuy nhiên, cần phải nhận xét rằng Diophantus không hề có khái niệm gì về các số âm đứng riêng lẻ. Tất cả những gì anh ấy biết là sự khác biệt, chẳng hạn như $(2x-10)$, trong đó $2x$ không thể nhỏ hơn 10 mà không dẫn đến sự vô lý. Anh ta dường như là người đầu tiên có thể thực hiện các phép toán như $(x-1)\times(x-2)$ mà không cần tham chiếu đến hình học. Những đồng nhất như $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, mà với Euclid xuất hiện trong thứ hạng cao của các định lý hình học, với Diophantus là hệ quả đơn giản nhất của các định luật hoạt động đại số. Dấu hiệu của phép trừ của anh ấy là ⋔ cho đẳng thức ι. Đối với số lượng không xác định, anh ta chỉ có một ký hiệu, ς. Anh ta không có dấu hiệu bổ sung nào ngoại trừ việc đặt cạnh nhau. Diophantus đã sử dụng nhưng ít biểu tượng, và đôi khi bỏ qua ngay cả những biểu tượng này bằng cách mô tả một hoạt động bằng từ ngữ khi biểu tượng cũng có thể trả lời.

Trong việc giải các phương trình đồng thời, Diophantus đã khéo léo quản lý chỉ với một ký hiệu cho các đại lượng chưa biết và đi đến

câu trả lời, phổ biến nhất là bằng phương pháp *giả định thăm dò*, bao gồm việc gán cho một số định lượng các giá trị sơ bộ, chỉ thỏa mãn một hoặc hai điều kiện. Các giá trị này dẫn đến các biểu thức rõ ràng là sai, nhưng thường gợi ý một số mưu kế mà nhờ đó các giá trị có thể được đảm bảo thỏa mãn tất cả các điều kiện của vấn đề.

Diophantus cũng giải phương trình xác định cấp hai. Chúng tôi không biết gì về phương pháp của anh ta, vì anh ta không đi qua toàn bộ quá trình giải quyết mà chỉ nêu kết quả. Do đó, “$84x^2 + 7x = 7$, từ đó x được tìm thấy $= \frac{1}{4}$.” Lưu ý rằng anh ta chỉ đưa ra một căn. Việc ông không quan sát thấy rằng một phương trình bậc hai có hai nghiệm, ngay cả khi cả hai nghiệm đều dương, khiến chúng ta khá ngạc nhiên. Tuy nhiên, cần phải nhớ rằng chính việc không thể nhận thức được nhiều hơn một trong số các giải pháp mà một vấn đề có thể chỉ ra là điều phổ biến đối với tất cả các nhà toán học Hy Lạp. Một điểm khác cần được quan sát là anh ta không bao giờ chấp nhận một câu trả lời là một đại lượng âm hoặc không hợp lý.

Diophantus chỉ dành cuốn sách đầu tiên trong *Arithmetica* của mình để giải phương trình xác định. Các sách còn lại hiện chủ yếu giải về *phương trình bậc hai không xác định* của dạng $Ax^2 + Bx + C = y^2$, hoặc về hai phương trình đồng thời cùng dạng. Ông xem xét một số nhưng không phải tất cả các trường hợp có thể xảy ra trong các phương trình này. Ý kiến của Nesselmann về phương pháp của Diophantus, như Gow, đã phát biểu như sau: “(1) Phương trình bất định bậc hai chỉ được xử lý hoàn toàn khi cần tìm số hạng bậc hai hoặc tuyệt đối: nghiệm của phương trình $Ax^2 + C = y^2$ và $Ax^2 + Bx + C = y^2$ ở nhiều khía cạnh là chật chội. (2) Đối với ’phương trình kép’ bậc hai, anh ta chỉ có một quy tắc xác định khi số hạng bậc hai thiếu trong cả hai biểu thức: ngay cả khi đó nghiệm của anh ta không phải là tổng quát. Các biểu thức phức tạp hơn chỉ xảy ra trong những trường hợp đặc biệt thuận lợi.” Vì vậy, anh ta giải được $Bx + C^2 = y^2$, $B_1x + C_1^2 = y_1^2$.

Khả năng phi thường của Diophantus nằm ở một hướng khác, cụ thể là ở sự khéo léo tuyệt vời của anh ấy trong việc đưa tất cả các loại phương trình về những dạng cụ thể mà anh ấy biết cách giải. Rất tuyệt vời là sự đa dạng của các vấn đề được xem xét. 130 bài toán được tìm thấy trong công trình vĩ đại của Diophantus chứa hơn 50 loại bài toán khác nhau, được xâu chuỗi lại với nhau mà không cần bất kỳ nỗ lực phân loại nào. Nhưng vẫn còn phong phú hơn các vấn đề là các giải pháp. Diophantus không biết các phương pháp chung. Mỗi vấn đề có phương pháp riêng biệt của nó, thường vô dụng đối với các vấn đề liên quan chặt chẽ nhất. "Do đó, rất khó để một người hiện đại, sau khi nghiên cứu 100 giải pháp Diophantine, để giải được giải pháp 101." [7]

Điều làm mất đi phần lớn giá trị khoa học của công trình của ông là việc ông luôn cảm thấy hài lòng với một nghiệm, mặc dù phương trình của ông có thể thừa nhận vô số giá trị. Một khiếm khuyết lớn khác là thiếu các phương pháp chung. Các nhà toán học hiện đại, chẳng hạn như Euler, Lagrange, Gauss, đã phải bắt đầu nghiên cứu về giải tích bất định một lần nữa và không nhận được sự trợ giúp trực tiếp nào từ Diophantus trong việc xây dựng các phương pháp. Bất chấp những khiếm khuyết này, chúng ta không thể không ngưỡng mộ tác phẩm vì sự khéo léo tuyệt vời được thể hiện trong đó khi giải các phương trình cụ thể.

Việc Diophantus lấy các phần đại số của mình từ từ các nguồn tiếng Hindu hay không vẫn là một câu hỏi mở và một trong những khó khăn lớn.

NGƯỜI LA MÃ

Không nơi nào mà sự tương phản giữa tư duy của người Hy Lạp và người La Mã được thể hiện rõ ràng hơn là ở thái độ của họ đối với khoa học toán học. Sự thống trị của người Hy Lạp là thời kỳ nở rộ của toán học, nhưng của người La Mã là thời kỳ khô cằn. Trong

triết học, thơ ca và nghệ thuật, người La Mã là kẻ bắt chước. Nhưng trong toán học, anh ta thậm chí không nảy sinh mong muốn bắt chước. Thành quả toán học của thiên tài Hy Lạp nằm trước mặt ông mà chưa được nếm thử. Ở anh ta, một khoa học không liên quan trực tiếp đến đời sống thực tiễn có thể không gây hứng thú. Kết quả là, không chỉ hình học cao hơn của Archimedes và Apollonius, mà ngay cả *Elements* của Euclid, cũng hoàn toàn là bị bỏ qua. Những thứ toán học ít ỏi mà người La Mã sở hữu không đến từ người Hy Lạp, mà từ những nguồn cổ xưa hơn. Chính xác ở đâu và làm thế nào nó có nguồn gốc là một vấn đề nghi ngờ. Có vẻ như rất có thể là "ký hiệu La Mã" cũng như hình học thực tế của người La Mã, đến từ những người Etruscan cũ, những người mà kiến thức của chúng ta về họ ở thời kỳ đầu tiên được mở rộng, sinh sống ở quận giữa Arno và Tiber.

Livy cho chúng ta biết rằng người Etruscan có thói quen biểu thị số năm đã trôi qua, bằng cách đóng một chiếc đinh hàng năm vào khu bảo tồn Minerva, và rằng người La Mã vẫn tiếp tục tập tục này. Một phương thức ít nguyên thủy hơn để chỉ định các con số, có lẽ có nguồn gốc từ Etruscan, là một ký hiệu giống như "ký hiệu La Mã" hiện nay. Hệ thống này đáng chú ý bởi thực tế là nó có liên quan đến một nguyên tắc mà không có nguyên tắc nào khác đáp ứng được; cụ thể là, nguyên tắc của phép trừ. Nếu một chữ cái được đặt trước một chữ cái khác có giá trị lớn hơn, giá trị của nó sẽ không được thêm vào mà trừ đi giá trị của chữ cái lớn hơn. Khi chỉ định các số lớn, một thanh ngang đặt trên một chữ cái được tạo ra để tăng giá trị của nó lên một nghìn lần. Trong phân số, người La Mã đã sử dụng hệ thập phân.

Trong các phép tính số học, người La Mã đã sử dụng ba loại khác nhau: Tính toán trên ngón tay, trên bàn tính và bằng các bảng được chuẩn bị sẵn cho mục đích này. [3] Biểu tượng ngón tay đã được biết đến từ thời Vua Numa, vì ông đã Pliny nói, dựng lên một bức tượng Janus hai mặt, trong đó các ngón tay biểu thị 365 (355?), số

ngày trong một năm. Nhiều đoạn văn khác của các tác giả La Mã chỉ ra việc sử dụng các ngón tay để hỗ trợ tính toán. Trên thực tế, một biểu tượng ngón tay có hình thức thực tế tương tự đã được sử dụng không chỉ ở Rome, mà còn ở Hy Lạp và khắp phương Đông, chắc chắn là ngay từ đầu kỷ nguyên Cơ đốc giáo, và tiếp tục được sử dụng. được sử dụng ở châu Âu trong thời trung cổ. Chúng tôi không biết nó được phát minh ở đâu và khi nào. Phương thức tính toán thứ hai, bằng bàn tính, là một chủ đề trong hướng dẫn cấp tiểu học ở Rome. Các đoạn văn của các nhà văn La Mã chỉ ra rằng loại bàn tính được sử dụng phổ biến nhất được phủ một lớp bụi và sau đó được chia thành các cột bằng cách vẽ các đường thẳng. Mỗi cột được cung cấp các viên sỏi (calculi, từ đó 'calculare' và 'calculate') dùng để tính toán. Các phép cộng và phép trừ có thể được thực hiện trên bàn tính khá dễ dàng, nhưng trong phép nhân, bàn tính chỉ có thể được sử dụng để cộng các tích cụ thể và trong phép chia để thực hiện các phép trừ xảy ra trong quy trình. Chắc chắn vào thời điểm này, người ta đã sử dụng đến các phép tính nhẩm và bảng cửu chương. Có thể phép nhân ngón tay cũng có thể đã được sử dụng. Nhưng phép nhân các số lớn, bằng cả hai phương pháp, đều vượt quá khả năng của một nhà số học thông thường. Để loại bỏ khó khăn này, các bảng số học được đề cập ở trên đã được sử dụng, từ đó có thể sao chép các sản phẩm mong muốn cùng một lúc. Những chiếc bàn kiểu này được chuẩn bị bởi *Victorius* xứ Aquitania. Các bảng của ông chứa một ký hiệu đặc biệt cho các phân số, ký hiệu này tiếp tục được sử dụng trong suốt thời Trung cổ. Victorius được biết đến nhiều nhất với *canon paschalis*, một quy tắc để tìm ngày chính xác cho lễ Phục sinh, mà ông đã xuất bản vào năm 457 SCN.

Thanh toán tiền lãi và các vấn đề về tiền lãi đã rất xa xưa đối với người La Mã. Luật thừa kế của người La Mã đã tạo ra vô số ví dụ về số học. Đặc biệt độc đáo là như sau: Một người đàn ông sắp chết di chúc rằng nếu vợ anh ta đang mang thai sinh con trai thì đứa con trai đó sẽ nhận được $\frac{2}{3}$ và cô ấy $\frac{1}{3}$ của tài sản của mình; nhưng nếu

con gái được sinh ra, cô ấy sẽ nhận được $\frac{1}{3}$ và vợ của anh ta $\frac{2}{3}$. Nó xảy ra rằng cặp song sinh được sinh ra, một trai và một gái. Chia di sản như thế nào để thỏa mãn di chúc? Luật gia La Mã nổi tiếng, Salvianus Julianus, đã quyết định rằng tài sản sẽ được chia thành bảy phần bằng nhau, trong đó con trai nhận bốn, vợ hai, con gái một.

Tiếp theo chúng ta xem xét hình học La Mã. Ai mong đợi tìm thấy ở Rome một môn khoa học về hình học, với các định nghĩa, tiên đề, định lý và chứng minh được sắp xếp theo thứ tự logic, sẽ thất vọng. Hình học duy nhất được biết đến là hình học *thực tế*, giống như hình học Ai Cập cổ đại, chỉ bao gồm các quy tắc thực nghiệm. Hình học thực tế này đã được sử dụng trong khảo sát. Các chuyên luận về nó đã đến với chúng ta, được biên soạn bởi các nhà khảo sát La Mã, được gọi là *agrimensores* hoặc *gromatici*. Một cách tự nhiên sẽ mong đợi các quy tắc được xây dựng rõ ràng. Nhưng không; chúng được để lại cho người đọc trừu tượng hóa từ vô số ví dụ số. "Có vẻ như hình học La Mã cổ hơn hình học Hy Lạp hàng ngàn năm, và như thể có một trận đại hồng thuỷ nằm giữa hai hình học này." của diệc. Trong số đó có để tìm diện tích của một tam giác từ các cạnh của nó và công thức gần đúng, $\frac{13}{30}a^2$, cho diện tích của các tam giác đều (a là một trong các cạnh). Nhưng diện tích thứ hai cũng được tính theo công thức $\frac{1}{2}(a^2+a)$ và $\frac{1}{2}a^2$, công thức đầu tiên Heron không hề hay biết. Có lẽ biểu thức $\frac{1}{2}a^2$ bắt nguồn từ công thức Ai Cập $\dfrac{a+b}{2}\cdot\dfrac{c+d}{2}$ để xác định thiết diện của một tứ giác. Công thức Ai Cập này đã được người La Mã sử dụng để tìm diện tích, không chỉ của hình chữ nhật, mà của bất kỳ hình tứ giác nào. Thật vậy, gromatici coi nó thậm chí còn đủ chính xác để xác định diện tích của các thành phố, được bố trí không theo quy luật, chỉ đơn giản bằng cách đo chu vi của chúng. [7] Bất kể hình học Ai Cập nào mà người La Mã sở hữu đều được cấy ghép qua Địa Trung Hải vào thời của *Julius Cæsar*, người đã ra lệnh khảo sát toàn bộ đế chế, Julius để đảm bảo một chế

độ đánh thuế công bằng. Cæsar cũng cải cách lịch, và vì mục đích đó, đã rút ra từ học Ai Cập. Ông đã nhận được sự phục vụ của nhà thiên văn học người Alexandrian, *Sosigenes*.

Vào thế kỷ thứ năm, Đế chế La Mã phương Tây nhanh chóng tan rã. Ba nhánh lớn—Tây Ban Nha, Gaul và tỉnh Châu Phi—bẻ ra từ thân cây mục nát. Năm 476, Đế quốc phương Tây qua đời, và thủ lĩnh người Visigothic, Odoacer, lên làm vua. Ngay sau đó, Ý bị chinh phục bởi người Ostrogoth dưới quyền Theodoric. Điều đáng chú ý là chính thời kỳ bị sỉ nhục chính trị này lại là thời kỳ mà khoa học Hy Lạp được nghiên cứu ở Ý một cách nhiệt tình nhất. Sách học bắt đầu được biên soạn từ các yếu tố của các tác giả Hy Lạp. Những bộ sưu tập này rất thiếu sót, nhưng rất thú vị, vì thực tế là, cho đến thế kỷ thứ mười hai, chúng là nguồn kiến thức toán học duy nhất ở Phương Tây. Đứng đầu trong số những nhà văn này là **Boethius** (mất 524). Lúc đầu, ông được Vua Theodoric vô cùng yêu thích, nhưng sau đó, bị các cận thần đố kỵ buộc tội phản quốc, ông bị tống giam và cuối cùng bị xử trảm. Khi ở trong tù, ông đã viết *Về những an ủi của triết học*. Là một nhà toán học, Boethius là một Brobdingnagian trong số các học giả La Mã, nhưng lại là một người Liliputian bên cạnh các bậc thầy Hy Lạp. Ông đã viết *Institutis Arithmetica*, về cơ bản là bản dịch số học của Nicomachus, và *Hình học* trong một số cuốn sách . Một số kết quả đẹp nhất của Nicomachus bị bỏ qua trong số học của Boethius. Cuốn sách đầu tiên về hình học là một trích đoạn từ *Elements* của Euclid, bao gồm ngoài các định nghĩa, định đề và tiên đề, các định lý trong ba cuốn sách đầu tiên mà không cần chứng minh. Việc thiếu bằng chứng này có thể được giải thích như thế nào? Một số người lập luận rằng Boethius sở hữu một bản sao tiếng Hy Lạp không hoàn chỉnh của the *Elements*; bởi những người khác, rằng anh ta đã có ấn bản của Theon trước anh ta, và tin rằng chỉ có các định lý đến từ Euclid, trong khi các bằng chứng được cung cấp bởi Theon. Cuốn sách thứ hai, cũng như những cuốn sách khác về hình học được cho là của Boethius, dạy, từ các ví dụ bằng số, phép

tính các hình phẳng theo kiểu của các nông dân.

Một phần nổi tiếng trong hình học của Boethius là phần liên quan đến bàn tính, mà ông gán cho những người theo thuyết Pythagore. Đã giới thiệu một cải tiến đáng kể trên bàn tính cũ. Các viên sỏi bị loại bỏ và *apices* (có thể là các hình nón nhỏ) được sử dụng. Trên mỗi đỉnh này được vẽ một chữ số mang lại cho nó một số giá trị dưới đây 10. Tên của những chữ số này là tiếng Ả Rập thuần túy, hoặc gần như vậy, nhưng dường như được thêm vào bởi một người sau này. Những con số này rõ ràng là cha đẻ của các chữ số "Ả Rập" hiện đại của chúng ta. 0 không được Boethius đề cập trong văn bản. Những chữ số này có nét tương đồng nổi bật với chữ số Gubar của người Tây-Ả Rập, được thừa nhận là có nguồn gốc từ Ấn Độ. Những sự thật này đã làm nảy sinh một cuộc tranh cãi bất tận. Một số người cho rằng Pythagoras đã *ở* Ấn Độ, và từ đó đã mang chín chữ số của Hy Lạp, nơi những người theo chủ nghĩa Pythagore bí mật sử dụng chúng. Giả thuyết này nói chung đã bị loại bỏ, vì không chắc chắn rằng Pythagoras hay bất kỳ đệ tử nào của ông đã từng *ở* Ấn Độ, cũng như không có bất kỳ bằng chứng nào từ bất kỳ tác giả Hy Lạp nào, rằng các đỉnh đã được người Hy Lạp biết đến, hoặc bất kỳ loại ký hiệu số nào. đã được họ sử dụng với bàn tính. Hơn nữa, khó có thể xảy ra là các dấu hiệu của người da đỏ, nguồn gốc của các đỉnh, lại có từ thời Pythagoras. Giả thuyết thứ hai cho rằng *Hình học* được gán cho Boethius là giả mạo; rằng nó không cũ hơn thế kỷ thứ mười, hoặc có thể là thế kỷ thứ chín, và rằng các đỉnh có nguồn gốc từ người Ả Rập. Lý thuyết này dựa trên sự mâu thuẫn giữa các đoạn trong *Số học* và các đoạn khác trong *Hình học*. Nhưng có một Encyclopædia được viết bởi *Cassiodorius* (mất khoảng 570) trong đó đề cập đến cả số học và hình học của Boethius. Dường như không có lý do chính đáng nào để nghi ngờ độ tin cậy của đoạn văn này trong Encyclopædia. Giả thuyết thứ ba (của Woepcke) cho rằng người Alexandrian đã trực tiếp hoặc gián tiếp lấy được chín chữ số từ người Hindu, vào khoảng thế kỷ thứ hai SCN, và một mặt đưa

chúng cho người La Mã, và một mặt cho người phương Tây. mặt khác là người Ả Rập . Lời giải thích này là hợp lý nhất.

THỜI TRUNG CỔ



NGƯỜI ẤN ĐỘ

NHỮNG NGƯỜI đầu tiên nổi bật trong nghiên cứu toán học, sau thời của người Hy Lạp cổ đại, giống như họ, thuộc chủng tộc Aryan. Tuy nhiên, nó không phải là một quốc gia châu Âu, mà là một quốc gia châu Á, và có trụ sở ở Ấn Độ xa xôi.

Không giống như người Hy Lạp, xã hội Ấn Độ được cố định thành các đẳng cấp. Các giai cấp duy nhất được hưởng đặc quyền và thời gian rảnh rỗi để nghiên cứu và tư duy nâng cao là *Bà-la-môn*, những người kinh doanh chính là tôn giáo và triết học, và *Kshatriyas*, những người tham gia vào chiến tranh và chính phủ.

Chúng ta biết rất ít về sự phát triển của toán học Hinđu. Một số bản viết tay làm chứng rằng người da đỏ đã leo lên một độ cao ngất ngưởng, nhưng con đường đi lên của họ không còn có thể theo dõi được nữa. Có vẻ như toán học Hy Lạp đã phát triển trong những điều kiện thuận lợi hơn so với tiếng Hin-đu, vì ở Hy Lạp, nó đã đạt được sự tồn tại độc lập và được nghiên cứu vì lợi ích của chính nó, trong khi toán học tiếng Hin-ddi luôn chỉ là kẻ phục vụ cho thiên văn học. Hơn nữa, ở Hy Lạp, toán học là một môn khoa học của nhân dân, được tự do trau dồi bởi tất cả những ai yêu thích nó; ở Ấn Độ, cũng như ở Ai Cập, nó chủ yếu nằm trong tay các thầy tu. Một lần nữa, người Ấn Độ có thói quen đưa vào câu thơ tất cả các kết quả toán học mà họ thu được, và khoác lên chúng bằng ngôn ngữ khó hiểu và thần bí, mặc dù được điều chỉnh phù hợp để hỗ trợ trí nhớ của người đã hiểu chủ đề này, nhưng thường khó hiểu đối với người da đỏ. không quen biết. Mặc dù các nhà toán học vĩ đại của Ấn Độ giáo chắc chắn đã suy luận ra hầu hết hoặc tất cả các khám

phá của họ, nhưng họ không có thói quen lưu giữ các bằng chứng, vì vậy các định lý và quy trình vận hành trần trụi đều đã có từ thời chúng ta. Rất khác nhau về những khía cạnh này là người Hy Lạp. Sự tối nghĩa của ngôn ngữ thường được tránh, và các bằng chứng thuộc về kho kiến thức cũng như chính các định lý. Rất nổi bật là sự khác biệt trong khuynh hướng tâm trí của người Hindu và người Hy Lạp; vì, trong khi tư duy của người Hy Lạp nổi bật là *hình học*, thì người Ấn Độ trước hết là *số học*. Người Hin-đu liên quan đến số lượng, người Hy Lạp liên quan đến hình thức. Biểu tượng số, khoa học về số và đại số đã đạt được ở Ấn Độ sự hoàn hảo hơn nhiều so với những gì chúng đã đạt được trước đó ở Hy Lạp. Mặt khác, chúng tôi tin rằng có rất ít hoặc không có hình học nào ở Ấn Độ mà nguồn gốc của chúng có thể không được truy nguyên từ Hy Lạp. Lượng giác Hindu có thể được đề cập như một ngoại lệ, nhưng nó dựa trên số học nhiều hơn là hình học.

Một nhiệm vụ thú vị nhưng khó khăn là truy tìm mối quan hệ giữa toán học Hindu và Hy Lạp. Ai cũng biết rằng ít nhiều thương mại đã được tiến hành giữa Hy Lạp và Ấn Độ từ thời kỳ đầu. Sau khi Ai Cập trở thành một tỉnh của La Mã, một giao dịch thương mại sôi nổi hơn đã nảy sinh giữa La Mã và Ấn Độ, thông qua Alexandria. *A priori*, dường như không phải là không thể xảy ra, rằng cùng với việc lưu thông hàng hóa, cũng cần có sự trao đổi ý kiến. Sự truyền đạt tư tưởng từ người Hindus đến người Alexandros đã thực sự diễn ra, hiển nhiên từ thực tế là một số giáo lý triết học và thần học của người Manicheans, Neo-Platonists, Gnostics, cho thấy sự giống nhau không thể nhầm lẫn với giáo lý Ấn Độ. Sự thật khoa học cũng được truyền từ Alexandria đến Ấn Độ. Điều này được thể hiện rõ ràng qua nguồn gốc Hy Lạp của một số thuật ngữ kỹ thuật mà người Hindu sử dụng. Thiên văn học Hindu chịu ảnh hưởng của thiên văn học Hy Lạp. Hầu hết kiến thức hình học mà họ sở hữu đều có nguồn gốc từ Alexandria, và đặc biệt là các tác phẩm của Heron. Trong đại số, có lẽ đã có sự cho và nhận lẫn nhau. Chúng tôi nghi ngờ rằng

Diophantus đã có những cái nhìn đầu tiên về kiến thức đại số từ Ấn Độ. Mặt khác, bằng chứng đã được tìm thấy về đại số Hy Lạp trong số những người Bà La Môn. Kiến thức sớm nhất về đại số ở Ấn Độ có thể có nguồn gốc từ Babylon. Khi chúng ta cho rằng các nhà khoa học Ấn Độ giáo coi số học và đại số chỉ đơn thuần là những công cụ hữu ích trong nghiên cứu thiên văn, thì có vẻ trớ trêu sâu sắc rằng những nhánh thứ cấp này xét cho cùng lại là những nhánh duy nhất mà họ giành được sự khác biệt thực sự, trong khi khoa học thiên văn học yêu thích của họ họ tỏ ra không có khả năng quan sát, thu thập dữ kiện và thực hiện các cuộc điều tra quy nạp.

Bây giờ chúng ta sẽ tiến hành liệt kê tên của các nhà toán học hàng đầu của Ấn Độ giáo, và sau đó sẽ xem xét ngắn gọn về toán học Ấn Độ. Chúng tôi sẽ chỉ xem xét khoa học ở trạng thái hoàn chỉnh của nó, vì dữ liệu của chúng tôi không đủ để theo dõi lịch sử phát triển của các phương pháp. Trong số các nhà toán học vĩ đại của Ấn Độ, hay đúng hơn là các nhà thiên văn học,—vì Ấn Độ không có nhà toán học thực thụ,—**Aryabhatta** là người sớm nhất. Ngài sinh năm 476 SCN, tại Pataliputra, trên thượng nguồn sông Hằng. Danh tiếng của ông là nhờ tác phẩm *Aryabhattiyam*, trong đó chương thứ ba dành cho toán học. Khoảng một trăm năm sau, toán học ở Ấn Độ đạt đến đỉnh cao. Lúc bấy giờ **Brahmagupta** (sinh năm 598) hưng thịnh. Trong 628, ông đã viết *Brahma-sphuta-siddhanta* ("Hệ thống sửa đổi của Brahma"), trong đó chương 12 và 18 thuộc về toán học. Đến thế kỷ thứ tư hoặc thứ năm, thuộc về một công trình thiên văn ẩn danh, được gọi là *Surya-siddhanta* ("Kiến thức từ Mặt trời"), mà chính quyền bản địa được xếp hạng thứ hai chỉ sau *Brahma-siddhanta*, nhưng chúng tôi quan tâm chỉ vì nó cung cấp bằng chứng rằng khoa học Hy Lạp đã ảnh hưởng đến khoa học Ấn Độ ngay cả trước thời của Aryabhatta. Các thế kỷ tiếp theo chỉ tạo ra hai cái tên quan trọng; cụ thể là, **Cridhara**, người đã viết *Ganita-sara* ("Tinh túy của phép tính"), và **Padmanabha**, tác giả của đại số. Khoa học dường như đã đạt được nhưng ít tiến bộ vào thời

điểm này; đối với tác phẩm có tựa đề *Siddhantaciromani* ("Vương miện của một hệ thống thiên văn"), được viết bởi **Bhaskara Acarya** vào năm 1150, cao hơn một chút so với tác phẩm của Brahmagupta, được viết hơn 500 năm sớm hơn. Hai chương toán học quan trọng nhất trong tác phẩm này là *Lilavati* (= "cái đẹp," *nghĩa là* khoa học cao quý) và *Viga-ganita* (= " root-extract"), dành cho số học và đại số. Kể từ bây giờ, những người theo đạo Hindu trong các trường phái Bà la môn dường như bằng lòng với việc nghiên cứu những kiệt tác của những người đi trước họ. Trí thông minh khoa học liên tục giảm sút và trong thời hiện đại, một tác phẩm tiếng Ả Rập rất thiếu sót của thế kỷ 16 đã được nắm giữ quyền lực lớn. [7]

Các chương toán học của *Brahma-siddhanta* và *Siddhantaciromani* đã được dịch sang tiếng Anh bởi H. T. Colebrooke, London, 1817. *Surya-siddhanta* được dịch bởi E. Burgess, và được W. D chú thích. Whitney, New Haven, Conn., 1860.

Thành tựu vĩ đại nhất của người Hindu và là thành tựu, trong tất cả các phát minh toán học, đã đóng góp nhiều nhất cho sự tiến bộ chung của trí thông minh, là phát minh ra nguyên tắc vị trí trong việc viết các con số. Nói chung, chúng tôi gọi ký hiệu của chúng tôi là ký hiệu "Ả Rập", nhưng nên được gọi là ký hiệu "Hindu", vì người Ả Rập đã mượn nó từ người Hindu. Việc phát minh ra ký hiệu này không dễ dàng như chúng ta nghĩ lúc đầu, có thể được suy ra từ thực tế là ở các quốc gia khác, ngay cả những người Hy Lạp có đầu óc nhạy bén cũng không sở hữu một ký hiệu giống như vậy. Chúng tôi hỏi, ai đã phát minh ra biểu tượng lý tưởng này, và khi nào? Nhưng chúng ta không biết người phát minh cũng như thời gian phát minh. Hệ thống ký hiệu của chúng tôi có nguồn gốc Ấn Độ là điểm duy nhất mà chúng tôi chắc chắn. Từ sự phát triển của các ý tưởng nói chung, chúng ta có thể suy luận một cách an toàn rằng ký hiệu của chúng ta không tạo ra sự tồn tại của một Minerva được vũ trang hoàn toàn từ đầu của Sao Mộc. Chín con số để viết các đơn vị được cho là đã được giới thiệu sớm nhất, và dấu của số 0 và nguyên

tắc về vị trí có nguồn gốc muộn hơn. Quan điểm này nhận được sự ủng hộ từ thực tế là trên đảo Ceylon, một ký hiệu giống như tiếng Hindi, nhưng không có số 0 đã được bảo tồn. Chúng ta biết rằng Phật giáo và văn hóa Ấn Độ đã du nhập vào Ceylon khoảng thế kỷ thứ ba sau Công nguyên, và nền văn hóa này vẫn đứng yên tại đó, trong khi nó tiến bộ trên lục địa. Sau đó, dường như rất có khả năng các chữ số của Ceylon là các chữ số cũ, không hoàn hảo của Ấn Độ. Ở Ceylon, chín chữ số được sử dụng cho hàng đơn vị, chín chữ số khác cho hàng chục, một cho 100 và một cho 1000. 20 ký tự này cho phép họ viết tất cả các số lên tới 9999. Do đó, 8725 sẽ được viết với sáu dấu hiệu, đại diện cho các số sau: 8, 1000, 7, 100, 20, 5. Những ký hiệu Singhalesian này, giống như các chữ số cổ của người Hinđu, ban đầu được cho là các chữ cái đầu tiên của các tính từ số tương ứng. Có một sự tương đồng rõ rệt giữa ký hiệu của Ceylon và ký hiệu được Aryabhatta sử dụng trong chương đầu tiên của tác phẩm của ông, và chỉ ở đó. Mặc dù số 0 và nguyên tắc vị trí không được các học giả Tích Lan biết đến, nhưng có lẽ Aryabhatta đã biết; vì, trong chương thứ hai, anh ấy đưa ra các hướng dẫn để trích xuất căn bậc hai và căn bậc ba, điều này dường như cho thấy kiến thức về chúng. Có vẻ như số không và nguyên tắc vị trí đi kèm đã được giới thiệu vào khoảng thời gian của Aryabhatta. Đây là những phát minh mang lại cho hệ thống Hindu tính ưu việt tuyệt vời, sự hoàn hảo đáng ngưỡng mộ của nó.

Dường như đã có một số ký hiệu được sử dụng ở các vùng khác nhau của Ấn Độ, chúng khác nhau, không phải về nguyên tắc, mà chỉ ở dạng ký hiệu được sử dụng. Điều đáng quan tâm cũng là một *hệ thống biểu tượng về vị trí*, trong đó các số liệu nói chung không được biểu thị bằng các tính từ số, mà bằng các đối tượng gợi ý các số cụ thể được đề cập. Do đó, đối với 1 đã được sử dụng các từ *moon*, *Brahma*, *Creator* hoặc *form*; cho 4, các từ *Veda*, (vì nó được chia thành bốn phần) hoặc *đại dương*, v.v. Ví dụ sau, lấy từ *Surya-siddhanta*, minh họa ý tưởng này. Số 1.577.917.828 được

thể hiện từ phải sang trái như sau: Vasu (một loại 8 các vị thần) + two + eight + mountains (7 mountain-chains) + form + digits (the 9 digits) + seven + mountains + ngày âm lịch (một nửa trong số đó bằng 15). Việc sử dụng các ký hiệu như vậy giúp có thể biểu diễn một số theo nhiều cách khác nhau. Điều này tạo điều kiện thuận lợi đáng kể cho việc đóng khung các câu chứa các quy tắc số học hoặc hằng số khoa học, do đó có thể dễ dàng ghi nhớ hơn.

Vào thời kỳ đầu, người Hindu đã thể hiện kỹ năng tính toán tuyệt vời, ngay cả với những con số lớn. Vì vậy, họ kể cho chúng ta nghe về một kỳ thi mà Đức Phật, nhà cải cách của tôn giáo của Ấn Độ, đã phải phục tùng, khi còn trẻ, để giành được cô gái mà ông yêu. Trong môn số học, sau khi khiến các giám khảo kinh ngạc bằng cách đặt tên cho tất cả các chu kỳ của các số cho đến 53d, ông được hỏi liệu ông có thể xác định số nguyên tử sơ cấp mà khi đặt chúng cạnh nhau, sẽ tạo thành một đường thẳng dài một dặm hay không. . Đức Phật đã tìm ra câu trả lời cần thiết theo cách này: 7 các nguyên tử sơ cấp tạo ra một hạt bụi rất nhỏ, 7 trong số này tạo thành một hạt bụi nhỏ, 7 of *này* một hạt bụi bị gió cuốn đi, v.v.. Cứ như vậy, anh ta tiến lên, từng bước một, cho đến khi cuối cùng anh ta đạt được chiều dài một dặm. Phép nhân của tất cả các thừa số cho ra vô số nguyên tử sơ cấp trong một dặm một số bao gồm 15 chữ số. Bài toán này làm ta liên tưởng đến 'Máy đếm cát' của Archimedes.

Sau khi biểu tượng số đã được hoàn thiện, việc tính toán trở nên dễ dàng hơn nhiều. Nhiều phương thức hoạt động của Ấn Độ khác với của chúng ta. Người Ấn giáo nói chung có khuynh hướng làm theo chuyển động từ trái sang phải, như khi viết. Do đó, họ *đã thêm* các cột bên trái trước và thực hiện các chỉnh sửa cần thiết khi tiếp tục. Chẳng hạn, họ sẽ thêm 254 và 663, như vậy: $2+6=8$, $5+6=11$, thay đổi 8 thành 9, $4+3=7$. Do đó tổng 917. Trong *phép trừ* họ có hai phương pháp. Do đó, với $821-348$, họ sẽ nói, 8 từ $11=3$, 4 từ $11=7$, 3 từ $7=4$. Hoặc họ sẽ nói, 8 từ $11=3$, 5 từ $12=7$, 4 từ $8=4$. Trong *phép nhân* của một số với một số khác chỉ có một chữ số, chẳng

hạn như 569 nhân với 5, họ thường nói, $5 \cdot 5 = 25$, $5 \cdot 6 = 30$, thay đổi 25 thành 28, $5 \cdot 9 = 45$, do đó 0 phải được tăng thêm 4. Sản phẩm có giá 2845. Trong phép nhân các số có nhiều chữ số với nhau, trước tiên, theo cách vừa chỉ ra, chúng nhân với chữ số bên trái của số nhân, được viết phía trên số bị nhân và đặt tích lên trên số nhân. Khi nhân với chữ số tiếp theo của số nhân, tích không được đặt trong một hàng mới, như với chúng tôi, nhưng tích đầu tiên thu được đã được sửa, khi quá trình tiếp tục, bằng cách xóa các chữ số cũ, bất cứ khi nào cần thiết, và thay thế chúng bằng những cái mới, cho đến khi cuối cùng thu được toàn bộ sản phẩm. Chúng tôi, những người sở hữu những thứ xa xỉ hiện đại của bút chì và giấy, sẽ không thể yêu thích phương pháp Hindu này. Nhưng người da đỏ đã viết “ bằng bút mía lên một tấm bảng đen nhỏ có sơn lỏng mỏng màu trắng tạo thành các dấu có thể dễ dàng xóa được hoặc trên một bảng trắng, rộng chưa đầy một foot vuông , rải đầy bột đỏ, trên đó họ viết các hình bằng một cây gậy nhỏ, sao cho các hình có màu trắng trên nền đỏ.”[7] Vì các chữ số phải khá lớn để có thể đọc rõ ràng và vì các bảng nhỏ, mong muốn có một phương pháp không cần nhiều không gian. Một phương pháp như vậy là phương pháp nhân trên. Các hình có thể dễ dàng bị xóa và thay thế bằng những hình khác mà không làm mất đi sự gọn gàng. Nhưng người Ấn giáo cũng có những cách nhân lên khác, trong đó chúng tôi đề cập đến những cách sau:

Bảng tính được chia thành các ô vuông như bàn cờ. Các đường chéo cũng được vẽ, như trong hình. Phép nhân của $12 \times 735 = 8820$ được thể hiện trong biểu đồ liền kề. [3]

		7	3	5
	1	7	3	5
	2	1 / 4	6	1 / 0
8		8	2	0

Các bản thảo hiện có không cung cấp thông tin về cách *divisions* được thực hiện. Tính đúng đắn của các phép cộng, phép trừ và phép nhân của chúng đã được kiểm tra “khi vượt quá 9’s. Khi viết các phân số, tử số được đặt phía trên mẫu số, nhưng không có đường kẻ

nào được kẻ giữa chúng.

Bây giờ chúng ta sẽ tiến hành xem xét một số bài toán số học và các cách giải của người Ấn Độ. Một phương pháp ưa thích là *inversion*. Với sự ngắn gọn súc tích, Aryabhatta mô tả nó như sau: "Phép nhân trở thành phép chia, phép chia trở thành phép nhân; cái được thành cái mất, cái mất, cái được; nghịch đảo." Hoàn toàn khác với câu trích dẫn này về mặt phong cách là vấn đề sau đây của Aryabhatta, minh họa phương pháp này: [3] "Cô gái xinh đẹp với đôi mắt rạng rỡ, hãy cho tôi biết bạn hiểu phương pháp đảo ngược đúng như thế nào, là số nhân với 3, rồi tăng $\frac{3}{4}$ của tích, chia cho 7, giảm đi $\frac{1}{3}$ của thương, nhân với chính nó, giảm đi 52, căn bậc được rút ra, cộng 8, và chia cho 10, sẽ cho số 2?" Quá trình này bao gồm bắt đầu với 2 và làm ngược lại. Do đó, $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$, $\sqrt{196} = 14$ và $14 \cdot \frac{3}{2} \cdot 7 \cdot \frac{4}{7} \div 3 = 28$, câu trả lời.

Đây là một ví dụ khác được lấy từ *Lilavati*, một chương trong tác phẩm vĩ đại của Bhaskara: "Căn bậc hai của một nửa số của những con ong trong đàn đã bay ra khỏi một jessamine-bush, $\frac{8}{9}$ của toàn bộ đàn vẫn ở lại phía sau; một con ong cái bay quanh một con ong đực đang vo ve trong một bông hoa sen mà nó đã bị quyến rũ trong đêm bởi mùi thơm ngọt ngào của nó, nhưng bây giờ bị giam cầm trong đó. Hãy cho tôi biết số lượng ong." Trả lời, 72. Bộ trang phục thơ mộng dễ chịu trong đó tất cả các bài toán số học được khoác lên mình là do tập quán của người Ấn Độ viết tất cả sách học bằng thơ, và đặc biệt là Brahmagupta nói: "Những bài toán này được đề xuất chỉ đơn giản là để giải trí; nhà thông thái có thể phát minh ra hàng nghìn bài toán khác, hoặc anh ta có thể giải quyết vấn đề của người khác bằng các quy tắc được đưa ra ở đây. Như mặt trời làm lu mờ các vì sao bởi sự rực rỡ của anh ta, con người tri thức cũng vậy. chọc ghẹo danh tiếng của người khác trong hội đồng nhân dân nếu anh ta đề xuất các bài toán đại số, và thậm chí còn hơn thế nữa nếu anh ta giải được chúng."

Người Hindu giải các bài toán về lãi suất, chiết khấu, hợp tác, liên kết, tổng các chuỗi số học và hình học, nghĩ ra các quy tắc để xác định số lượng tổ hợp và hoán vị, đồng thời phát minh ra hình vuông ma thuật. Có thể nói thêm ở đây rằng cờ vua, trò chơi sâu sắc nhất trong tất cả các trò chơi, có nguồn gốc từ Ấn Độ.

Người Hindu thường xuyên sử dụng "quy tắc ba" và cũng như phương pháp "falsa positio," gần như giống hệt với phương pháp ' 'giả định sơ bộ" của Diophantus. Các quy tắc này và các quy tắc khác đã được áp dụng cho một số lượng lớn các vấn đề.

Bây giờ chuyển sang phần *algebra*, trước tiên chúng ta sẽ học các ký hiệu của phép toán. Phép cộng được biểu thị đơn giản bằng cách đặt cạnh nhau như trong đại số Diophantine; phép trừ, bằng cách đặt một dấu chấm trên dấu trừ; phép nhân , bằng cách đặt sau thừa số, *bha*, viết tắt của từ *bhavita*, "tích"; phép chia, bằng cách đặt số chia bên dưới số bị chia; căn bậc hai, bằng cách viết *ka*, từ *karana* (vô tỷ), trước số lượng. Số lượng chưa biết được Brahmagupta gọi là *yâvattâvat* (*quantum tantum*). Khi một số lượng chưa biết xuất hiện, ông đưa ra, không giống như Diophantus, đối với mỗi tên và biểu tượng riêng biệt. Ẩn số đầu tiên được chỉ định bằng thuật ngữ chung "số lượng không xác định." Phần còn lại được phân biệt bằng tên của các màu, chẳng hạn như màu đen, xanh lam , vàng, đỏ hoặc xanh lá cây chưa biết. Âm tiết đầu tiên của mỗi từ tạo thành biểu tượng cho số lượng chưa biết tương ứng. *yâ* có nghĩa là x; *kâ* (từ *kâlaka* = black) có nghĩa là y; *yâ kâ bha*, "x times y"; *ka* 15 *ka* 10, "$\sqrt{15}-\sqrt{10}$."

Người da đỏ là những người đầu tiên nhận ra sự tồn tại của các đại lượng âm tuyệt đối. Họ đưa ra sự khác biệt giữa đại lượng dương và âm bằng cách gắn cho một bên là ý tưởng 'sở hữu', với bên kia là 'các khoản nợ'. Khái niệm về các hướng ngược nhau trên một đường thẳng, như một cách diễn giải các đại lượng + và −, cũng không xa lạ với họ. Họ đã tiến xa hơn Diophantus khi quan sát thấy rằng một

bậc hai luôn có hai nghiệm. Do đó, Bhaskara cho $x = 50$ và $x = -5$ cho nghiệm của $x^2 - 45x = 250$. “Nhưng,” anh ấy nói, “giá trị thứ hai trong trường hợp này không được lấy, vì nó không đủ; mọi người không chấp nhận gốc rễ tiêu cực.” Người bình luận nói về điều này như thể gốc rễ tiêu cực đã được nhìn thấy, nhưng không được thừa nhận.

Hankel nói, một khái quát hóa quan trọng khác là, rằng người Hindu không bao giờ giới hạn các phép tính số học của họ trong các số hữu tỷ. Chẳng hạn, Bhaskara đã chỉ ra cách theo công thức

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

có thể tìm được căn bậc hai của tổng các số hữu tỉ và vô tỉ . Người Hindu không bao giờ nhận ra ranh giới phân chia giữa số và độ lớn, do người Hy Lạp thiết lập, mặc dù là sản phẩm của tinh thần khoa học, nhưng đã làm chậm tiến độ của toán học rất nhiều. Họ chuyển từ độ lớn sang con số và từ con số sang độ lớn mà không lường trước được khoảng cách mà tâm trí phân biệt sắc bén tồn tại giữa cái liên tục và không liên tục. Tuy nhiên, bằng cách làm như vậy, người Ấn Độ đã hỗ trợ rất nhiều cho sự tiến bộ chung của toán học. “Thật vậy, nếu một người hiểu được bằng đại số việc áp dụng các phép toán số học cho các loại độ lớn phức tạp, cho dù là số hữu tỷ hay số vô tỷ hay độ lớn không gian, thì những người Bà La Môn uyên bác ở Hindostan mới là những nhà phát minh thực sự của đại số.” [7]

Bây giờ chúng ta hãy xem xét kỹ hơn về đại số Ấn Độ. Khi trích xuất các căn bậc hai và bậc ba, họ đã sử dụng các công thức $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ và $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Trong mối liên hệ này, Aryabhatta nói về việc chia một số thành các khoảng thời gian gồm hai và ba chữ số. Từ đó, chúng tôi suy ra rằng nguyên tắc về vị trí và số 0 trong ký hiệu số đã được anh ấy biết đến. Khi tính toán với số không, một tuyên bố của Bhaskara rất thú vị. Ông nói, một phân số có mẫu số bằng 0 thừa nhận không có sự thay đổi nào,

mặc dù có thể thêm hoặc bớt nhiều. Thật vậy, theo cách tương tự, không có sự thay đổi nào diễn ra trong Đấng Thượng Đế vô hạn và bất biến khi các thế giới bị phá hủy hoặc tạo ra, mặc dù vô số trật tự của các sinh vật được tiếp nhận hoặc tạo ra. Mặc dù ở điểm này, rõ ràng là anh ấy đã chứng minh được những khái niệm toán học rõ ràng, nhưng ở những điểm khác, anh ấy lại hoàn toàn thất bại trong việc tính toán các phân số có mẫu số bằng 0.

Trong các lời giải của phương trình xác định theo phương pháp Hindu, Cantor nghĩ rằng ông có thể nhìn thấy dấu vết của các phương pháp Diophantine. Một số thuật ngữ kỹ thuật tiết lộ nguồn gốc Hy Lạp của họ. Ngay cả khi đúng là người Ấn Độ đã vay mượn của người Hy Lạp, thì họ vẫn xứng đáng được ghi nhận vì đã cải thiện và khái quát hóa các nghiệm của phương trình tuyến tính và bậc hai. Bhaskara vượt xa người Hy Lạp và thậm chí vượt xa cả Brahmagupta khi ông nói rằng "bình phương của số dương cũng như của số âm , tích cực; rằng căn bậc hai của một số dương là gấp đôi, dương và âm. Không có căn bậc hai của một số âm, vì nó không phải là số chính phương." Đối với các phương trình bậc cao hơn, người Ấn Độ chỉ thành công trong việc giải một số trường hợp đặc biệt trong đó cả hai vế của phương trình có thể trở thành lũy thừa bằng cách cộng các điều khoản nhất định cho mỗi.

Người Hindu đã đạt được tiến bộ lớn hơn nhiều so với việc giải phương trình xác định trong việc xử lý *phương trình bất định*. Phân tích bất định là một chủ đề mà tâm trí người Hindu đã thể hiện sự thích nghi tốt. Chúng ta đã thấy rằng chính chủ đề này là niềm yêu thích của Diophantus, và tài năng của ông gần như vô tận trong việc đưa ra các giải pháp cho các trường hợp cụ thể. Nhưng vinh quang của việc phát minh ra các phương pháp *General* trong nhánh toán học tinh tế nhất này thuộc về người Ấn Độ. Phép phân tích bất định của tiếng Hin-ddi khác với phép phân tích của tiếng Hy Lạp không chỉ ở phương pháp mà còn ở mục tiêu. Mục tiêu của cái trước là tìm tất cả các nghiệm tích phân khả dĩ. Mặt khác, phân

tích Hy Lạp không nhất thiết đòi hỏi những câu trả lời toàn vẹn mà chỉ đơn giản là những câu trả lời hợp lý. Diophantus hài lòng với một giải pháp duy nhất; người Hindu đã cố gắng tìm mọi giải pháp có thể. Aryabhatta đưa ra các giải pháp bằng số nguyên cho các phương trình tuyến tính có dạng $ax \pm by = c$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Quy tắc được sử dụng được gọi là *máy nghiền*. Đối với điều này, cũng như đối với hầu hết các quy tắc khác, người da đỏ không đưa ra bằng chứng nào. Lời giải của họ về cơ bản giống như lời giải của Euler. Quá trình Euler rút gọn $\frac{a}{b}$ thành một phân số liên tục giống như quá trình tìm ước chung lớn nhất của a and b của người Hindu bằng phép chia. Đây thường được gọi là phương pháp Diophantine. Hankel phản đối chống lại cái tên này, với lý do Diophantus không chỉ chưa bao giờ biết phương pháp này, mà thậm chí còn không nhắm đến các nghiệm hoàn toàn tích phân. [7] Những phương trình này có thể phát triển từ các vấn đề trong thiên văn học. Ví dụ, chúng được áp dụng để xác định thời gian khi một chòm sao nhất định của các hành tinh sẽ xuất hiện trên bầu trời.

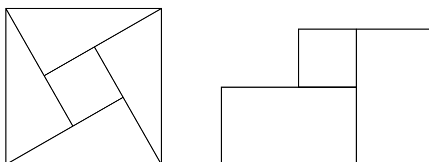
Qua chủ đề phương trình tuyến tính có nhiều hơn hai ẩn số, chúng ta đến với phương trình bậc hai vô nghiệm. Trong giải pháp của $xy = ax + by + c$, họ đã áp dụng phương pháp được Euler phát minh lại sau này, tách $(ab + c)$ thành tích của hai số nguyên $m \cdot n$ và đặt $x = m + b$ và $y = n + a$.

Đáng chú ý là nghiệm Hindu của phương trình bậc hai $cy^2 = ax^2 + b$. Với trí tuệ sắc bén tuyệt vời, họ đã nhận ra trong trường hợp đặc biệt $y^2 = ax^2 + 1$ là một bài toán cơ bản trong phương trình bậc hai bất định. Họ đã giải nó bằng *phương pháp tuần hoàn*. De Morgan nói: “Nó bao gồm, ” trong một quy tắc cho tìm ra vô số nghiệm của $y^2 = ax^2 + 1$ (a là số nguyên không phải là số chính phương), bằng một nghiệm đã cho hoặc tìm được, và cảm nhận về một nghiệm bằng cách tạo nghiệm $y^2 = ax^2 + b$ đưa ra nghiệm $y^2 = ax^2 + b^2$. Nó dẫn đến định lý sau: Nếu p và q là một tập hợp các giá trị của x và y

trong $y^2 = ax^2 + b$ và p' và q' giống nhau hoặc một tập hợp khác, thì $qp + pq'$ và $app' + qq'$ là các giá trị của x và y trong $y^2 = ax^2 + b^2$. Từ đó, rõ ràng là có thể tạo ra một nghiệm của $y^2 = ax^2 + 1$ cho bất kỳ số nào, và nếu, lấy b tùy ý, $y^2 = ax^2 + b^2$ có thể được giải sao cho x và y chia hết cho b, khi đó một nghiệm sơ bộ của $y^2 = ax^2 + 1$ có thể được tìm thấy. Một cách khác để tìm lời giải là sự kết hợp của cách trước với *cuttaca* (máy nghiền bột)." Những tính toán này được sử dụng trong thiên văn học.

Chắc chắn "phương pháp tuần hoàn" này là phát minh vĩ đại nhất trong lý thuyết số trước thời Lagrange. Sự trớ trêu của số phận đã định sẵn rằng phương trình $y^2 = ax^2 + 1$ bây giờ nên được gọi là bài toán *Pell's*, trong khi để công nhận học thuật Bà-la-môn, nó nên được gọi là ' 'Bài toán Hin-đu." Đó là một bài toán đã vận dụng khả năng cao nhất của một số nhà phân tích hiện đại vĩ đại nhất của chúng ta. Nhờ họ, công việc của người Hindu được thực hiện lại; vì, thật không may, người Ả Rập chỉ truyền sang châu Âu một phần nhỏ của đại số Ấn Độ và các bản viết tay gốc của người Hindu, mà chúng ta hiện có, không được biết đến ở phương Tây.

Tiếng Hin-ddi *hình học* kém xa tiếng Hy Lạp. Trong đó không tìm thấy định nghĩa, không định đề, không tiên đề, không chuỗi suy luận logic hoặc hình thức chứng minh cứng nhắc, như với Euclid. Mỗi định lý tự nó là một chân lý độc lập. Giống như người Ai Cập sơ khai, nó mang tính kinh nghiệm. Vì vậy, trong chứng minh định lý về tam giác vuông, Bhaskara vẽ tam giác vuông gấp bốn lần bình phương cạnh huyền, sao cho ở giữa còn lại một hình vuông có cạnh bằng hiệu hai cạnh góc vuông. Sắp xếp hình vuông này và bốn hình tam giác theo một cách



khác, người ta thấy chúng cùng nhau tạo thành tổng bình phương hai cạnh. "Kìa!" Bhaskara nói mà không thêm một lời giải thích

nào. Bretschneider phỏng đoán rằng chứng minh của Pythagore về cơ bản giống như chứng minh này. Ở một chỗ khác, Bhaskara đưa ra một minh chứng thứ hai cho định lý này bằng cách vẽ từ đỉnh của một góc vuông một đường vuông góc với cạnh huyền và so sánh hai tam giác thu được với tam giác đã cho. chúng giống nhau. Bằng chứng này không được biết đến ở châu Âu cho đến khi Wallis re-detected nó. Những người Bà-la-môn không bao giờ hỏi về các thuộc tính của các hình. Họ chỉ coi các quan hệ số liệu có thể áp dụng được trong đời sống thực tiễn. Theo nghĩa Hy Lạp, người Bà-la-môn chưa bao giờ có khoa học về hình học. Điều thú vị là công thức do Brahmagupta đưa ra để tính diện tích của một tam giác xét về các cạnh của nó. Trong công trình vĩ đại được gán cho Heron the Elder, công thức này lần đầu tiên được tìm thấy. Liệu người da đỏ có tự phát minh ra nó hay họ mượn nó từ Heron hay không, vẫn còn là một câu hỏi gây tranh cãi. Một số định lý được đưa ra bởi Brahmagupta về các tứ giác chỉ đúng với những định lý có thể được ghi trên một đường tròn — một giới hạn mà ông đã bỏ qua để phát biểu. Trong số này có mệnh đề của Ptolemæus, rằng tích của các đường chéo bằng tổng tích của các cạnh đối diện. Người Hin-đu đã quen thuộc với việc tính diện tích các hình tròn và các đoạn của chúng, tính độ dài của các dây cung và chu vi của các đa giác đều nội tiếp. Một truyền thống lâu đời của Ấn Độ tạo ra $\pi = 3$, cũng như $= \sqrt{10}$; nhưng Aryabhatta đưa ra giá trị $\frac{31416}{10000}$. Bhaskara đưa ra hai giá trị,—giá trị 'chính xác,' $\frac{3927}{1250}$ và giá trị 'không chính xác,' Archimedean, $\frac{22}{7}$. Một nhà bình luận trên *Lilavati* nói rằng các giá trị này được tính bằng cách bắt đầu bằng một hình lục giác đều nội tiếp và áp dụng lặp đi lặp lại công thức $AD = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \overline{AB}^2}}$, trong đó AB là cạnh của đa giác đã cho và AD là cạnh của đa giác có số cạnh gấp đôi. Bằng cách này, người ta thu được chu vi của các đa giác nội tiếp 12, 24, 48, 96, 192, 384 cạnh. Lấy bán kính = 100, chu vi của hình cuối cùng cho giá trị mà Aryabhatta đã sử dụng cho π.

Người Hindu đã thể hiện sở thích tuyệt vời hơn đối với hình học đối với *lượng giác*. Giống như người Babylon và người Hy Lạp, họ chia vòng tròn thành các góc phần tư, mỗi góc phần tư thành 90 độ và 5400 phút. Do đó, toàn bộ vòng tròn được tạo thành từ 21.600 các phần bằng nhau. Từ 'chính xác' của Bhaskara giá trị cho π người ta thấy rằng bán kính chứa 3438 của các phần hình tròn này. Bước cuối cùng này không phải là của người Hy Lạp. Người Hy Lạp có thể đã đắn đo về việc lấy một phần của *đường cong* làm thước đo của một *đường thẳng*. Mỗi góc phần tư được chia thành 24 phần bằng nhau, sao cho mỗi phần bao gồm 225 đơn vị của toàn bộ chu vi và tương ứng với $3\frac{3}{4}$ độ. Thực tế đáng chú ý là mà người Ấn Độ không bao giờ tính toán, giống như người Hy Lạp, với toàn bộ hợp âm của cung kép, mà luôn với *sine* (*joa*) và *versed sine*. Cách tính về mặt lý thuyết rất đơn giản. Sin của 90° bằng bán kính, hay 3438; sin của 30° là e rõ ràng là một nửa số đó, hoặc 1719. Áp dụng công thức $\sin^2 a + \cos^2 a = r^2$, họ thu được $\sin 45° = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = 2431$. Thay $\cos a$ bằng $\sin(90 - a)$ của nó, và biến $a = 60°$, họ thu được $\sin 60° = \frac{\sqrt{3r^2}}{2} = 2978$. Với các sin của 90, 60, 45 và 30 làm điểm bắt đầu, họ tính toán sin của một nửa góc theo công thức $\operatorname{ver}\sin 2a = 2\sin^2 a$, do đó thu được sin của 22° 30′, 11° 15′, 7° 30′, 3° 45′. Bây giờ họ đã tìm ra sin của phần bù của các góc này, cụ thể là, sin của 86° 15′, 82° 30′, 78° 45′ , 75°, 67° 30′; sau đó họ tính toán sin của một nửa các góc này; sau đó bổ sung của họ; sau đó, một lần nữa, một nửa phần bổ sung của họ; và như thế. Bằng quy trình rất đơn giản này, họ có được sin của các góc cách nhau 3° 45′. Trong bảng này, họ đã khám phá ra một luật duy nhất rằng nếu a, b, c là ba cung liên tiếp sao cho $a - b = b - c = 3° \ 45'$, thì $\sin a - \sin b = (\sin b - \sin c) - \frac{\sin b}{225}$. Công thức này sau đó được sử dụng bất cứ khi nào cần tính toán lại các bảng. Không có luận thuyết lượng giác nào của Ấn Độ về tam giác còn tồn tại. Trong thiên văn học, họ đã giải các tam giác vuông mặt phẳng và mặt cầu. [18]

Điều đáng chú ý là toán học Ấn Độ tham gia vào khoa học của thời đại chúng ta ở mức độ nào. Cả hình thức lẫn tinh thần của số học và đại số thời hiện đại về cơ bản đều là của người Ấn Độ chứ không phải của người Hy Lạp. Hãy nghĩ về những biểu tượng toán học hoàn hảo nhất—kí hiệu Hindu, nghĩ về các phép tính số học của Ấn Độ gần như hoàn hảo như của chúng ta, nghĩ về các phương pháp đại số tao nhã của họ, và sau đó đánh giá liệu những người Bà-la-môn bên bờ sông Hằng không có quyền cho một số tín dụng. Thật không may, một số khám phá xuất sắc nhất của người Hindu trong phép phân tích bất định đã đến châu Âu quá muộn để gây ảnh hưởng mà lẽ ra chúng đã gây ra, nếu chúng đến sớm hơn hai hoặc ba thế kỷ.

NGƯỜI Ả RẬP

Sau chuyến bay của Mohammed từ Mecca đến Medina vào năm 622 SCN, một dân tộc thiểu số thuộc chủng tộc Semitic bắt đầu đóng một vai trò quan trọng trong vở kịch lịch sử. Trước khi mười năm trôi qua, các bộ lạc rải rác trên bán đảo Ả Rập đã được hợp nhất bởi ngọn lửa nhiệt tình tôn giáo thành một quốc gia hùng mạnh. Với thanh kiếm trong tay, những người Ả Rập thống nhất đã khuất phục Syria và Mesopotamia. Ba Tư xa xôi và những vùng đất xa hơn, thậm chí đến tận Ấn Độ, đã được thêm vào lãnh thổ của người Saracen. Họ đã chinh phục Bắc Phi và gần như toàn bộ bán đảo Tây Ban Nha, nhưng cuối cùng đã bị bàn tay kiên quyết của Charles Martel (732 SCN) ngăn cản bước tiến xa hơn ở Tây Âu. Sự thống trị của người Hồi giáo hiện đã mở rộng từ Ấn Độ đến Tây Ban Nha; nhưng một cuộc chiến tranh giành vị trí caliphate đã xảy ra sau đó, và vào năm 755, đế chế Mô ha mét giáo bị chia cắt,—một caliph trị vì ở Bagdad, caliph kia ở Cordova ở Tây Ban Nha. Cuộc hành quân chinh phục vĩ đại của người Ả Rập gây sửng sốt, còn đáng ngạc nhiên hơn nữa là sự dễ dàng mà họ từ bỏ cuộc sống du cư trước đây của mình, chấp nhận một nền văn minh cao hơn và nắm quyền

chủ quyền đối với các dân tộc đã được canh tác. Tiếng Ả Rập đã trở thành ngôn ngữ viết trên khắp các vùng đất bị chinh phục. Với sự cai trị của Abbasides ở phương Đông đã bắt đầu một thời kỳ mới trong lịch sử học tập. Thủ đô Bagdad, nằm trên sông Euphrates, nằm giữa hai trung tâm tư tưởng khoa học cũ,—Ấn Độ ở phía Đông và Hy Lạp ở phía Tây. Người Ả Rập đã được định sẵn là những người gìn giữ ngọn đuốc khoa học Hy Lạp và Ấn Độ, để giữ cho nó cháy sáng trong thời kỳ rối ren và hỗn loạn ở Phương Tây, và sau đó chuyển giao nó cho người châu Âu. Như vậy khoa học đã truyền từ chủng tộc Aryan sang người Semitic, rồi lại quay trở lại với chủng tộc Aryan. Những người Mô ha mét giáo đã bổ sung nhưng rất ít vào kiến thức toán học mà họ nhận được. Thỉnh thoảng họ khám phá một khu vực nhỏ mà con đường đã được chỉ ra trước đó, nhưng họ hoàn toàn không có khả năng khám phá những lĩnh vực mới. Ngay cả những khu vực cao hơn, nơi người Hy Lạp và người Hin-đu thích lang thang—cụ thể là, các mặt cắt hình nón của Hy Lạp và phân tích không xác định của Ấn Độ—cũng hiếm khi được người Ả Rập đặt chân tới. Họ ít suy đoán hơn mà thiên về thực tế hơn.

Abbasides tại Bagdad khuyến khích giới thiệu khoa học bằng cách mời các chuyên gia có năng lực đến tòa án của họ, bất kể quốc tịch hay tín ngưỡng tôn giáo. Y học và thiên văn học là khoa học yêu thích của họ. Do đó, Haroun-al-Raschid, nhà cai trị Saracen nổi tiếng nhất, đã thu hút các bác sĩ Ấn Độ đến Bagdad. Vào năm 772, Caliph Almansur, một nhà thiên văn học người Hinđu, đã đến triều đình với các bảng thiên văn được lệnh dịch sang tiếng Ả Rập. Những bảng này, được người Ả Rập gọi là *Sindhind*, và có lẽ được lấy từ *Brahma-sphuta-siddhanta* của Brahmagupta, có vị trí tuyệt vời chính quyền. Chúng chứa bảng sin quan trọng của Hindu.

Chắc chắn là vào thời điểm này, và cùng với các bảng thiên văn này, các chữ số Hindu, với số 0 và nguyên tắc của vị trí, đã được giới thiệu giữa những người Saracen. Trước thời của Mohammed, người

Ả Rập không có chữ số. Những con số được viết ra bằng chữ. Sau đó, nhiều tính toán liên quan đến việc quản lý tài chính đối với các vùng đất bị chinh phục đã tạo nên một biểu tượng ngắn không thể thiếu. Ở một số địa phương, chữ số của các quốc gia bị chinh phục văn minh hơn đã được sử dụng trong một thời gian. Vì vậy, ở Syria, ký hiệu tiếng Hy Lạp được giữ lại; ở Ai Cập, Coptic. Trong một số trường hợp, các tính từ số có thể đã được viết tắt bằng văn bản. *Diwani-numerals*, được tìm thấy trong từ điển tiếng Ả Rập-Ba Tư, được cho là những từ viết tắt như vậy. Dần dần, nó trở thành thông lệ sử dụng 28 chữ cái Ả Rập trong bảng chữ cái cho các chữ số, tương tự như hệ thống Hy Lạp. Đến lượt nó, ký hiệu này được thay thế bằng ký hiệu Hindu, ký hiệu này đã được các thương nhân và cả những người viết về số học chấp nhận từ khá sớm. Tính ưu việt của nó đã được công nhận rộng rãi đến mức nó không có đối thủ, ngoại trừ trong thiên văn học, nơi ký hiệu chữ cái tiếp tục được sử dụng. Ở đây, ký hiệu chữ cái không gây bất lợi lớn, vì trong số học thập lục phân, được lấy từ *Almagest*, các số thường chỉ có một hoặc hai vị trí phải được viết. [7]

Về hình thức của cái gọi là chữ số Ả Rập, tuyên bố của nhà văn Ả Rập *Albiruni* (mất 1039), người đã dành nhiều năm ở Ấn Độ, được quan tâm. Ông nói rằng hình dạng của các chữ số, cũng như của các chữ cái ở Ấn Độ, khác nhau ở các địa phương khác nhau và người Ả Rập đã chọn từ các hình thức khác nhau phù hợp nhất. Một nhà thiên văn học người Ả Rập nói rằng có nhiều sự khác biệt giữa mọi người trong việc sử dụng các ký hiệu, đặc biệt là các ký hiệu cho 5, 6, 7 và 8. Các biểu tượng được sử dụng bởi người Ả Rập có thể được bắt nguồn từ thế kỷ thứ mười. Chúng tôi tìm thấy sự khác biệt về vật chất giữa những thứ được người Saracens sử dụng ở phương Đông và những thứ được sử dụng ở phương Tây. Nhưng đáng ngạc nhiên nhất là thực tế là các biểu tượng của cả người Ả Rập ở cả phương Đông và phương Tây đều sai lệch một cách lạ thường so với các chữ số *Devanagari* của người Hindu (= chữ số thần thánh) ngày nay,

và rằng chúng giống với đỉnh của của nhà văn La Mã Boethius hơn nhiều. Sự tương đồng kỳ lạ này một mặt của và mặt khác là sự không giống nhau, rất khó giải thích. Giả thuyết hợp lý nhất là giả thuyết của Woepcke: (1) rằng vào khoảng thế kỷ thứ hai sau Công nguyên, trước khi số 0 được phát minh ra, các chữ số Ấn Độ đã được đưa đến Alexandria, từ đó chúng lan sang Rome và cả đến Tây Phi; (2) rằng vào thế kỷ thứ tám, sau khi ký hiệu ở Ấn Độ đã được sửa đổi và hoàn thiện nhiều nhờ việc phát minh ra số 0, người Ả Rập ở Bagdad đã lấy nó từ người Hindu; (3) rằng người Ả Rập ở phương Tây đã mượn quả trứng Columbus, số 0, từ những người ở phương Đông, nhưng giữ lại dạng cũ của chín chữ số, nếu không vì lý do nào khác, đơn giản là để chống lại kẻ thù chính trị của họ phía đông; (4) rằng các dạng cũ được người Tây Ả Rập ghi nhớ là có nguồn gốc từ Ấn Độ, và do đó được gọi là *Gubar-numerals* (= dust-numerals, trong trí nhớ về tập tục tính toán của người Bà-la-môn trên những tấm bảng phủ đầy bụi hoặc cát; (5) rằng, kể từ thế kỷ thứ tám, các chữ số ở Ấn Độ đã trải qua nhiều thay đổi hơn nữa, và mang những hình thức đã được sửa đổi rất nhiều của các chữ số Devanagari hiện đại. [3] Đây là một lý thuyết khá táo bạo, nhưng, dù đúng hay sai, nó giải thích tốt hơn bất kỳ lý thuyết nào khác đã được đề xuất, mối quan hệ giữa các đỉnh, Gubar, Đông-Ả Rập và các chữ số Devanagari.

Người ta đã đề cập rằng vào năm 772, *Siddhanta* của Ấn Độ đã được đưa đến Bagdad và ở đó được dịch sang tiếng Ả Rập. không có bằng chứng nào cho thấy có bất kỳ sự giao thoa nào tồn tại giữa các nhà thiên văn học Ả Rập và Ấn Độ trước hoặc sau thời điểm này, ngoại trừ các chuyến du hành của Albiruni. Nhưng chúng ta nên rất chậm để phủ nhận xác suất rằng các cuộc giao tiếp mở rộng hơn đã thực sự diễn ra.

Chúng ta được thông tin đầy đủ hơn về cách mà khoa học Hy Lạp, trong những làn sóng nối tiếp nhau, lao vào và thâm nhập vào đất Ả Rập. Ở Syria, các ngành khoa học, đặc biệt là triết học và y học,

được các Cơ đốc nhân Hy Lạp trau dồi. Nổi tiếng là các trường học ở Antioch và Emesa, và trước hết là trường học Nestorian đang hưng thịnh ở Edessa. Từ Syria, các bác sĩ và học giả Hy Lạp được gọi đến Bagdad. Bản dịch các tác phẩm từ tiếng Hy Lạp bắt đầu được thực hiện. Một số lượng lớn các bản viết tay bằng tiếng Hy Lạp đã được Caliph *Al Mamun* (813–833) bảo vệ khỏi hoàng đế ở Constantinople và được chuyển giao cho Syria. Những người kế vị Al Mamun tiếp tục công việc đã bắt đầu một cách thuận lợi như vậy, cho đến khi, vào đầu thế kỷ thứ mười, những tác phẩm quan trọng hơn về triết học, y tế, toán học và thiên văn của người Hy Lạp đều có thể được đọc bằng tiếng Ả Rập. Ban đầu, các bản dịch các công trình toán học chắc hẳn rất thiếu sót, vì rõ ràng rất khó để tìm được những dịch giả thông thạo cả tiếng Hy Lạp và tiếng Ả Rập, đồng thời thông thạo toán học. Các bản dịch đã phải sửa đi sửa lại nhiều lần trước khi đạt yêu cầu. Các tác giả Hy Lạp đầu tiên nói bằng tiếng Ả Rập là Euclid và Ptolemæus. Điều này đã được thực hiện dưới triều đại của Haroun-al-Raschid nổi tiếng. Bản dịch sửa đổi của *Elements* của Euclid đã được đặt hàng bởi Al Mamun. Do bản sửa đổi này vẫn còn nhiều lỗi nên một bản dịch mới đã được thực hiện, bởi Honein ben Ishak uyên bác, hoặc bởi con trai ông, Ishak ben Honein. Cuốn thứ mười bốn do Hypsicles viết, đã được thêm vào mười ba cuốn sách của *Elements* và cuốn thứ mười lăm do Damascius viết. Nhưng Tabit ben Korra vẫn phải tạo ra một Euclid Ả Rập đáp ứng mọi nhu cầu. Vẫn còn khó khăn lớn hơn trong việc đảm bảo một bản dịch dễ hiểu của *Almagest*. Trong số các bản dịch quan trọng khác sang tiếng Ả Rập có các tác phẩm của Apollonius, Archimedes, Heron và Diophantus. Do đó, chúng ta thấy rằng trong trong suốt một thế kỷ, người Ả Rập đã tiếp cận được kho báu khổng lồ của khoa học Hy Lạp. Vốn đã ít quen với tư duy trừu tượng, chúng ta không cần ngạc nhiên nếu trong thế kỷ thứ chín, tất cả năng lượng của họ đã cạn kiệt chỉ để chiếm đoạt tài liệu ngoại lai. Không có nỗ lực nào được thực hiện với công việc ban đầu trong toán học cho đến thế kỷ tiếp

theo.

Mặt khác, trong thiên văn học, hoạt động lớn trong nghiên cứu ban đầu đã tồn tại ngay từ thế kỷ thứ chín. Các nghi lễ tôn giáo mà Hồi giáo đòi hỏi đã đặt ra cho các nhà thiên văn học một số vấn đề thực tế. Sự thống trị của người Hồi giáo có phạm vi rộng lớn như vậy, nó vẫn còn ở một số địa phương để nhà thiên văn học xác định "Tín đồ" phải quay về hướng nào trong khi cầu nguyện để anh ta có thể đối mặt với Mecca. Việc cầu nguyện và rửa tội phải diễn ra vào những giờ nhất định cả ngày lẫn đêm. Điều này dẫn đến việc xác định thời gian chính xác hơn. Để ấn định ngày chính xác cho các ngày lễ của người Mô ha mét giáo, cần phải quan sát kỹ hơn các chuyển động của mặt trăng. Ngoài tất cả những điều này, sự mê tín cổ xưa của người phương Đông rằng những sự kiện bất thường xảy ra trên bầu trời theo một cách bí ẩn nào đó ảnh hưởng đến tiến trình của các vấn đề của con người đã làm tăng thêm sự quan tâm đến dự đoán về nhật thực. [7]

Vì những lý do này, tiến bộ đáng kể đã được thực hiện. Các bảng và dụng cụ thiên văn đã được hoàn thiện, các đài quan sát được dựng lên và một loạt các quan sát liên kết được thiết lập. Tình yêu mãnh liệt dành cho thiên văn học và chiêm tinh học này tiếp tục trong suốt thời kỳ khoa học Ả Rập. Cũng như ở Ấn Độ, ở đây, chúng ta hầu như không bao giờ tìm thấy một người nào dành riêng cho toán học thuần túy. Hầu hết những người được gọi là nhà toán học trước hết đều là nhà thiên văn học.

Tác giả đáng chú ý đầu tiên của sách toán học là **Mohammed ben Musa Al Hovarezmi**, người sống dưới triều đại của Caliph Al Mamun (813–833). Ông đã được caliph giao việc thực hiện các đoạn trích từ *Sindhind*, sửa đổi các phiến đá của Ptolemæchúng tôi, thực hiện các quan sát tại Bagdad và Damascus, và đo kinh tuyến của trái đất. Điều quan trọng đối với chúng tôi là công trình của ông về đại số và số học. Phần về số học không còn tồn tại trong bản gốc và

mãi đến năm 1857 người ta mới tìm thấy bản dịch tiếng Latinh của nó. Nó bắt đầu như sau: "Spoken có Algoritmi. Chúng ta hãy dành lời khen ngợi xứng đáng cho Chúa, người lãnh đạo và người bảo vệ của chúng ta." Ở đây, tên của tác giả, *Al Hovarezmi*, đã được chuyển thành *Algoritmi*, từ đó xuất hiện từ hiện đại của chúng ta, *algorithm* , biểu thị nghệ thuật tính toán theo theo bất kỳ cách cụ thể nào. Số học của Hovarezmi, dựa trên nguyên tắc vị trí và phương pháp tính toán của người Hin-đu, "vượt trội', một nhà văn Ả Rập nói, "tất cả những thứ khác đều ngắn gọn và dễ dàng, đồng thời thể hiện trí tuệ và sự thông minh của người Hin-đu trong những phát minh vĩ đại nhất ." Cuốn sách này được theo sau bởi một số lượng lớn các phép tính của các tác giả sau này, chúng khác với những tác giả trước đó chủ yếu ở nhiều phương pháp hơn. Số học Ả Rập nói chung chứa bốn phép toán với số nguyên và phân số, được mô phỏng theo các quy trình của Ấn Độ. Họ giải thích hoạt động của *loại bỏ the 9's*, mà đôi khi được gọi là "bằng chứng Hin-đu." Chúng cũng chứa *regula false* và *regula duorum falsorum*, theo đó các ví dụ đại số có thể được giải mà không cần đại số. Cả hai phương pháp này đều được người Ấn Độ biết đến. *regula false* hoặc *falsa positio* là việc gán một giá trị giả định cho một đại lượng chưa biết, giá trị này, nếu sai, sẽ được sửa chữa bởi một số quy trình như "quy tắc ba." Diophantus đã sử dụng một gần giống với phương pháp này. *regula duorum falsorum* như sau: [7] Để giải phương trình $f(x) = V$, tạm thời giả sử có hai giá trị cho x; cụ thể là $x = a$ và $x = b$. Sau đó lập biểu thức $f(a) = A$ và $f(b) = B$, rồi xác định lỗi $V - A = E_a$ và $V - B = E_b$; thì $x = \frac{bE_a - aE_b}{E_a - E_b}$ cần thiết nói chung là một phép tính gần đúng, nhưng hoàn toàn chính xác bất cứ khi nào $f(x)$ là một hàm tuyến tính của x.

Bây giờ chúng ta quay lại Hovarezmi và xem xét phần còn lại của trong công trình của ông,—phần *đại số*. Đây là cuốn sách đầu tiên được biết đến về chứa chính từ này làm tiêu đề. Trên thực tế, tiêu đề bao gồm hai từ, *aldshebr walmukabala*, bản dịch tiếng Anh gần

nhất của từ này là “phục hồi” và “giảm bớt.” “phục hồi” có nghĩa là chuyển đổi các thuật ngữ phủ định sang từ khác cạnh của phương trình; bằng “sự rút gọn”, sự thống nhất của các thuật ngữ tương tự. Do đó, $x^2 - 2x = 5x + 6$ chuyển qua aldshebr thành $x^2 = 5x + 2x + 6$; và cái này, bởi walmukabala, thành $x^2 = 7x + 6$. Công việc về đại số, giống như số học, của cùng một tác giả, không có gì nguyên bản. Nó giải thích các hoạt động cơ bản và các giải pháp của phương trình tuyến tính và bậc hai. Tác giả đã mượn kiến thức về đại số từ ai? Việc nó hoàn toàn đến từ các nguồn gốc của Ấn Độ là điều không thể, vì người Hindu không có những quy tắc như “phục hồi” và “giảm bớt”. Chẳng hạn, họ không bao giờ có thói quen biến tất cả các số hạng trong một phương trình thành số dương, như được thực hiện bởi quá trình “phục hồi.” Diophantus đưa ra hai quy tắc phần nào giống với quy tắc của tác giả người Ả Rập của chúng ta, nhưng xác suất để người Ả Rập đó học được tất cả môn đại số từ Diophantus đã giảm đi bằng những cân nhắc mà anh ta nhận ra cả hai nghiệm của một phương trình bậc hai, trong khi Diophantus chỉ nhận thấy một; và rằng nhà đại số Hy Lạp, không giống như người Ả Rập, thường bác bỏ các giải pháp phi lý. Do đó, có vẻ như đại số của Hovarezmi không thuần túy Ấn Độ cũng không thuần túy Hy Lạp, mà là sự kết hợp của cả hai, với yếu tố Hy Lạp chiếm ưu thế.

Đại số của Hovarezmi cũng chứa một vài phần ít ỏi về *geometry*. Ông đưa ra định lý về tam giác vuông, nhưng chứng minh nó theo kiểu Hindu và chỉ cho trường hợp đơn giản nhất, khi tam giác vuông cân. Sau đó, anh ấy tính diện tích của hình tam giác, hình bình hành và hình tròn. Đối với π, anh ấy sử dụng giá trị $3\frac{1}{7}$, và cả hai giá trị của Ấn Độ, $\pi = \sqrt{10}$ và $\pi = \frac{62832}{20000}$. Thật kỳ lạ, giá trị cuối cùng sau đó đã bị người Ả Rập lãng quên và được thay thế bằng những giá trị khác kém chính xác hơn. Phần hình học này chắc chắn đến từ Ấn Độ. Các nhà văn Ả Rập sau này lấy hình học của họ gần như hoàn toàn từ Hy Lạp.

Đáng chú ý tiếp theo là ba người con trai của **Musa ben Sakir**, sống ở Bagdad tại triều đình của Caliph Al Mamun. Họ đã viết một số tác phẩm, trong đó chúng tôi đề cập đến một hình học trong đó cũng chứa công thức nổi tiếng về diện tích của một tam giác được biểu thị theo các cạnh của nó. Chúng tôi được biết rằng một trong những người con trai đã đến Hy Lạp, có lẽ để thu thập các bản thảo thiên văn và toán học, và trên đường trở về, anh ấy đã làm quen với Tabit ben Korra. Nhận thấy ở anh ta một nhà thiên văn học tài năng và uyên bác, Mohammed đã mua cho anh ta một vị trí trong số các nhà thiên văn học tại triều đình ở Bagdad. **Tabit ben Korra** (836–901) sinh ra tại Harran ở Mesopotamia. Ông không chỉ thông thạo thiên văn học và toán học mà còn thông thạo các ngôn ngữ Hy Lạp, Ả Rập và Syria. Các bản dịch của ông về Apollonius, Archimedes, Euclid, Ptolemy, Theodosius, được xếp vào hàng tốt nhất. Luận văn của ông về *những con số thân thiện* (trong đó mỗi cái là tổng các thừa số của cái kia) là mẫu vật đầu tiên được biết đến của công trình gốc trong toán học trên đất Ả Rập. Nó cho thấy rằng ông đã quen thuộc với lý thuyết số Pythagore. Tabit đã phát minh ra quy tắc sau để tìm các số dễ thương: Nếu $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ (n là một số nguyên) là ba số nguyên tố, khi đó $a = 2^n pq$, $b = 2^n r$ là một cặp số thân thiện. Do đó, nếu $n = 2$ thì $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$ và $a = 220$, $b = 284$. Tabit cũng cắt một góc.

Đứng đầu trong số các nhà thiên văn học của thế kỷ thứ chín được xếp hạng **Al Battani**, được người Latinh gọi là *Albategnius*. Battan ở Syria là nơi sinh của ông. Những quan sát của ông đã được tôn vinh vì độ chính xác cao. Tác phẩm *De scientia stellarum* của ông đã được Plato Tiburtinus dịch sang tiếng Latinh vào thế kỷ thứ mười hai. Từ bản dịch này đã xuất hiện từ 'sinus,' là tên của một hàm lượng giác. Từ tiếng Ả Rập cho "sine," *dschiba*, có nguồn gốc từ tiếng Phạn *jiva* và giống với từ tiếng Ả Rập *dschaib* , có nghĩa là một vết lõm hoặc vết lõm. Do đó, từ tiếng Latin "xoang" [3] Al Battani là học trò thân cận của Ptolemy, nhưng không hoàn toàn

theo ông. Anh ấy đã thực hiện một bước quan trọng để trở nên tốt hơn, khi anh ấy giới thiệu hợp âm “sine” hay *half* của Ấn Độ, thay cho hợp âm *whole* của Ptolemy . Một cải tiến khác về lượng giác Hy Lạp do người Ả Rập thực hiện cũng chỉ ra những ảnh hưởng tương tự của Ấn Độ. Các mệnh đề và phép toán được người Hy Lạp xử lý theo phương pháp hình học được người Ả Rập thể hiện theo phương pháp đại số. Do đó, *Al Battani* ngay lập tức nhận được từ một phương trình $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=D$, giá trị của θ bằng $\sin\theta=\frac{D}{\sqrt{1+D^2}}$,—một quá trình mà người xưa chưa biết đến. Tất nhiên, anh ấy biết tất cả các công thức cho tam giác cầu được đưa ra trong *Almagest*, nhưng còn đi xa hơn nữa, và thêm một công thức quan trọng của riêng anh ấy cho tam giác xiên; cụ thể là, $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

Vào đầu thế kỷ thứ mười, những rắc rối chính trị nảy sinh ở phương Đông, và kết quả là nhà Abbasides bị mất quyền lực. Hết tỉnh này đến tỉnh khác bị chiếm, cho đến năm 945, tất cả tài sản đều bị tước đoạt khỏi tay họ. May mắn thay, những người cai trị mới ở Bagdad, người Ba Tư Buyides, cũng quan tâm nhiều đến thiên văn học như những người tiền nhiệm của họ. Sự tiến bộ của khoa học không chỉ không bị kiểm soát mà các điều kiện đối với nó thậm chí còn trở nên thuận lợi hơn. Emir *Adud-ed-daula* (978–983) tự hào vì đã tự nghiên cứu thiên văn học. Con trai của ông *Saraf-ed-daula* đã dựng lên một đài quan sát trong khu vườn của cung điện của mình và gọi cả một nhóm học giả đến đó. [7] Trong số đó có *Abul Wefa*, *Al Kuhi* , *Al Sagani*.

Abul Wefa (940–998) sinh ra tại Buzshan ở Chorassan, một vùng giữa những ngọn núi Ba Tư, nơi đã sản sinh ra nhiều nhà thiên văn học Ả Rập. Ông tạo nên một ngoại lệ quan trọng đối với tinh thần không cầu tiến của các nhà khoa học Ả Rập bằng khám phá xuất sắc về *sự biến thiên* của mặt trăng, một bất đẳng thức thường được cho là do Tycho Brahe phát hiện đầu tiên. [11] Abul Wefa đã dịch Diophantus. Ông là một trong những dịch giả tiếng Ả Rập cuối

cùng và là nhà bình luận của các tác giả Hy Lạp. Việc ông coi đại số của Mohammed ben Musa Hovarezmi xứng đáng với bài bình luận của ông cho thấy rằng cho đến nay đại số đã đạt được rất ít hoặc không có tiến bộ nào trên đất Ả Rập. Abul Wefa đã phát minh ra một phương pháp tính toán các bảng sin cho phép sin nửa độ chính xác đến chín chữ số thập phân. Ông đã tự ghi công bằng cách đưa *tiếp tuyến* vào lượng giác và bằng cách tính bảng các tiếp tuyến. Bước đầu tiên của hướng tới điều này đã được thực hiện bởi Al Battani. Thật không may, sự đổi mới này và việc phát hiện ra sự biến đổi của mặt trăng dường như không được những người cùng thời và những người theo ông chú ý. "Chúng ta khó có thể không xem xét hoàn cảnh này như một bằng chứng về sự nô lệ của trí tuệ thuộc về thời kỳ Ả Rập." . Nó chứa một cấu trúc gọn gàng của các góc của polyhedrons thông thường trên hình cầu ngoại tiếp. Ở đây, lần đầu tiên, xuất hiện điều kiện mà sau này trở nên rất nổi tiếng ở phương Tây, rằng việc xây dựng được thực hiện chỉ bằng một lần mở la bàn.

Al Kuhi, nhà thiên văn học thứ hai tại đài thiên văn của tiểu vương tại Bagdad, là học trò thân thiết của Archimedes và Apollonius. Ông đã giải quyết vấn đề, xây dựng một phần của hình cầu có thể tích bằng với một phần đã cho và có bề mặt cong có diện tích bằng diện tích của một phần đã cho khác. Anh ấy, **Al Sagani** và **Al Biruni** đã thực hiện một nghiên cứu về giao diện ba góc. **Abul Gud**, một nhà hình học tài năng, đã giải bài toán bằng giao của một parabol với một hyperbol đều.

Người Ả Rập đã khám phá ra định lý rằng tổng của hai lập phương không bao giờ có thể là một lập phương. **Abu Mohammed Al Hogendi** của Chorassan nghĩ rằng anh ấy đã chứng minh được điều này, nhưng chúng tôi được thông báo rằng việc chứng minh đó có khiếm khuyết. **Al Karhi** của Bagdad, người đã sống vào thời kỳ đầu, đã thực hiện công trình đáng tin cậy về lý thuyết số và đại số của thế kỷ thứ mười một. Chuyên luận của ông về đại số là công

trình đại số vĩ đại nhất của người Ả Rập. Trong đó, anh ta xuất hiện với tư cách là đệ tử của Diophantus. Ông là người đầu tiên vận hành với các nghiệm cao hơn và giải các phương trình dạng $x^{2n} + ax^n = b$. Để giải phương trình bậc hai, ông đưa ra cả chứng minh số học và hình học. Ông là tác giả người Ả Rập đầu tiên đưa ra và chứng minh các định lý về tổng của chuỗi:—

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = (1 + 2 + \cdots + n)\frac{2n+1}{3},$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Al Karhi cũng bận rộn với những phân tích không xác định. Anh ấy đã thể hiện kỹ năng sử dụng các phương pháp của Diophantus, nhưng không thêm được gì vào kho kiến thức đã có. Là một chủ đề cho nghiên cứu ban đầu, phân tích không xác định là quá tinh tế đối với ngay cả những bộ óc Ả Rập tài năng nhất. Đáng ngạc nhiên hơn là thực tế là đại số của Al Karhi không cho thấy dấu vết nào của phép phân tích bất định của Hindu. Nhưng điều đáng ngạc nhiên nhất là, một phép tính số học của cùng một tác giả đã loại trừ hoàn toàn các chữ số Hindu. Nó được tạo hoàn toàn theo theo khuôn mẫu Hy Lạp. Abul Wefa cũng vậy, trong nửa sau của thế kỷ thứ mười, đã viết một số học trong đó các chữ số Hindu không có chỗ đứng. Cách làm này hoàn toàn trái ngược với cách làm của các tác giả Ả Rập khác. Câu hỏi, tại sao các chữ số Hindu lại bị bỏ qua bởi các tác giả nổi tiếng như vậy, chắc chắn là một câu đố. Cantor gợi ý rằng tại một thời điểm có thể từng là các trường phái đối địch nhau, trong đó một trường gần như độc quyền về toán học Hy Lạp, trường kia theo Ấn Độ.

Người Ả Rập đã quen thuộc với các giải pháp hình học của phương trình bậc hai. Người ta đã cố gắng giải các phương trình bậc ba về mặt hình học. Họ đã dẫn đến những giải pháp như vậy nhờ nghiên cứu những câu hỏi như bài toán Archimede, yêu cầu cắt một mặt cầu bằng một mặt phẳng sao cho hai đoạn thẳng đó phải theo một

tỷ lệ quy định. Người đầu tiên phát biểu bài toán này dưới dạng phương trình bậc ba là **Al Mahani** của Bagdad, trong khi **Abu Gafar Al Hazin** là người Ả Rập đầu tiên giải được theo các đường cônic. Các giải pháp cũng được đưa ra bởi Al Kuhi, Al Hasan ben Al Haitam và những người khác. [20] Another bài toán khó, để xác định cạnh của một hình lục giác đều, yêu cầu xây dựng cạnh đó từ phương trình $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$. Nó đã được nhiều người cố gắng và cuối cùng được giải quyết bởi Abul Gud.

Người đã làm nhiều nhất để nâng cao thành một *phương pháp* nghiệm của các phương trình đại số bằng cách giao các đường cônic, là **Omar al Hayyami** của Chorassan, khoảng năm 1079 SCN Ông chia khối lập phương thành hai loại, tam thức và tứ diện, và mỗi lớp thành họ và loài. Mỗi loài được xử lý riêng nhưng theo một kế hoạch chung. Ông tin rằng lập phương không thể giải bằng phép tính, cũng không thể phương trình bậc hai bằng hình học. Ông bác bỏ những gốc rễ tiêu cực và thường thất bại trong việc khám phá tất cả những cái tích cực. Các nỗ lực giải phương trình phương trình bậc hai được thực hiện bởi Abul Wefa, [20], người đã giải theo phương pháp hình học $x^4 = a$ và $x^4 + ax^3 = b$.

Giải phương trình bậc ba bằng cách cắt các đường conic là thành tựu vĩ đại nhất của người Ả Rập trong lĩnh vực đại số. Người Hy Lạp đặt nền móng cho công trình này, vì chính Menæchmus là người đầu tiên xây dựng các nghiệm của $x^3 - a = 0$ hoặc $x^3 - 2a^3 = 0$. Mục đích của anh ấy không phải là tìm số tương ứng với x, mà chỉ đơn giản là xác định cạnh x của một hình lập phương gấp đôi một hình lập phương khác có cạnh a. Mặt khác, người Ả Rập có mục tiêu khác: tìm nghiệm của các phương trình số đã cho. Ở phương Tây, các giải pháp khối Ả Rập vẫn chưa được biết cho đến gần đây. Descartes và Thomas Baker đã phát minh ra những cấu trúc này một lần nữa. Các tác phẩm của Al Hayyami, Al Karhi, Abul Gud, cho thấy cách Người Ả Rập ngày càng rời xa các phương pháp của Ấn Độ, và đặt mình ngay lập tức dưới ảnh hưởng của Hy Lạp. Bằng cách này, họ

đã chặn con đường tiến bộ chống lại chính họ. Người Hy Lạp đã tiến bộ đến mức tiến bộ vật chất trở nên khó khăn với các phương pháp của họ; nhưng người Hindu đã cung cấp những ý tưởng mới, nhiều ý tưởng trong số đó đã bị người Ả Rập bác bỏ.

Với Al Karhi và Omar Al Hayyami, toán học của người Ả Rập ở phương Đông đã đạt đến mức lũ lụt, và bây giờ nó bắt đầu suy thoái. Giữa năm 1100 và 1300 SCN xuất hiện các cuộc thập tự chinh với chiến tranh và đổ máu, trong đó những người theo đạo Cơ đốc châu Âu được hưởng lợi nhiều nhờ tiếp xúc với văn hóa Ả Rập, khi đó vượt trội hơn nhiều so với văn hóa của họ; nhưng đổi lại, người Ả Rập không nhận được khoa học từ những người theo đạo Thiên chúa. Thập tự chinh không phải là kẻ thù duy nhất của người Ả Rập. Trong nửa đầu thế kỷ 13, họ phải chạm trán với đám quân Mông Cổ hoang dã, và đến 1256, bị chúng chinh phục dưới sự lãnh đạo của *Hulagu*. Caliphate tại Bagdad giờ đã không còn tồn tại. Vào cuối thế kỷ 14, vẫn còn một đế chế khác được thành lập bởi Timur hay *Tamerlane*, người Tartar. Trong thời kỳ hỗn loạn sâu rộng như vậy, không có gì ngạc nhiên khi khoa học sa sút. Thật vậy, thật là một điều kỳ diệu khi nó tồn tại. Trong thời kỳ trị vì tối cao của Húc Liệt Ngột, đã sống **Nasir Eddin** (1201–1274), một người có văn hóa rộng và là một nhà thiên văn học tài ba. Anh ta thuyết phục Húc Liệt Ngột xây dựng cho anh ta và các cộng sự của anh ta một đài quan sát lớn tại Maraga. Các chuyên luận về đại số, hình học, số học và bản dịch *Elements*, của Euclid đều do ông soạn thảo. Ngay cả tại triều đình Tamerlane ở Samarkand, khoa học không hề bị bỏ quên. Một nhóm các nhà thiên văn học đã bị thu hút đến tòa án này. **Ulug Beg**, (1393–1449) cháu trai của Tamerlane, bản thân ông cũng là một nhà thiên văn học. Nổi bật nhất vào thời điểm này là **Al Kaschi**, là tác giả của một phép tính số học. Do đó, trong khoảng thời gian hòa bình, khoa học tiếp tục được phát triển ở phương Đông trong nhiều thế kỷ. Nhà văn phương Đông cuối cùng là *Beha Eddin* (1547–1622). *Bản chất của Số học* của ông có cùng đẳng cấp với

tác phẩm của Mohammed ben Musa Hovarezmi, được viết gần 800 năm trước.

"Tuyệt vời là sức mạnh mở rộng của các dân tộc phương Đông, nhờ đôi cánh của gió mà họ chinh phục một nửa thế giới, nhưng tuyệt vời hơn là nghị lực mà với chưa đầy hai thế hệ, họ đã nâng mình từ những giai đoạn tu luyện thấp nhất lên thành khoa học". nỗ lực." Trong suốt những thế kỷ này, thiên văn học và toán học ở Phương Đông đã vượt trội rất nhiều so với những ngành khoa học này ở Phương Tây.

Cho đến nay chúng ta chỉ nói về người Ả Rập ở phương Đông. Giữa người Ả Rập ở phương Đông và phương Tây, vốn nằm dưới các chính phủ riêng biệt, thường tồn tại sự thù địch chính trị đáng kể. Hậu quả của điều này, và do khoảng cách quá lớn giữa hai trung tâm học tập lớn, Bagdad và Cordova, giữa họ có ít sự giao lưu khoa học hơn so với dự kiến tồn tại giữa các dân tộc có cùng tôn giáo và ngôn ngữ viết. Do đó, khóa học khoa học ở Tây Ban Nha hoàn toàn độc lập với khóa học ở Ba Tư. Trong khi đi về phía tây đến Cordova, chúng ta phải dừng lại ở Ai Cập đủ lâu để quan sát rằng ở đó, hoạt động khoa học cũng đã được nhen nhóm. Không phải Alexandria, mà là Cairo với thư viện và đài quan sát, giờ đây là ngôi nhà của học tập. Đứng đầu trong số các nhà khoa học của bà được xếp hạng **Ben Junus** (chết 1008), một người cùng thời với Abul Wefa. Ông đã giải một số bài toán khó trong lượng giác cầu. Một nhà thiên văn học Ai Cập khác là **Ibn Al Haitam** (mất năm 1038), người đã viết về quỹ tích hình học. Đi về phía tây, chúng tôi gặp ở Ma-rốc **Abul Hasan Ali**, người có chuyên luận 'về các công cụ thiên văn' tiết lộ kiến thức thấu đáo về *Conics* của Apollonius. Đến cuối cùng ở Tây Ban Nha tại thủ đô Cordova, chúng tôi bị ấn tượng bởi vẻ tráng lệ lộng lẫy trong kiến trúc của nó. Tại nơi học tập nổi tiếng này, các trường học và thư viện được thành lập vào thế kỷ thứ mười.

Người ta biết rất ít về sự tiến bộ của toán học ở Tây Ban Nha. Cái

tên sớm nhất đến với chúng ta là **Al Madshriti** (mất năm 1007), tác giả của một bài báo thần bí về 'những con số thân thiện'. Các học trò của ông đã thành lập các trường học tại Cordova, Dania và Granada. Nhưng nhà thiên văn học vĩ đại duy nhất trong số những người Saracen ở Tây Ban Nha là **Gabir ben Aflah** của Sevilla, thường được gọi là *Geber*. Ông sống vào nửa sau của thế kỷ thứ mười một. Trước đây người ta tin rằng ông là người phát minh ra đại số, và rằng từ *đại số* bắt nguồn từ 'Gabir' hoặc 'Geber.' Ông được xếp vào hàng những nhà thiên văn lỗi lạc nhất thời bấy giờ, nhưng cũng giống như rất nhiều người cùng thời, các tác phẩm của ông chứa đựng rất nhiều điều thần bí. Công việc chính của ông là thiên văn học trong chín cuốn sách cuốn đầu tiên dành cho lượng giác. Khi giải quyết lượng giác cầu, anh ấy đã thực hiện sự độc lập tuyệt vời trong suy nghĩ. Anh ấy gây chiến với thủ tục lâu đời được áp dụng bởi Ptolemy khi áp dụng "quy tắc sáu lượng" và đưa ra một cách mới của riêng mình, dựa trên 'quy tắc bốn đại lượng.' Đây là: Nếu PP_1 và QQ_1 là hai cung của các đường tròn lớn cắt nhau tại A, và nếu PQ và P_1Q_1 là các cung của các đường tròn lớn được vẽ vuông góc với QQ_1, sau đó chúng ta có tỷ lệ

$$\sin AP : \sin PQ = \sin AP_1 : \sin P_1Q_1.$$

Từ đó, ông rút ra các công thức cho các tam giác vuông hình cầu. Đối với bốn công thức cơ bản đã được Ptolemy đưa ra, ông đã thêm công thức thứ năm do chính ông khám phá ra. Nếu a, b, c, là các cạnh, và A, B, C, là các góc của một tam giác cầu, vuông góc tại A, thì $\cos B = \cos b \sin C$. Điều này thường được gọi là "Định lý Geber." Cấp tiến và táo bạo cũng như những đổi mới của ông trong lượng giác cầu, trong lượng giác mặt phẳng, ông đã đi theo một cách mù quáng con đường lỗi thời của người Hy Lạp. Ông thậm chí còn không chấp nhận 'sine' và 'cosine' của Ấn Độ, mà vẫn sử dụng hợp âm 'của góc gấp đôi' trong tiếng Hy Lạp. Thật đau đớn khi rời xa những ý tưởng cũ, ngay cả với một người Ả Rập độc lập! Sau thời của Gabir ben

Aflah, không có nhà toán học nào nổi tiếng trong số những người Saracen Tây Ban Nha. Vào năm mà Columbus phát hiện ra Châu Mỹ, người Moor đã mất đi chỗ đứng cuối cùng của họ trên đất Tây Ban Nha.

Chúng tôi đã chứng kiến một hoạt động trí tuệ đáng khen ngợi giữa những người Ả Rập. Họ may mắn có được những người cai trị, những người mà bằng sự hào hoa của họ, đã đẩy mạnh nghiên cứu khoa học. Tại tòa án của các caliph, các nhà khoa học được cung cấp thư viện và đài quan sát. Một số lượng lớn các tác phẩm thiên văn và toán học đã được viết bởi các tác giả Ả Rập. Tuy nhiên, chúng tôi không tìm thấy một nguyên tắc quan trọng duy nhất trong toán học do tâm trí người Ả Rập đưa ra. Bất cứ khám phá nào họ thực hiện đều nằm trong các lĩnh vực mà trước đây người Hy Lạp hoặc người Ấn Độ đã đi qua, và bao gồm các đồ vật mà người sau đã bỏ qua trong cuộc hành quân thần tốc của họ. Tâm trí người Ả Rập không sở hữu cái nhìn sâu sắc và phát minh sâu sắc mà các nhà toán học ở châu Âu sau đó đã cách mạng hóa khoa học. Người Ả Rập đã được học, nhưng không phải là bản gốc. Dịch vụ chính của họ đối với khoa học bao gồm điều này, rằng họ đã áp dụng kiến thức của Hy Lạp và Ấn Độ, đồng thời lưu giữ những gì họ nhận được một cách cẩn thận. Khi tình yêu dành cho khoa học bắt đầu phát triển ở phương Tây, họ đã truyền cho người châu Âu những kho báu quý giá của thời cổ đại. Do đó, chủng tộc Semitic, trong Thời kỳ Đen tối, là người trông coi tài sản trí tuệ của người Aryan.

CHÂU ÂU THỜI TRUNG CỔ

Với thế kỷ thứ ba sau Chúa Kitô bắt đầu một kỷ nguyên di cư của các quốc gia ở châu Âu. Những người Goth hùng mạnh rời khỏi đầm lầy và rừng rậm của họ ở phía Bắc và tiến lên theo dòng chảy ổn định ở phía tây nam, đánh bật những Kẻ phá hoại, Sueves và Burgundians, băng qua lãnh thổ La Mã, và chỉ dừng lại và lùi lại

khi đến bờ Địa Trung Hải. Từ dãy núi Ural, lũ hoang dã tràn xuống sông Danube. Đế chế La Mã tan rã và Thời kỳ Đen tối bắt đầu. Nhưng mặc dù chúng có vẻ tăm tối, chúng là mùa nảy mầm của các thể chế và quốc gia của châu Âu hiện đại. Yếu tố Teutonic, một phần thuần túy, một phần pha trộn với Celtic và Latin, tạo ra sự phát triển mạnh mẽ và tươi tốt đó, nền văn minh hiện đại của châu Âu. Hầu như tất cả các quốc gia khác nhau của châu Âu đều thuộc về nguồn gốc Aryan. Vì người Hy Lạp và người Hindu—cả hai chủng tộc Aryan—là những nhà tư tưởng vĩ đại của thời cổ đại, nên các quốc gia phía bắc dãy Alps đã trở thành những nhà lãnh đạo trí tuệ vĩ đại của thời hiện đại.

Giới thiệu toán học La Mã

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét làm thế nào mà những quốc gia vẫn còn là man rợ ở phương Bắc này dần dần sở hữu được những kho báu trí tuệ của thời cổ đại. Với sự lan rộng của Cơ đốc giáo, ngôn ngữ Latinh đã được giới thiệu không chỉ trong giáo hội mà còn trong khoa học và tất cả các giao dịch quan trọng trên thế giới. Đương nhiên, khoa học thời Trung cổ phần lớn được rút ra từ các nguồn tiếng Latinh. Trên thực tế, trong thời kỳ đầu của những thời đại này, các tác giả La Mã là những người duy nhất được đọc ở phương Tây. Mặc dù tiếng Hy Lạp không phải là hoàn toàn xa lạ, nhưng trước thế kỷ thứ mười ba, không một công trình khoa học Hy Lạp nào được đọc hoặc dịch sang tiếng Latinh. Khoa học thực sự ít ỏi có thể thu được từ các nhà văn La Mã, và chúng ta phải đợi vài thế kỷ trước khi có bất kỳ tiến bộ đáng kể nào trong toán học.

Sau thời của Boethius và Cassiodorius, hoạt động toán học ở Ý đã kết thúc. Bông hoa khoa học mỏng manh đầu tiên giữa các bộ lạc đến từ phương Bắc là bách khoa toàn thưædia có tên *Origines*, được viết bởi **Isidorus** (mất năm 636 với tư cách là giám mục của Seville). Tác phẩm này được mô phỏng theo bộ bách khoa toàn thư La

Mãædias của Martianus Capella của Carthage và của Cassiodorius. Một phần của nó được dành cho quadrivium, số học, âm nhạc, hình học và thiên văn học. Ông đưa ra các định nghĩa và giải thích ngữ pháp của các thuật ngữ kỹ thuật, nhưng không mô tả các phương thức tính toán đang thịnh hành sau đó. Sau Isidorus, tiếp theo là một thế kỷ đen tối, cuối cùng đã bị tiêu tan bởi sự xuất hiện của **Bede Đại đức** (672–735), người đàn ông uyên bác nhất nhất trong thời đại của ông. Ông là người gốc Ái Nhĩ Lan, lúc bấy giờ là quê hương của học vấn ở phương Tây. Các tác phẩm của ông bao gồm các chuyên luận về *Computus*, hoặc phép tính thời Phục sinh, và tính toán bằng ngón tay. Có vẻ như biểu tượng ngón tay sau đó đã được sử dụng rộng rãi để tính toán. Việc xác định chính xác thời gian của lễ Phục sinh là một vấn đề vào thời đó đã làm Giáo hội hết sức lo lắng. Người ta mong muốn có ít nhất một nhà sư ở mỗi tu viện, người có thể xác định ngày của các lễ hội tôn giáo và có thể tính toán lịch. Những phép xác định như vậy đòi hỏi một số kiến thức về số học. Do đó, chúng tôi thấy rằng nghệ thuật tính toán luôn tìm thấy một góc nhỏ nào đó trong chương trình giáo dục của các nhà sư.

Năm mà Bede qua đời cũng là năm mà **Alcuin** (735–804) được sinh ra. Alcuin được đào tạo ở Ireland, và được gọi đến triều đình Charlemagne để chỉ đạo sự phát triển giáo dục ở Đế chế Frankish vĩ đại. Charlemagne là người bảo trợ vĩ đại cho việc học và của những người có học. Trong những ngôi đền và tu viện lớn, ông đã thành lập các trường dạy thánh vịnh, viết, hát, tính toán (*computus*), và ngữ pháp. *computus* ở đây có lẽ không chỉ có nghĩa là xác định thời gian của Lễ Phục sinh, mà còn là nghệ thuật tính toán nói chung. Chúng tôi không có cách nào để biết chính xác những phương thức tính toán nào đã được sử dụng sau đó. Không có khả năng là Alcuin đã quen thuộc với các đỉnh của Boethius hoặc với phương pháp tính toán trên bàn tính của người La Mã. Ông thuộc trong danh sách dài các học giả đã đưa lý thuyết về những con số vào thần học. Do đó, số lượng sinh vật được tạo ra bởi Chúa, người đã tạo ra mọi thứ

tốt đẹp, là 6, bởi vì 6 là một số hoàn hảo (tổng các ước số của nó là $1+2+3=6$); 8, mặt khác, là một số không hoàn hảo ($1+2+4<8$); do đó, nguồn gốc thứ hai của loài người bắt nguồn từ con số 8, là con số linh hồn được cho là đã ở trong con tàu của Nô-ê.

Có một tuyển tập "Những bài toán giúp trí óc nhanh nhạy" (*propositiones ad acuendos iuvenes*), chắc chắn là đã có từ 1000 SCN và có thể cũ hơn. Cantor cho rằng chúng được viết sớm hơn nhiều và bởi Alcuin. Sau đây là ví dụ về "Sự cố" này: Một con chó đang đuổi theo một con thỏ, con thỏ có khởi đầu là 150 feet, nhảy 9 feet mỗi khi con thỏ nhảy 7. Để xác định số bước nhảy mà con chó vượt qua con thỏ, 150 sẽ được chia cho 2. Trong tập hợp các bài toán này, diện tích của các mảnh đất hình tam giác và tứ giác được tìm theo cùng một công thức   xấp xỉ như những phương pháp được người Ai Cập sử dụng và được Boethius đưa ra trong hình học của ông. Một bài toán cũ là "bài toán bể chứa nước" (với thời gian mà một số đường ống có thể làm đầy một bể chứa riêng lẻ, để tìm thời gian mà họ điền vào nó cùng nhau), đã được tìm thấy trước đây trong Heron, trong *Anthology* tiếng Hy Lạp và trong các tác phẩm của người Hindu. Nhiều vấn đề cho thấy rằng bộ sưu tập được biên soạn chủ yếu từ các nguồn La Mã. Vấn đề mà, Do tính độc đáo của nó, đưa ra bằng chứng tích cực nhất về nguồn gốc La Mã là về việc giải thích di chúc trong trường hợp sinh đôi. Vấn đề giống hệt với La Mã, ngoại trừ các tỷ lệ khác nhau được chọn. trò giải trí, chúng tôi đề cập đến một trong những con sói, dê và bắp cải, được chèo qua sông trên một chiếc thuyền chỉ chở một người bên cạnh người lái đò. , sói hay dê? Trí tuệ nhanh nhạy" không đòi hỏi kiến thức nào khác ngoài việc nhớ lại một vài công thức được sử dụng trong khảo sát, khả năng giải các phương trình tuyến tính và thực hiện bốn phép tính cơ bản với các số nguyên. Việc nhổ rễ không được yêu cầu ở bất cứ đâu; phân số hầu như không bao giờ xảy ra. [3]

Đế chế vĩ đại của Charlemagne lung lay và gần như sụp đổ ngay sau khi ông qua đời. Chiến tranh và hỗn loạn xảy ra sau đó. Các

hoạt động theo đuổi khoa học đã bị bỏ dở, không được tiếp tục cho đến cuối thế kỷ thứ mười, khi dưới sự cai trị của người Saxon ở Đức và Capetian ở Pháp, thời kỳ hòa bình hơn bắt đầu. Bóng tối dày đặc của vô minh bắt đầu biến mất. Sự hăng hái nghiên cứu toán học của các nhà sư hiện nay chủ yếu là do nghị lực và ảnh hưởng của một người đàn ông,—**Gerbert**. Anh ấy sinh ra ở Aurillac ở Auvergne. Sau khi được giáo dục trong tu viện, ông tham gia nghiên cứu, chủ yếu là toán học, ở Tây Ban Nha. Khi trở về, ông dạy trường ở Rheims trong mười năm và trở nên nổi tiếng nhờ học thuật uyên thâm của mình. Bởi vua Otto I. và những người kế vị ông là Gerbert được kính trọng cao nhất. Ông được bầu làm giám mục của Rheims, sau đó là Ravenna, và cuối cùng được phong làm Giáo hoàng dưới tên Sylvester II bởi người học trò cũ của ông là Hoàng đế Otho III. Ông mất năm 1003, sau một cuộc đời phức tạp liên quan đến nhiều cuộc tranh cãi chính trị và giáo hội. Đó là sự nghiệp của nhà toán học vĩ đại nhất thế kỷ thứ mười ở châu Âu. Người đương thời coi kiến thức toán học của ông là tuyệt vời. Nhiều người thậm chí còn buộc tội ông tội thông đồng với linh hồn ma quỷ.

Gerbert đã mở rộng kho kiến thức của mình bằng cách mua bản sao của những cuốn sách hiếm. Do đó, ở Mantua, ông đã tìm thấy hình học của Boethius. Mặc dù điều này có giá trị khoa học nhỏ nhưng lại có tầm quan trọng lớn trong lịch sử. Vào thời điểm đó, nó là cuốn sách duy nhất mà các học giả châu Âu có thể học các yếu tố của hình học. Gerbert đã nghiên cứu nó một cách sốt sắng, và người ta thường tin rằng chính ông là tác giả của hình học. H. Weissenborn phủ nhận quyền tác giả của mình và tuyên bố rằng cuốn sách được đề cập bao gồm ba phần không thể đến từ một và cùng một tác giả. [21] Hình học này không có gì khác ngoài phần của Boethius, nhưng thực tế là thỉnh thoảng lỗi ở phần sau được sửa ở đây cho thấy tác giả đã nắm vững chủ đề này. "Bài báo toán học đầu tiên của thời Trung cổ xứng đáng với cái tên này," Hankel nói, "là một bức thư của Gerbert gửi cho Adalbold, giám mục của Utrecht," trong

đó giải thích lý do tại sao diện tích của một tam giác lại thu được “về mặt hình học” bằng cách lấy tích của đáy bằng một nửa độ cao của nó, khác với diện tích được tính “về mặt số học” theo công thức $\frac{1}{2}a(a+1)$, được sử dụng bởi các nhà khảo sát, trong đó a là viết tắt của một cạnh của tam giác đều. Ông đưa ra lời giải thích chính xác rằng trong công thức sau, tất cả các ô vuông nhỏ, trong đó tam giác được cho là bị chia, được tính toàn bộ, mặc dù các phần của chúng nhô ra ngoài nó.

Gerbert đã nghiên cứu cẩn thận các công trình toán học của Boethius. Bản thân ông đã xuất bản hai tác phẩm,—*Quy tắc tính toán trên bàn tính*, và *Cuốn sách nhỏ về phép chia số*. Họ cung cấp một cái nhìn sâu sắc về các phương pháp tính toán được thực hiện ở châu Âu trước khi giới thiệu các chữ số Hindu. Gerbert đã sử dụng bàn tính, điều mà Alcuin có lẽ chưa biết. **Bernelinus**, một học trò của Gerbert, mô tả nó bao gồm một tấm ván nhẵn mà các nhà hình học đã quen rắc cát xanh lên đó rồi vẽ sơ đồ của họ. Vì mục đích tính toán, bảng được chia thành 30 cột, trong đó 3 cột dành cho phân số, trong khi 27 cột còn lại được chia thành các nhóm với 3 cột trong mỗi cột. Trong mỗi nhóm, các cột được đánh dấu tương ứng bằng các chữ cái C (*centum*), D (*decem*) và S (*singularis*) hoặc M (*monas*). Bernelinus đưa ra chín chữ số được sử dụng, là các đỉnh của Boethius, sau đó nhận xét rằng các chữ cái Hy Lạp có thể được sử dụng ở vị trí của chúng. [3] Bằng cách sử dụng các cột này, bất kỳ số nào cũng có thể được viết mà không cần thêm số 0, và tất cả các phép tính trong có thể được thực hiện giống như cách chúng ta thực hiện phép tính của mình mà không có cột, nhưng với ký hiệu cho số 0. Thật vậy, các phương pháp cộng, trừ và nhân thịnh hành giữa những người theo chủ nghĩa abacist về cơ bản giống với các phương pháp ngày nay. Nhưng trong một bộ phận có sự khác biệt rất lớn. Các quy tắc ban đầu cho phép chia dường như đã được đóng khung để đáp ứng ba điều kiện sau: (1) Việc sử dụng bảng cửu chương sẽ bị hạn chế càng nhiều càng tốt; ít nhất, nó sẽ không bao giờ được yêu

cầu nhân nhẩm một số có hai chữ số với một số khác có một chữ số. (2) Các phép trừ sẽ được tránh càng nhiều càng tốt và thay thế bằng các phép cộng. (3) Hoạt động sẽ tiến hành theo cách hoàn toàn máy móc, không yêu cầu thử nghiệm. [7] Việc cần thiết phải tạo ra những điều kiện như vậy có vẻ lạ đối với chúng tôi; nhưng cần phải nhớ rằng các nhà sư thời Trung cổ đã không đi học trong thời thơ ấu và học bảng cửu chương khi trí nhớ còn mới. Quy tắc chia của Gerbert là quy tắc lâu đời nhất còn tồn tại. Chúng ngắn gọn đến mức rất mơ hồ đối với những người không quen biết. Có lẽ chúng chỉ nhằm mục đích hỗ trợ trí nhớ bằng cách gợi nhớ các bước tiếp theo trong công việc. Trong các bản viết tay sau này, chúng được nêu đầy đủ hơn. Khi chia bất kỳ số nào cho một số khác có một chữ số, chẳng hạn 668 by 6, số chia trước tiên được tăng lên 10 bằng cách thêm 4. Quá trình này được thể hiện trong hình bên cạnh. [3] Khi nó tiếp tục, chúng ta phải tưởng tượng các chữ số bị gạch bỏ, bị xóa và sau đó được thay thế bằng các chữ số bên dưới. Nó như sau: $600 \div 10 = 60$, nhưng để sửa lỗi, phải thêm 4×60, hoặc 240; $200 \div 10 = 20$, nhưng phải thêm 4×20, hoặc 80. Bây giờ chúng tôi viết cho $60 + 40 + 80$, tổng của nó 180, và tiếp tục như vậy: $100 \div 10 = 10$; mức điều chỉnh cần thiết là 4×10, hoặc 40, cộng với 80, sẽ cho 120. Bây giờ $100 \div 10 = 10$ và hiệu chỉnh 4×10, cùng với 20, cho 60. Tiếp tục như trước, $60 \div 10 = 6$; sự điều chỉnh là $4 \times 6 = 24$. Bây giờ $20 \div 10 = 2$, hiệu chỉnh là $4 \times 2 = 8$. Trong cột đơn vị, chúng tôi hiện có $8 + 4 + 8$, hoặc 20. Như trước đây, $20 \div 10 = 2$; hiệu chỉnh là $2 \times 4 = 8$, không chia hết cho 10 mà chỉ chia hết cho 6, cho thương 1 và số dư 2. Tất cả các thương một phần được cộng lại là $60 + 20 + 10 + 10 + 6 + 2 + 2 + 1 = 111$ và phần còn lại là 2.

C	D	S
		6
		4
6	6	8
~~6~~	~~6~~	~~8~~
~~2~~	~~4~~	~~4~~
~~1~~	~~8~~	~~8~~
~~1~~	~~4~~	~~8~~
	~~2~~	2
	~~4~~	
	~~6~~	
	~~2~~	
	~~2~~	
	~~6~~	~~6~~
	~~2~~	~~2~~
	~~1~~	~~2~~
	1	1

Tương tự nhưng phức tạp hơn, là quá trình khi số chia chứa hai

hoặc nhiều chữ số. Là số chia 27, thì bội số cao hơn tiếp theo của 10, hoặc 30, sẽ được lấy cho số chia, nhưng sẽ cần phải sửa cho 3. Người có đủ kiên nhẫn để thực hiện đến cùng sự phân chia như vậy sẽ hiểu tại sao người ta nói về Gerbert rằng "Regulas deedit, quæ sudantibus abacistis vix intelliguntur." Người đó cũng sẽ hiểu tại sao phương pháp Ả Rập phép chia, khi được giới thiệu lần đầu tiên, được gọi là *divisio aurea*, nhưng phép chia trên bàn tính là *divisio ferrea*.

Trong cuốn sách của mình về bàn tính, Bernelinus dành một chương cho phân số. Tất nhiên, đây là *duodecimals*, lần đầu tiên được sử dụng bởi người La Mã. Vì muốn có một ký hiệu phù hợp, việc tính toán với chúng cực kỳ khó khăn. Đối với chúng tôi, chúng tôi sẽ có thói quen, giống như những người theo thuyết bàn tính đầu tiên, diễn đạt chúng, không phải bằng tử số hoặc mẫu số, mà bằng cách áp dụng các tên, chẳng hạn như *uncia* for $\frac{1}{12}$, *quincunx* cho $\frac{5}{12}$, *dodrans* cho $\frac{9}{12}$.

Vào thế kỷ thứ mười, Gerbert là nhân vật trung tâm trong số những người có học. Vào thời của ông, người phương Tây đã nắm chắc toàn bộ kiến thức toán học của người La Mã. Trong thế kỷ thứ mười một nó đã được nghiên cứu một cách cần mẫn. Mặc dù có nhiều tác phẩm được viết về số học và hình học, nhưng kiến thức toán học ở phương Tây vẫn rất tầm thường. Thực sự rất ít kho báu toán học thu được từ các nguồn của La Mã.

Bản dịch bản thảo tiếng Ả Rập

Bằng sự uyên bác tuyệt vời và hoạt động phi thường của mình, Gerbert đã truyền sức sống mới vào nghiên cứu không chỉ toán học mà còn cả triết học. Các học trò từ Pháp, Đức và Ý tập trung tại Rheims để thưởng thức sự giảng dạy của ông. Khi chính họ trở thành giáo viên, tất nhiên họ không chỉ dạy cách sử dụng bàn tính và hình học, mà còn cả những gì học được về triết học của Aristotle. Triết lý

của ông ban đầu chỉ được biết đến qua các tác phẩm của Boethius. Nhưng sự nhiệt tình ngày càng tăng đối với nó đã tạo ra nhu cầu về các tác phẩm hoàn chỉnh của anh ấy bằng văn bản Hy Lạp đã được mong muốn. Nhưng người Latinh nghe nói rằng người Ả Rập cũng rất ngưỡng mộ chủ nghĩa Peripatet, và họ sở hữu các bản dịch các tác phẩm của Aristotle và các bài bình luận về chúng. Điều này cuối cùng đã khiến họ tìm kiếm và dịch các bản thảo tiếng Ả Rập. Trong quá trình tìm kiếm này, các công trình toán học cũng được chú ý và được dịch sang tiếng Latinh. Mặc dù một số tác phẩm không quan trọng có thể đã được dịch sớm hơn, nhưng thời kỳ hoạt động mạnh nhất bắt đầu vào khoảng 1100. Lòng nhiệt thành thể hiện trong việc tiếp thu kho tàng kiến thức của người Mô ha mét giáo thậm chí còn xuất sắc hơn cả lòng nhiệt thành của chính người Ả Rập, khi vào thế kỷ thứ tám, họ đã cướp đoạt kho tàng khoa học phong phú của Hy Lạp và Hindu.

Trong số những học giả sớm nhất tham gia dịch các bản thảo sang tiếng Latinh là **Athelard of Bath**. Khoảng thời gian hoạt động của ông là vào quý đầu tiên của thế kỷ thứ mười hai. Anh ấy đã đi du lịch nhiều nơi ở Tiểu Á, Ai Cập và Tây Ban Nha, và bất chấp hàng nghìn hiểm nguy để có thể tiếp thu ngôn ngữ và khoa học của người Mô ha mét giáo. Ông đã thực hiện các bản dịch sớm nhất, từ tiếng Ả Rập, *Elements* của Euclid và các bảng thiên văn của Mohammed ben Musa Hovarezmi. Vào khoảng năm 1857, một bản thảo đã được tìm thấy trong thư viện ở Cambridge, được chứng minh là phép tính số học của Mohammed ben Musa bằng tiếng Latinh. Bản dịch này cũng rất có thể là do Athelard.

Cũng trong khoảng thời gian đó, *Plato của Tivoli* hoặc *Plato Tiburtinus* cũng phát triển mạnh mẽ. Ông đã thực hiện một bản dịch về thiên văn học của Al Battani và *Sphærica* của Theodosius. Thông qua trước đây, thuật ngữ *sinus* đã được đưa vào lượng giác.

Khoảng giữa thế kỷ 12, có một nhóm các học giả Cơ đốc giáo bận

rộn làm việc tại Toledo, dưới sự điều hành của sự lãnh đạo của Raymond, sau đó là tổng giám mục Toledo. Trong số những người làm việc dưới sự chỉ đạo của ông, **John of Seville** là nổi bật nhất. Ông chủ yếu dịch các tác phẩm về triết học Aristotle. Điều quan trọng đối với chúng tôi là *liber algorismi*, do ông biên soạn từ các tác giả Ả Rập. Khi so sánh các tác phẩm như thế này với tác phẩm của những người theo chủ nghĩa abacist, chúng tôi nhận thấy ngay sự khác biệt nổi bật nhất của, điều này cho thấy rằng hai bên đã lấy từ các nguồn độc lập. Một số người lập luận rằng Gerbert có được các đỉnh và kiến thức số học của mình, không phải từ Boethius, mà từ những người Ả Rập ở Tây Ban Nha, và phần đó hoặc toàn bộ hình học của Boethius là một đồ giả mạo, có từ thời Gerbert. Nếu đây là trường hợp, thì các tác phẩm của Gerbert sẽ phản bội các nguồn tiếng Ả Rập, cũng như các tác phẩm của John of Seville. Nhưng không có điểm tương đồng được tìm thấy. Gerbert không thể học được từ người Ả Rập cách sử dụng bàn tính, bởi vì tất cả bằng chứng chúng tôi có đều cho thấy rằng họ không sử dụng nó. Cũng không có khả năng là anh ta đã mượn những cái đỉnh của người Ả Rập, bởi vì chúng không bao giờ được sử dụng ở châu Âu ngoại trừ trên bàn tính. Khi minh họa một ví dụ về phép chia, các nhà toán học của thế kỷ thứ mười và mười một nêu một ví dụ bằng chữ số La Mã, sau đó vẽ một bàn tính và chèn vào đó những con số cần thiết bằng các đỉnh. Do đó, có vẻ như bàn tính và bàn tính đã được mượn từ cùng một nguồn. Sự tương phản giữa các tác giả như John of Seville, rút ra từ các tác phẩm Ả Rập, và những người theo chủ nghĩa abacist, nằm ở chỗ, không giống như tác giả sau, người trước đề cập đến người Hindu, sử dụng thuật ngữ *algorism*, tính toán với số 0 và làm không sử dụng bàn tính. Người xưa dạy nhổ rễ, người bán hoa không dạy; họ dạy phân số lục thập phân được người Ả Rập sử dụng, trong khi những người theo chủ nghĩa abacist sử dụng hệ thập phân của người La Mã. [3]

Muộn hơn một chút, John of Seville đã phát triển mạnh mẽ

Gerard of Cremona ở Lombardy. Mong muốn sở hữu *Almagest*, ông đã đến Toledo, và ở đó, vào khoảng 1175, đã dịch tác phẩm tuyệt vời này của Ptolemy. Lấy cảm hứng từ sự phong phú của văn học Mô ha mét giáo, ông đã cho ông đã tự mình nghiên cứu về nó. Ông đã dịch sang tiếng Latinh hơn 70 tác phẩm tiếng Ả Rập. Trong số các chuyên luận toán học, có trong số này, bên cạnh *Almagest*, 15 cuốn sách của Euclid, *Sphærica* của Theodosius, tác phẩm của Menelaus, đại số của Mohammed ben Musa Hovarezmi, thiên văn học của Dshabir ben Aflah và những người khác ít quan trọng hơn.

Vào thế kỷ thứ mười ba, sự nhiệt tình tiếp thu việc học tiếng Ả Rập vẫn tiếp tục. Đứng đầu trong số những người bảo trợ cho khoa học vào thời điểm này là Hoàng đế Frederick II. của Hohenstaufen (mất 1250). Nhờ thường xuyên tiếp xúc với các học giả Mô ha mét giáo, ông đã trở nên quen thuộc với khoa học Ả Rập. Ông đã thuê một số học giả dịch các bản thảo tiếng Ả Rập, và nhờ ông mà chúng tôi có được bản dịch mới của *Almagest*. Một người đứng đầu hoàng gia khác xứng đáng được nhắc đến với tư cách là người quảng bá nhiệt thành cho khoa học Ả Rập là Alfonso X. của Castile (mất 1284). Ông đã tập hợp xung quanh mình một số học giả Do Thái và Cơ đốc giáo, những người đã dịch và biên soạn các tác phẩm thiên văn từ các nguồn tiếng Ả Rập. **Rabbi Zag** và **Iehuda ben Mose Cohen** là nổi bật nhất trong số họ. Các bảng thiên văn do hai người Do Thái này chuẩn bị đã lan truyền nhanh chóng ở Phương Tây, và là cơ sở của mọi tính toán thiên văn cho đến thế kỷ XVI. [7] Số lượng học giả đã hỗ trợ trong việc cấy ghép khoa học Ả Rập trên đất Cơ đốc giáo là rất lớn. Nhưng chúng tôi chỉ đề cập đến một điều nữa. **Giovanni Campano** của Novara (khoảng năm 1260) đã đưa ra một bản dịch mới của Euclid, bản dịch này đã đẩy những bản dịch trước đó ra khỏi lĩnh vực này và tạo thành cơ sở cho các ấn bản in. [7]

Vào cuối thế kỷ 12, người phương Tây sở hữu cái gọi là ký hiệu Ả Rập. Các phương pháp tính toán của người Hindu bắt đầu thay thế các phương pháp rườm rà kế thừa từ La Mã. Đại số, với các

quy tắc giải phương trình tuyến tính và phương trình bậc hai, đã được người Latinh tiếp cận. Hình học của Euclid, *Sphærica* của Theodosius, thiên văn học của Ptolemy và các tác phẩm khác hiện có thể truy cập được bằng tiếng Latinh. Do đó, một lượng lớn tài liệu khoa học mới đã đến tay những người theo đạo Cơ đốc. Tài năng cần thiết để tiêu hóa khối kiến thức không đồng nhất này là không cần thiết. Hình của Leonardo of Pisa tô điểm cho tiền sảnh của thế kỷ thứ mười ba.

Điều quan trọng cần lưu ý là không có công trình toán học hay thiên văn học nào được dịch trực tiếp từ tiếng Hy Lạp trước thế kỷ 15.

Sự thức tỉnh đầu tiên và phần tiếp theo của nó

Cho đến nay, Pháp và Quần đảo Anh đã là trụ sở của toán học ở Châu Âu Cơ đốc giáo. Nhưng vào đầu thế kỷ 13, tài năng và hoạt động của một người đã đủ để trao cho khoa học toán học một ngôi nhà mới ở Ý. Người đàn ông này không phải là một nhà sư, như Bede, Alcuin hay Gerbert, mà là một thương gia, người đang theo đuổi công việc kinh doanh đã tìm thấy thời gian để nghiên cứu khoa học. **Leonardo xứ Pisa** là người mà chúng ta mang ơn trong thời kỳ phục hưng đầu tiên của toán học trên mảnh đất Cơ đốc giáo. Ông còn được gọi là *Fibonacci*, tức là con trai của Bonaccio. Cha của ông là thư ký tại một trong nhiều nhà máy được xây dựng ở bờ biển phía nam và phía đông của Địa Trung Hải bởi các thương nhân dám nghĩ dám làm ở Pisa. Ông đã khiến Leonardo, khi còn là một cậu bé, học cách sử dụng bàn tính. Cậu bé có sở thích toán học mạnh mẽ, và trong những năm sau đó, trong những chuyến công tác rộng rãi ở Ai Cập, Syria, Hy Lạp và Sicily, cậu đã thu thập từ nhiều dân tộc khác nhau tất cả kiến thức mà cậu có thể có được về chủ đề này. Trong tất cả các phương pháp tính toán, ông nhận thấy tiếng Hin-ddi chắc chắn là tốt nhất. Quay trở lại Pisa, ông đã xuất bản, vào năm 1202, tác phẩm vĩ đại của mình, *Liber Abaci*. Một phiên bản sửa đổi của

điều này xuất hiện trong 1228. Tác phẩm này chứa đựng tất cả kiến thức mà người Ả Rập sở hữu về số học và đại số, đồng thời xử lý chủ đề này một cách tự do và độc lập. Điều này, cùng với các cuốn sách khác của Leonardo, cho thấy rằng ông không chỉ đơn thuần là một nhà biên soạn, hay giống như các nhà văn khác của thời Trung cổ, một kẻ bắt chước mù quáng hình thức mà chủ đề đã được trình bày trước đó, mà ông là một người nguyên bản. công nhân có năng lực đặc biệt.

Ông là nhà toán học vĩ đại đầu tiên ủng hộ việc áp dụng "ký hiệu Ả Rập." Phép tính với số 0 là một phần của toán học Ả Rập được những người theo đạo Cơ đốc áp dụng sớm nhất. Trí óc của con người đã được chuẩn bị để tiếp nhận điều này bằng cách sử dụng bàn tính và các đỉnh. Việc tính toán với các cột dần dần bị bỏ rơi và chính từ *abacus* đã thay đổi ý nghĩa của nó và trở thành một từ đồng nghĩa với *algorism*. Đối với số 0, người Latinh lấy tên *zephirum*, từ tiếng Ả Rập *sifr* (*sifra*=empty); do đó có từ tiếng Anh *cipher*. Ký hiệu mới được được quần chúng khai sáng sẵn sàng chấp nhận, nhưng lúc đầu, bị giới bác học bác bỏ. Các thương nhân của Ý đã sử dụng nó từ thế kỷ thứ mười ba, trong khi các tu sĩ trong các tu viện tuân theo các hình thức cũ. Vào khoảng năm 1299, gần 100 năm sau khi xuất bản *Liber Abaci* của Leonardo, các thương nhân Florentine đã bị cấm sử dụng các chữ số Ả Rập trong việc ghi chép sổ sách, và ra lệnh sử dụng các chữ số La Mã hoặc viết các tính từ bằng chữ số. ra đầy đủ. Vào thế kỷ 15, bàn tính với các bộ đếm của nó không còn được sử dụng ở Tây Ban Nha và Ý. Ở Pháp, nó được sử dụng muộn hơn, và nó không biến mất ở Anh và Đức trước giữa thế kỷ XVII. [22] Vì vậy, trong *Winter's Tale* (iv. 3), Shakespeare đã để chú hề bối rối trước một vấn đề mà anh ta không thể làm được nếu không có quầy. Iago (trong *Othello*, i. 1) thể hiện sự khinh miệt của mình đối với Michael Cassio, "xoa dịu một nhà toán học vĩ đại," bằng cách gọi anh ta là "kẻ phản đòn." Peacock nói, thực sự là chung chung, dường như là phương pháp thực hành của loại số học này, rằng các quy

tắc và các nguyên tắc của nó tạo thành một phần thiết yếu của các chuyên luận số học thời đó. Thực tế dường như là các phương pháp cũ đã được sử dụng rất lâu sau khi các chữ số Hindu được sử dụng phổ biến và thông dụng. Với sự cố chấp dai dẳng như vậy, con người bám vào cái cũ!

Liber Abaci, trong nhiều thế kỷ, là kho lưu trữ mà từ đó các tác giả lấy tài liệu cho các tác phẩm về số học và đại số. Trong đó đưa ra các phương pháp tính toán hoàn hảo nhất với số nguyên và phân số, được biết đến vào thời điểm đó; căn bậc hai và căn bậc ba được giải thích; các phương trình bậc nhất và bậc hai dẫn đến các bài toán, xác định hoặc không xác định, được giải bằng các phương pháp 'đơn vị' hoặc 'vị trí kép', và cả bằng đại số thực. Cuốn sách chứa một số lượng lớn các vấn đề. Điều sau đây đã được đề xuất với Leonardo of Pisa bởi một magister ở Constantinople, như một bài toán khó: Nếu A nhận được từ B 7 denare, thì tổng của A gấp năm lần của B; nếu B nhận được từ A 5 denare, thì tổng của B gấp bảy lần của A. Mỗi cái có bao nhiêu? *Liber Abaci* chứa một vấn đề khác, vấn đề này rất đáng quan tâm trong lịch sử, bởi vì nó đã được Ahmes đưa ra với một số biến thể, 3000 năm trước đó : 7 phụ nữ lớn tuổi đến Rome ; mỗi người phụ nữ có 7 con la, mỗi con la mang 7 bao tải, mỗi bao chứa 7 ổ bánh mì, với mỗi ổ bánh mì là 7 dao, mỗi con dao được đặt trong 7 bao kiếm. tổng của tất cả được đặt tên là gì? *Ans.* 137,256. [3]

Vào khoảng năm 1220, Leonardo of Pisa đã xuất bản *Practica Geometriæ* của mình, trong đó có tất cả các kiến thức về hình học và lượng giác được truyền lại cho ông. Các tác phẩm của Euclid và của một số bậc thầy Hy Lạp khác đã được ông biết đến, hoặc từ các bản viết tay bằng tiếng Ả Rập trực tiếp hoặc từ các bản dịch được thực hiện bởi những người đồng hương của ông, Gerard of Cremona và Plato of Tivoli. *Hình học* của Leonardo chứa một minh họa hình học tao nhã của công thức Heron cho diện tích tam giác, dưới dạng hàm của ba cạnh của nó. Leonardo xử lý chất liệu phong phú trước mắt mình bằng kỹ năng và sự nghiêm ngặt của Euclide.

Điều đáng quan tâm hơn cả những tác phẩm trước đó là những tác phẩm chứa đựng những nghiên cứu ban đầu của Fibonacci. Ở đây chúng ta phải nói trước rằng sau khi xuất bản *Liber Abaci*, nhà thiên văn học Dominicus đã tặng Leonardo cho Hoàng đế Frederick II. của Hohenstaufen. Nhân dịp đó, John of Palermo, một công chứng viên hoàng gia, đã đề xuất một số vấn đề và Leonardo đã giải quyết kịp thời. Bài toán đầu tiên là tìm một số x sao cho x^2+5 và x^2-5 đều là các số chính phương. Câu trả lời là $x=3\frac{5}{12}$; cho $(3\frac{5}{12})^2+5=(4\frac{1}{12})^2$, $(3\frac{5}{12})^2-5=(2\frac{7}{12})^2$. Giải pháp tuyệt vời của anh ấy về vấn đề này được đưa ra trong *liber quadratorum* của anh ấy, một bản sao của tác phẩm này đã được anh ấy gửi cho Frederick II. Vấn đề không phải là vấn đề ban đầu với John of Palermo, vì người Ả Rập đã giải quyết những vấn đề tương tự. Một số phần trong giải pháp của Leonardo có thể đã được vay mượn từ người Ả Rập, nhưng phương pháp mà ông sử dụng để xây dựng các hình vuông bằng tổng các số lẻ là nguyên bản với ông.

Vấn đề thứ hai được đề xuất với Leonardo tại giải đấu khoa học nổi tiếng đi kèm với phần trình bày của nhà đại số nổi tiếng này trước người bảo trợ vĩ đại của việc học, Hoàng đế Frederick II., là việc giải phương trình $x^3+2x^2+10x=20$. Cho đến nay, các phương trình bậc ba vẫn chưa được giải bằng phương pháp đại số. Thay vì nghiền ngẫm một cách bướng bỉnh về vấn đề nan giải này, và sau nhiều lần thất bại vẫn ấp ủ những hy vọng thành công mới, ông đã thay đổi phương pháp điều tra của mình và chứng minh bằng một chứng minh rõ ràng và chặt chẽ rằng nghiệm của phương trình này không thể được biểu diễn bằng các đại lượng vô tỷ Euclide, hoặc , nói cách khác, không thể xây dựng chúng chỉ bằng thước và compa. Anh ấy hài lòng với việc tìm ra một xấp xỉ rất gần với nghiệm cần thiết. Công trình của ông về khối lập phương này được tìm thấy trong *Flos*, cùng với lời giải của bài toán thứ ba sau do John ở Palermo đưa ra: Ba người đàn ông sở hữu chung một số tiền chưa biết t; phần của người đầu tiên là $\frac{t}{2}$; cái thứ hai, $\frac{t}{3}$; cái thứ ba, $\frac{t}{6}$. Mong muốn

gửi số tiền vào một nơi an toàn hơn, mỗi người chấp nhận rủi ro một số tiền nhất định; lần đầu tiên mất x, nhưng chỉ tiền gửi $\frac{x}{2}$; thứ hai mang y, nhưng chỉ gửi $\frac{y}{3}$; người thứ ba nhận z và gửi $\frac{z}{6}$. Trong số tiền gửi, mỗi người phải nhận được chính xác $\frac{1}{3}$, để sở hữu phần của mình trong toàn bộ số tiền. Tìm x, y, z. Leonardo cho thấy vấn đề là vô định. Giả sử số tiền mỗi người rút được từ khoản tiền gửi là 7, anh ta thấy $t = 47$, $x = 33$, $y = 13$, $z = 1$.

Người ta có thể nghĩ rằng sau một khởi đầu rực rỡ như vậy, các ngành khoa học được cấy ghép từ người Mô ha mét giáo sang vùng đất Cơ đốc giáo sẽ có một sự phát triển ổn định và mạnh mẽ. Nhưng đây không phải là trường hợp. Trong suốt thế kỷ 14 và 15, khoa học toán học gần như đứng yên. Những cuộc chiến tranh kéo dài đã hút cạn năng lượng của con người và do đó kìm hãm sự phát triển của khoa học. Cái chết của Frederick II. năm 1254 sau đó là một thời kỳ hỗn loạn ở Đức. Các hoàng đế Đức và giáo hoàng liên tục cãi nhau, và Ý chắc chắn bị lôi kéo vào cuộc đấu tranh giữa Guelphs và Ghibellines. Pháp và Anh đã tham gia vào Chiến tranh Trăm năm (1338–1453). Sau đó, tiếp theo ở Anh là Cuộc chiến hoa hồng. Sự phát triển của khoa học bị chậm lại không chỉ do chiến tranh mà còn do ảnh hưởng tai hại của triết học kinh viện. Các nhà lãnh đạo trí thức thời đó đã tranh cãi về những chủ đề tế nhị trong siêu hình học và thần học. Những câu hỏi phù phiếm, chẳng hạn như "Có bao nhiêu thiên thần có thể đứng trên mũi kim?" đã được thảo luận rất thú vị. Tính không rõ ràng và lẫn lộn của các ý tưởng là đặc điểm của lý luận trong thời kỳ này. Trong số các sản phẩm toán học của thời Trung cổ, các tác phẩm của Leonardo of Pisa đối với chúng ta giống như những viên ngọc quý giữa đống rác thải. Các tác giả viết về toán học trong thời kỳ này không ít về số lượng, nhưng những nỗ lực khoa học của họ đã bị phương pháp tư duy kinh viện làm suy yếu. Mặc dù họ sở hữu *Elements* của Euclid, nhưng bản chất thực sự của chứng minh toán học còn quá ít được hiểu rõ, đến nỗi Hankel

tin rằng không ngoa khi nói rằng " kể từ Fibonacci, không một bằng chứng, không vay mượn từ Euclid, có thể được tìm thấy trong toàn bộ văn học của những thời đại này, đáp ứng tất cả các điều kiện cần thiết."

Tiến bộ đáng chú ý duy nhất là đơn giản hóa các hoạt động số và ứng dụng mở rộng hơn của chúng. Trong số những người Ý có bằng chứng về sự trưởng thành sớm của số học. Peacock [22] nói: Người Tuscan nói chung và Florentines nói riêng, nơi có thành phố là cái nôi của văn học và nghệ thuật của thế kỷ 13 và 14, nổi tiếng vì kiến thức về số học và sổ sách kế toán, những thứ rất cần thiết cho hoạt động thương mại rộng rãi của họ; người Ý đã quen thuộc với số học thương mại từ lâu trước các quốc gia khác của châu Âu; chúng tôi mang ơn họ vì đã chính thức đưa vào các cuốn sách số học, dưới những tiêu đề riêng biệt, các câu hỏi trong quy tắc ba đơn và kép, mất và được, tình bạn, trao đổi, lãi đơn và lãi kép, chiết khấu, v.v.

Cũng có một sự cải thiện chậm trong ký hiệu đại số. Đại số Hindu sở hữu một ký hiệu tượng trưng có thể chấp nhận được, tuy nhiên, ký hiệu này hoàn toàn bị người Hồi giáo phớt lờ. Về mặt này, đại số Ả Rập gần giống với đại số của Diophantus hơn nhiều, thứ mà khó có thể được coi là sử dụng các ký hiệu một cách có hệ thống. Leonardo of Pisa không có biểu tượng đại số. Giống như người Ả Rập, ông thể hiện mối quan hệ về độ lớn với nhau bằng dòng hoặc bằng từ. Nhưng trong các tác phẩm toán học của thầy tu *Luca Pacioli* (còn gọi là lăng mộ Lucas de Burgo) các ký hiệu bắt đầu xuất hiện. Chúng chỉ bao gồm các từ viết tắt của các từ tiếng Ý, chẳng hạn như *p* cho *piu* (thêm), *m* cho *meno* (ít hơn), *co* cho *cosa* (sự vật hoặc số lượng chưa biết). " Ký hiệu hiện tại của chúng tôi đã phát sinh ở mức độ gần như không thể hiểu được vì sự tiện lợi đã gợi ý các cách viết tắt khác nhau cho các tác giả khác nhau; và ngôn ngữ biểu tượng hoàn hảo chỉ tiếp cận bằng mắt và cho phép chúng ta nhìn thoáng qua các mối quan hệ phức tạp nhất về số lượng, là kết quả của một loạt lớn các cải tiến nhỏ." [23]

Bây giờ chúng ta sẽ đề cập đến một số tác giả sống vào thế kỷ 13, 14 và nửa đầu thế kỷ 15. Vào khoảng thời của Leonardo of Pisa (1200 SCN), có tu sĩ người Đức **Jordanus Nemorarius**, người đã viết một tác phẩm nổi tiếng một thời về tính chất của các con số (1496), mô phỏng theo phép tính số học của Boetius. Các thuộc tính với những con số tầm thường nhất được đối xử với sự khoa trương và rườm rà đến buồn nôn. Một số học thực tế dựa trên ký hiệu Hindu cũng được viết bởi anh ấy. **John Halifax** (Sacro Bosco, mất năm 1256) đã giảng dạy ở Paris và trích xuất từ *Almagest* chỉ chứa những phần cơ bản nhất của công việc. Đoạn trích này trong gần 400 năm là một tác phẩm rất nổi tiếng và có thẩm quyền tiêu chuẩn. Các nhà văn nổi tiếng khác là **Albertus Magnus** và **George Purbach** ở Đức, và **Roger Bacon** ở Anh. Có vẻ như đây đó một số ý tưởng hiện đại của chúng ta đã được các nhà văn thời Trung cổ dự đoán. Do đó, **Nicole Oresme**, một giám mục ở Normandy (mất năm 1382), lần đầu tiên hình thành một ký hiệu của các lũy thừa phân số, sau đó được Stevinus khám phá lại và đưa ra các quy tắc để vận hành chúng. Ký hiệu của anh ấy hoàn toàn khác với ký hiệu của chúng tôi. **Thomas Bradwardine**, tổng giám mục của Canterbury, đã nghiên cứu về đa giác sao,—một chủ đề gần đây đã nhận được sự chú ý mới. Sự xuất hiện đầu tiên của những đa giác như vậy là với trường học của Pythagoras và của ông. Tiếp theo, chúng ta sẽ gặp những đa giác như vậy trong hình học của Boethius và cả trong bản dịch Euclid từ tiếng Ả Rập của Athelard of Bath. Các tác phẩm triết học của Bradwardine bao gồm các cuộc thảo luận về cái vô hạn và cái vô cùng nhỏ—những chủ đề chưa bao giờ bị mất dấu kể từ đó. Nước Anh có vinh dự sản sinh ra những nhà văn châu Âu sớm nhất về lượng giác. Các bài viết của Bradwardine, của Richard của Wallingford, và John Maudith, cả hai đều là giáo sư tại Oxford, và của Simon Bredon của Winchecombe, có chứa lượng giác của rút ra từ các nguồn tiếng Ả Rập.

Các tác phẩm của thầy tu người Hy Lạp **Maximus Planudes**,

sống ở vào nửa đầu thế kỷ 14, chỉ được quan tâm khi cho thấy rằng các chữ số Hindu sau đó đã được biết đến ở Hy Lạp. Một nhà văn thuộc trường phái Byzantine, như Planudes, là **Moschopulus**, sống ở Constantinople vào đầu thế kỷ 15. Đối với anh ta dường như là do sự ra đời của các ô vuông ma thuật ở châu Âu. Ông đã viết một chuyên luận về chủ đề này. Những ô vuông ma thuật đã được người Ả Rập và có lẽ cả người Hindu biết đến. Các nhà chiêm tinh và thầy thuốc thời Mediæval tin rằng chúng có những đặc tính thần bí và là lá bùa chống lại bệnh dịch khi được khắc trên đĩa bạc.

Năm 1494 *in Summa de Arithmetica, Geometria, Proportione et Proportionalita*, được viết bởi tu sĩ người Tuscan **Lucas Pacioli**, như chúng tôi đã nhận xét, người đầu tiên giới thiệu các ký hiệu trong đại số học. Cuốn sách này chứa đựng tất cả kiến thức vào thời của ông về số học, đại số và lượng giác và là công trình toàn diện đầu tiên xuất hiện sau *Liber Abaci* của Fibonacci. Nó chứa ít tầm quan trọng mà không thể tìm thấy trong tác phẩm vĩ đại của Fibonacci, được xuất bản ba thế kỷ trước. [1]

Có lẽ kết quả lớn nhất của làn sóng học tiếng Ả Rập là việc thành lập các trường đại học. của họ có thái độ như thế nào đối với toán học? *Đại học Paris*, rất nổi tiếng vào đầu thế kỷ 12 dưới sự giảng dạy của Abelard, nhưng ít chú ý đến khoa học này trong thời Trung Cổ. Hình học đã bị bỏ qua, và logic của Aristotle là nghiên cứu yêu thích. Vào khoảng năm 1336, một quy tắc đã được đưa ra rằng không sinh viên nào được lấy bằng nếu không tham dự các bài giảng về toán học, và từ một bài bình luận về sáu cuốn sách đầu tiên của Euclid, ngày 1536, có vẻ như ứng cử viên cho mức độ của A.M. phải tuyên thệ rằng họ đã tham dự các bài giảng về những cuốn sách này. [7] Các kỳ thi, khi được tổ chức, có lẽ không vượt quá cuốn sách đầu tiên, như thể hiện qua biệt danh "magister matheseos," áp dụng cho Định lý Pythagoras, định lý cuối cùng trong cuốn sách đầu tiên. Toán học được chú ý nhiều hơn tại *Đại học Praha*, thành lập năm 1384. Đối với bằng tú tài, sinh viên được yêu cầu tham gia

các bài giảng về công trình nổi tiếng của Sacro Bosco về thiên văn học. Trong số các ứng cử viên cho A.M. được yêu cầu không chỉ sáu cuốn sách của Euclid, mà còn phải có kiến thức bổ sung về toán học ứng dụng. Các bài giảng được đưa ra trên *Almagest*. Tại *Đại học Leipzig*, con gái của Praha, và tại *Cologne*, yêu cầu làm việc ít hơn, và vào cuối thế kỷ 16, các yêu cầu tương tự đã được thực hiện tại những nơi này như tại Praha vào ngày mười bốn. Các trường đại học Bologna, Padua, Pisa, chiếm vị trí tương tự như ở Đức, chỉ khác là các bài giảng thuần túy về chiêm tinh được đưa ra thay cho các bài giảng về *Almagest*. Tại Oxford, vào giữa thế kỷ 15, hai cuốn sách đầu tiên của Euclid đã được đọc. [6]

Do đó, có thể thấy rằng việc nghiên cứu toán học chỉ được duy trì ở các trường đại học một cách nửa vời. Không có nhà toán học và giáo viên vĩ đại nào xuất hiện để truyền cảm hứng cho học sinh. Những năng lượng tốt nhất của các học sinh đã được sử dụng cho những điều tinh tế ngu ngốc trong triết học của họ. Thiên tài của Leonardo of Pisa không để lại ấn tượng lâu dài nào cho thời đại, và một thời kỳ Phục hưng khác của toán học được mong muốn.

CHÂU ÂU HIỆN ĐẠI



CHÚNG TÔI thấy thuận tiện khi chọn thời điểm người Thổ Nhĩ Kỳ đánh chiếm Constantinople là ngày kết thúc thời Trung cổ và Thời hiện đại bắt đầu. Vào khoảng năm 1453, người Thổ Nhĩ Kỳ đã dùng đại bác đập phá các bức tường của đô thị nổi tiếng này, và cuối cùng chiếm được thành phố; Đế chế Byzantine đã sụp đổ, không còn trỗi dậy nữa. Tai họa như sự kiện này đối với phương Đông, nó đã tác động thuận lợi đến sự tiến bộ của việc học ở phương Tây. Một số lượng lớn những người Hy Lạp uyên bác đã trốn sang Ý, mang theo những bản thảo quý giá về văn học Hy Lạp. Điều này góp phần to lớn vào việc hồi sinh học tập cổ điển. Cho đến thời điểm này, các bậc thầy Hy Lạp chỉ được biết đến qua các bản thảo tiếng Ả Rập thường rất hư hỏng, nhưng giờ đây chúng bắt đầu được nghiên cứu từ các nguồn gốc và bằng ngôn ngữ của chính họ. Bản dịch tiếng Anh đầu tiên của Euclid được thực hiện vào năm 1570 từ tiếng Hy Lạp bởi *Sir Henry Billingsley*, với sự hỗ trợ của *John Dee*. [29] Khoảng giữa thế kỷ 15, nghề in ra đời; sách trở nên rẻ và phong phú; máy in đã biến châu Âu thành phòng khán giả. Gần cuối thế kỷ 15, châu Mỹ được phát hiện, và ngay sau đó, trái đất được quay quanh. Nhịp đập và tốc độ của thế giới bắt đầu nhanh hơn. Tâm trí đàn ông trở nên ít đặc quyền hơn; chúng trở nên rõ ràng và mạnh mẽ hơn. Tính không rõ ràng của tư duy, vốn là nét đặc trưng của việc học thời trung cổ, bắt đầu được khắc phục chủ yếu bằng việc trau dồi đều đặn Toán học và Thiên văn học thuần túy. Chủ nghĩa giáo điều bị tấn công; đã nảy sinh một cuộc đấu tranh lâu dài với chính quyền của Giáo hội và các trường phái triết học lâu đời. Hệ thống Copernican được thiết lập để đối lập với Hệ thống Ptolemaic lâu đời. Cuộc cạnh tranh lâu dài và háo hức giữa hai bên đã lên đến đỉnh điểm trong một cuộc khủng hoảng vào thời của Galileo và đã dẫn đến chiến thắng của

hệ thống mới. Do đó, dần dần, tâm trí của con người đã bị cắt đứt khỏi những neo đậu học thuật cũ của họ và được gửi ra biển rộng của cuộc điều tra khoa học, để khám phá những hòn đảo và lục địa mới của sự thật.

THỜI KỲ PHỤC HƯNG

Với thế kỷ XVI bắt đầu một thời kỳ hoạt động trí tuệ gia tăng. Tâm trí con người đã nỗ lực rất nhiều để đạt được tự do của nó. Những nỗ lực nhằm giải phóng nó khỏi quyền lực của Giáo hội đã được thực hiện trước đó, nhưng chúng đã bị bóp nghẹt và bị hủy bỏ. Cuộc nổi dậy vĩ đại và thành công đầu tiên chống lại chính quyền giáo hội được thực hiện ở Đức. Mong muốn mới được phán xét một cách tự do và độc lập trong các vấn đề tôn giáo đã có trước và đi kèm với tinh thần nghiên cứu khoa học ngày càng tăng. Do đó, trong một thời gian, nước Đức dẫn đầu về khoa học. Cô ấy đã tạo ra *Regiomontanus*, *Copernicus*, *Rhæticus*, *Kepler* và *Tycho Brahe*, tại một thời kỳ mà Pháp và Anh hầu như không tạo ra bất kỳ những nhà tư tưởng khoa học vĩ đại. Năng suất khoa học vượt trội này chắc chắn là nhờ vào sự thịnh vượng thương mại của Đức ở một mức độ lớn. Sự sung túc về vật chất là điều kiện thiết yếu cho sự tiến bộ của tri thức. Chừng nào mỗi cá nhân còn có nghĩa vụ thu thập những thứ cần thiết cho cuộc sống của mình, thì không thể có thời gian rảnh rỗi để theo đuổi những mục tiêu cao hơn. Vào thời điểm này, Đức đã tích lũy được của cải đáng kể. Liên minh Hanseatic chỉ huy thương mại của phương Bắc. Mối quan hệ thương mại chặt chẽ đã tồn tại giữa Đức và Ý. Ý cũng xuất sắc trong hoạt động thương mại và doanh nghiệp. Chúng ta chỉ cần đề cập đến Venice, vinh quang của nó bắt đầu từ các cuộc thập tự chinh, và Florence, với các chủ ngân hàng và các nhà sản xuất lụa và len của nó. Hai thành phố này trở thành những trung tâm trí thức lớn. Do đó, nước Ý cũng đã sản sinh ra những người đàn ông trong nghệ thuật, văn học và khoa

học, những người tỏa sáng rực rỡ nhất. Trên thực tế, Ý là quê hương của cái được gọi là thời kỳ Phục hưng.

Do đó, đối với những đóng góp vĩ đại đầu tiên cho các ngành khoa học toán học, chúng ta phải hướng đến Ý và Đức. Ở Ý, đại số đã được bổ sung một cách xuất sắc, ở Đức là thiên văn học và lượng giác.

Trước ngưỡng cửa của kỷ nguyên mới này, chúng ta gặp ở Đức hình bóng của John Mueller, thường được gọi là **Regiomontanus** (1436–1476). Chủ yếu là nhờ ông mà chúng ta mang ơn sự hồi sinh của lượng giác. Ông học thiên văn học và lượng giác tại Vienna dưới thời George Purbach nổi tiếng. sau này nhận thấy rằng các bản dịch tiếng Latinh hiện có của *Almagest* có nhiều lỗi và các tác giả tiếng Ả Rập đã không trung thực với bản dịch gốc Hy Lạp. Do đó, Purbach bắt đầu dịch trực tiếp từ tiếng Hy Lạp. Nhưng anh ấy đã không sống để hoàn thành nó. Công việc của anh ấy được tiếp tục bởi Regiomontanus, người đã vượt xa chủ nhân của mình. Regiomontanus đã học tiếng Hy Lạp từ Hồng y Bessarion, người mà ông đã theo đến Ý, nơi ông ở lại tám năm để thu thập các bản thảo từ những người Hy Lạp đã chạy trốn khỏi Thổ Nhĩ Kỳ. Ngoài bản dịch và bình luận về *Almagest*, ông còn chuẩn bị các bản dịch *Conics* của Apollonius, của Archimedes, và các tác phẩm cơ khí của Heron. Regiomontanus và Purbach đã sử dụng *sine* tiếng Hin-ddi thay cho *cung đôi* của tiếng Hy Lạp. Người Hy Lạp và sau đó là người Ả Rập đã chia bán kính thành 60 phần bằng nhau, và mỗi phần này lại thành 60 phần nhỏ hơn. Người Hindu biểu thị độ dài của bán kính bằng các phần của chu vi, nói rằng trong số 21.600 đô la chia đều cho cái sau, phải mất 3438 đô la để đo bán kính. Regiomontanus, để đảm bảo độ chính xác cao hơn, đã xây dựng một bảng sin trên bán kính được chia thành 600.000 và một bảng khác trên bán kính được chia thập phân thành 10.000.000. Ông nhấn mạnh việc sử dụng *tiếp tuyến* trong lượng giác. Theo một số ý tưởng của thầy, anh ấy đã tính được một bảng các tiếp tuyến. Các nhà toán học Đức không phải là những người châu Âu đầu tiên sử dụng. Ở Anh, nó đã được

biết đến từ một thế kỷ trước với Bradwardine, người đã nói về tiếp tuyến (*umbra recta*) và cotang (*umbraverse*), và với John Maudith. Regiomontanus là tác giả của một số học và cũng là tác giả của một chuyên luận hoàn chỉnh về lượng giác, chứa nghiệm của cả tam giác phẳng và tam giác cầu. Hình thức mà ông đưa ra cho lượng giác vẫn được giữ lại, trong các đặc điểm chính của nó, cho đến ngày nay.

Regiomontanus được xếp vào hàng những người đàn ông vĩ đại nhất mà nước Đức từng sản sinh ra. Sự tinh thông hoàn toàn của ông về thiên văn học và toán học, cùng sự nhiệt tình của ông đối với chúng, đã có ảnh hưởng sâu rộng khắp nước Đức. Danh tiếng của ông ấy rất lớn, đó là Giáo hoàng Sixtus IV. gọi anh ta đến Ý để cải thiện lịch. Regiomontanus rời thành phố Nürnberg thân yêu của mình để đến Rome, nơi ông qua đời vào năm sau.

Sau thời của Purbach và Regiomontanus, lượng giác và đặc biệt là tính toán các bảng tiếp tục chiếm lĩnh các học giả Đức. Các thiết bị thiên văn tinh vi hơn đã được chế tạo, giúp quan sát được độ chính xác cao hơn; nhưng những thứ này sẽ trở nên vô dụng nếu không có các bảng lượng giác có độ chính xác tương ứng. Trong số một số bảng được tính toán, bảng của *Georg Joachim* của Feldkirch ở Tyrol, thường được gọi là **Rhæticus**, xứng đáng được đề cập đặc biệt. Anh ấy đã tính một bảng sin với bán kính = 10.000.000.000 và từ $10''$ đến $10''$; và, sau này, một phương trình khác có bán kính = 1.000.000.000.000.000, và tiếp tục từ $10''$ đến $10''$. Ông cũng bắt đầu xây dựng các bảng tiếp tuyến và cát tuyến, để trở thành mang đến cho cùng mức độ chính xác; nhưng ông đã chết trước khi hoàn thành chúng. Trong mười hai năm, ông đã liên tục sử dụng một số máy tính. Công việc được hoàn thành bởi học trò của ông, **Valentine Otho**, năm 1596. Đây thực sự là một công trình khổng lồ,—một tượng đài về sự cần cù và kiên trì không biết mệt mỏi của người Đức. Các bảng đã được tái bản vào năm 1613 bởi **Pitiscus**, người đã bỏ qua không ngần ngại sửa chữa sai sót cho họ. Những bảng thiên văn có mức độ chính xác tuyệt vời như vậy chưa bao giờ được

mơ tới bởi người Hy Lạp, người Hindu hay người Ả Rập. Rhæticus đó không phải là máy tính sẵn sàng, được biểu thị bằng cách xem của anh ấy trên các dòng trigonometrical. Tính đến thời của anh ấy, lượng giác các chức năng ic đã luôn được xem xét liên quan đến cung; ông là người đầu tiên xây dựng tam giác vuông và làm cho chúng phụ thuộc trực tiếp vào các góc của nó. Chính từ tam giác vuông mà Rhæticus đã nảy ra ý tưởng tính toán cạnh huyền; *nghĩa là* anh ấy là người đầu tiên lên kế hoạch cho một bảng secant. Vieta và Romanus cũng đã làm rất tốt về lượng giác.

Bây giờ chúng ta sẽ rời khỏi chủ đề lượng giác để chứng kiến sự tiến bộ trong việc giải các phương trình đại số. Để làm như vậy, chúng ta phải bỏ Đức để đến Ý. Đại số toàn diện đầu tiên được in ra là của Lucas Pacioli. Anh ấy kết thúc cuốn sách của mình bằng cách nói rằng nghiệm của phương trình $x^3+mx=n$, $x^3+n=mx$ là điều không thể ở tình trạng khoa học hiện nay giống như phương trình bậc hai của đường tròn. Nhận xét này chắc chắn đã kích thích tư duy. Bước đầu tiên trong giải pháp đại số của bậc ba được thực hiện bởi **Scipio Ferro** (mất năm 1526), một giáo sư toán học tại Bologna, người đã giải phương trình $x^3+mx=n$. Người ta không biết gì nhiều hơn về khám phá của ông ngoài việc ông đã truyền đạt nó cho học trò của mình, *Floridas* , vào năm 1505. Thông lệ vào thời đó và trong hai thế kỷ sau đó là giữ bí mật những khám phá, nhằm đảm bảo bằng cách đó một lợi thế so với các đối thủ bằng cách đề xuất các vấn đề ngoài tầm với của họ. Thông lệ này đã dẫn đến vô số tranh chấp liên quan đến mức độ ưu tiên của các phát minh. *Nicolo* xứ Brescia (1506(?)–1557) đã đưa ra giải pháp thứ hai về lập phương. Khi còn là một cậu bé sáu tuổi, Nicolo đã như vậy bị một người lính Pháp chém thậm tệ khiến anh ta không bao giờ có thể tự do sử dụng lưỡi của mình nữa. Do đó, anh ta được gọi là **Tartaglia**, *nghĩa là* người nói lắp. Người mẹ góa bụa của anh ấy quá nghèo để có thể trả học phí cho anh ấy, anh ấy đã học đọc và thu thập kiến thức về tiếng Latinh, tiếng Hy Lạp, và toán học của chính

mình. Sở hữu một trí tuệ phi thường, ông đã có thể xuất hiện với tư cách là giáo viên dạy toán ngay từ khi còn nhỏ. Vào khoảng năm 1530, một Colla đã đề xuất cho ông một số bài toán, một bài toán dẫn đến phương trình $x^3 + px^2 = q$. Tartaglia đã tìm ra một phương pháp không hoàn hảo để giải quyết vấn đề này, nhưng đã giữ bí mật. Ông đã nói về bí mật của mình trước công chúng và do đó đã khiến học trò của Ferro, Floridas, công bố kiến thức của mình về dạng $x^3 + mx = n$. Tartaglia, tin rằng anh ta là một kẻ tầm thường và khoác lác, đã thách thức anh ta tham gia một cuộc thảo luận công khai, diễn ra vào ngày 22 tháng 2 năm 1535. Trong khi đó, nghe nói rằng đối thủ của anh ta đã có được phương pháp từ một bậc thầy đã qua đời và sợ rằng mình sẽ bị đánh bại trong cuộc thi, Tartaglia đã dồn hết tâm huyết, sự cần cù và kỹ năng để tìm ra quy tắc cho các phương trình, và anh ấy đã thành công trong việc đó mười ngày trước ngày được chỉ định, như chính anh ấy khiêm tốn nói. [7] Bước khó khăn nhất, không còn nghi ngờ gì nữa, là việc chuyển từ các hàm vô tỷ bậc hai, được sử dụng trong hoạt động từ xa xưa , đến số vô tỉ bậc ba. Đặt $x = \sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{u}$, Tartaglia nhận thấy rằng các số vô tỷ đã biến mất khỏi phương trình $x^3 + mx = n$, khiến $n = t - u$. Nhưng đẳng thức cuối cùng này, cùng với $(\frac{1}{3}m)^3 = tu$, cho ngay

$$t = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^3 + \left(\frac{m}{3}\right)^3} + \frac{n}{2}, \quad u = \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{2}\right)^3} - \frac{n}{2}.$$

Đây là nghiệm của Tartaglia về $x^3 + mx = n$. Vào ngày 13 tháng 2, anh ấy đã tìm ra nghiệm tương tự cho $x^3 = mx + n$. Cuộc thi bắt đầu vào 22d. Mỗi thí sinh đề xuất ba mươi bài toán. Ai có thể giải được số lớn nhất trong vòng năm mươi ngày sẽ là người chiến thắng. Tartaglia đã giải ba mươi bài toán do Floridas đề xuất trong hai giờ; Floridas có thể không giải quyết được bất kỳ vấn đề nào của Tartaglia. Kể từ bây giờ, Tartaglia đã nghiên cứu phương trình bậc ba với một ý chí. Năm 1541, ông phát hiện ra nghiệm tổng quát cho khối $x^3 \pm px^2 = \pm q$, bằng cách biến đổi nó thành dạng $x^3 \pm mx = \pm n$.

Tin tức về chiến thắng của Tartaglia lan rộng khắp nước Ý. Tartaglia được yêu cầu công bố phương pháp của mình, nhưng ông từ chối, nói rằng sau khi hoàn thành bản dịch từ tiếng Hy Lạp của Euclid và Archimedes, ông sẽ xuất bản một đại số lớn chứa phương pháp của mình. phương thức. Nhưng một học giả đến từ Milan, tên là **Hieronimo Cardano** (1501–1576), sau nhiều lần gạ gẫm, và sau khi đưa ra những lời hứa giữ bí mật trang trọng và thiêng liêng nhất, đã thành công trong việc lấy được từ Tartaglia kiến thức về các quy tắc của mình.

Vào thời điểm này, Cardan đang viết *Ars Magna* của mình và không biết cách nào tốt hơn để tôn vinh tác phẩm của mình hơn là chèn các quy tắc được tìm kiếm nhiều để giải các khối lập phương. Do đó, Cardan đã phá vỡ lời thề long trọng nhất của mình và xuất bản năm 1545 trong giải pháp lập phương *Ars Magna* Tartaglia của mình. Tartaglia trở nên tuyệt vọng. Niềm hy vọng ấp ủ nhất của ông, về việc cống hiến cho thế giới một tác phẩm bất hủ lẽ ra phải là tượng đài cho sự học hỏi sâu sắc và sức mạnh nghiên cứu nguyên bản của ông, đột nhiên bị tiêu tan; vì chiếc vương miện dành cho công việc của anh ấy đã bị cướp mất. Bước đầu tiên của ông là viết lịch sử phát minh của mình; nhưng, để tiêu diệt hoàn toàn kẻ thù của mình, ông đã thách thức Cardan và học trò của mình là Lodovico Ferrari tham gia một cuộc thi: mỗi bên phải đề xuất 31 câu hỏi để bên kia giải trong vòng mười lăm ngày. Tartaglia đã giải được hầu hết các câu hỏi trong bảy ngày, nhưng bên kia đã không gửi lời giải của họ trước khi hết tháng thứ năm; hơn nữa, tất cả các giải pháp của họ ngoại trừ một giải pháp đều sai. Một bản sao và một bản nối lại theo sau. Vô số vấn đề được đề xuất và giải quyết từ cả hai phía. Cuộc tranh chấp đã gây ra nhiều thất vọng và nóng lòng cho các bên, và đặc biệt là cho Tartaglia, người đã gặp nhiều thất vọng khác. Sau khi đã bình phục trở lại, Tartaglia, vào năm 1556, bắt đầu xuất bản tác phẩm mà ông đã ấp ủ bấy lâu nay; nhưng ông đã chết trước khi đạt được việc xem xét các phương trình bậc ba. Thế là

điều ước cao quý nhất của đời ông vẫn chưa được thực hiện; người đàn ông mà chúng ta mang ơn vì đã có đóng góp lớn nhất cho ngành đại số vào thế kỷ 16 đã bị lãng quên, và phương pháp của ông được coi là sự khám phá ra Cardan và được gọi là giải pháp của Cardan.

Đáng chú ý là sự quan tâm lớn mà giải pháp của các hình khối kích thích trên khắp nước Ý. Điều tự nhiên là sau cuộc chinh phục vĩ đại này, các nhà toán học nên tấn công các phương trình trùng phương. Như trong trường hợp lập phương, ở đây, xung lực đầu tiên được đưa ra bởi Colla, người, vào năm 1540, đã đề xuất giải phương trình $x^4+6x^2+36=60x$. Để chắc chắn, Cardan đã nghiên cứu các trường hợp cụ thể ngay từ 1539. Do đó, ông đã giải phương trình $13x^2=x^4+2x^3+2x+1$ bằng một quy trình tương tự như quy trình được sử dụng bởi Diophantus và người Hindu; cụ thể là, bằng cách thêm vào cả hai bên $3x^2$ và do đó hiển thị cả hai số thành hình vuông hoàn chỉnh. Nhưng Cardan đã thất bại trong việc tìm ra giải pháp chung; học trò của ông **Ferrari** đã nâng đỡ danh tiếng cho thầy mình bằng khám phá xuất sắc về nghiệm tổng quát của phương trình trùng phương. Ferrari đã rút gọn phương trình của Colla về dạng $(x^2+6)^2=60x+6x^2$. Để cung cấp cho phần tử bên phải dạng một hình vuông hoàn chỉnh, anh ấy đã thêm vào cả hai phần tử biểu thức $2(x^2+6)y+y^2$, chứa một đại lượng chưa biết mới y. Điều này đã cho anh ta $(x^2+6+y)^2=(6+2y)x^2+60x+(12y+y^2)$. Điều kiện để phần tử bên phải là một hình vuông hoàn chỉnh được biểu thị bằng phương trình bậc ba $(2y+6)(12y+y^2)=900$. Trích xuất căn bậc hai của phương trình trùng phương, anh ta nhận được $x^2+6+y=x\sqrt{2y+6}+\dfrac{900}{\sqrt{2y+6}}$. Giải phương trình bậc ba cho y và thay thế, nó chỉ còn lại để xác định x từ phương trình bậc hai kết quả. Ferrari đã theo đuổi một phương pháp tương tự với các phương trình trùng phương số khác. [7] Cardan rất hân hạnh được công bố phát hiện này trong *Ars Magna* của mình vào năm 1545. Giải pháp của Ferrari đôi khi được gán cho *Bombelli*, nhưng anh ấy không

phải là người phát hiện ra của nó nhiều hơn Cardan là giải pháp được gọi bằng tên của anh ấy.

Đại số Cardan mắc nợ nhiều. Trong *Ars Magna* của mình, anh ấy chú ý đến các nghiệm âm của một phương trình, gọi chúng là *hư cấu*, trong khi các nghiệm dương được gọi là *real*. Các gốc ảo mà anh ta không xét đến; những trường hợp chúng xuất hiện, anh ấy gọi là không thể. Cardan cũng quan sát thấy khó khăn trong trường hợp bất khả qui trong lập phương, giống như phép cầu phương của hình tròn, kể từ đó "đã làm khổ rất nhiều sự khéo léo ngoan cố của các nhà toán học". Nhưng ông không hiểu bản chất của nó. Nó vẫn dành cho **Raphael Bombelli** của Bologna, người đã xuất bản vào năm 1572 một đại số có công lớn, để chỉ ra thực tế của biểu thức tưởng tượng rõ ràng mà căn nguyên giả định, và do đó đặt nền tảng cho một kiến thức sâu sắc hơn về tưởng tượng số lượng.

Sau thành công rực rỡ này trong việc giải các phương trình bậc ba và bậc bốn, có lẽ không còn ai nghi ngờ rằng với sự trợ giúp của các hàm vô tỷ bậc cao hơn, có thể tìm ra nghiệm của các phương trình bậc bất kỳ. Nhưng mọi nỗ lực tìm nghiệm đại số của bậc năm đều không có kết quả, và cuối cùng, Abel đã chứng minh rằng mọi hy vọng tìm được nghiệm đại số cho các phương trình cao hơn bậc bốn là hoàn toàn không tưởng.

Vì không thể tìm ra nghiệm bằng căn của các phương trình cấp cao hơn, nên không thể làm gì khác ngoài việc đặt ra các quy tắc theo đó ít nhất các giá trị số của các nghiệm có thể được xác định. Cardan đã áp dụng quy tắc "vị trí sai" của Hindu (được ông gọi là *regula aurea*) cho khối lập phương, nhưng phương thức tính gần đúng này cực kỳ thô. Một phương pháp tốt hơn vô song được phát minh bởi **Franciscus Vieta**, một nhà toán học người Pháp, người có thiên tài siêu việt đã làm phong phú thêm toán học với một số đổi mới quan trọng. Lấy phương trình $f(x) = Q$, trong đó $f(x)$ là một đa thức chứa các lũy thừa khác nhau của x, với các hệ số bằng số,

và Q là một số đã cho, trước tiên Vieta thay vào $f(x)$ một giá trị gần đúng đã biết của nghiệm, và sau đó chỉ ra rằng một con số khác của nghiệm có thể thu được bằng phép chia. Sự lặp lại của cùng một quy trình sẽ cho ra hình tiếp theo của nghiệm số, v.v. Do đó, trong $x^2 + 14x = 7929$, lấy 80 làm căn gần đúng và đặt $x = 80 + b$, ta được

$$(80 + b)^2 + 14(80 + b) = 7929,$$

hoặc

$$174b + b^2 = 409.$$

Vì $174b$ lớn hơn nhiều so với b^2, nên chúng ta đặt $174b = 409$ và do đó thu được $b = 2$. Do đó, xấp xỉ thứ hai là 82. Đặt $x = 82 + c$, sau đó $(82 + c)^2 + 14(82 + c) = 7929$ hoặc $178c + c^2 = 57$. Như trước đây, đặt $178c = 57$, sau đó $c = 0,3$ và phép tính gần đúng thứ ba cho $82,3$. Giả sử $x = 82,3 + d$ và thay thế, cho $178,6d + d^2 = 3,51$ và $178,6d = 3,51$, $\therefore d = 0,01$; cho xấp xỉ thứ tư $82,31$. Theo cách tương tự, $e = 0,009$ và giá trị nghiệm của phương trình đã cho là $82,319\ldots$. Đối với quá trình này, Vieta đã được những người đương thời vô cùng ngưỡng mộ. Nó được sử dụng bởi Harriot, Oughtred, Pell, và những người khác. Nguyên tắc của nó giống hệt với nguyên tắc chính liên quan đến các phương pháp xấp xỉ của Newton và Horner. Thay đổi duy nhất nằm ở cách sắp xếp của tác phẩm. Sự thay đổi này được thực hiện để cung cấp cơ sở vật chất và bảo mật trong quá trình phát triển của gốc.

Chúng ta dừng lại một chút để phác họa cuộc đời của Vieta, nhà toán học lỗi lạc nhất của Pháp ở thế kỷ XVI. Ông sinh ra ở Poitou năm 1540 và mất năm 1603 tại Paris. Ông đã phục vụ nhà nước trong suốt cuộc đời dưới thời Henry III. và Henry IV. Do đó, anh ấy không phải là một nhà toán học chuyên nghiệp, nhưng tình yêu của anh ấy đối với khoa học lớn đến mức anh ấy ở trong phòng của mình để nghiên cứu, đôi khi vài ngày liên tiếp, không ăn và ngủ nhiều hơn mức cần thiết để duy trì bản thân. Vì vậy, sự tận tâm to lớn đối với khoa học trừu tượng càng đáng chú ý hơn, bởi vì ông sống vào thời kỳ hỗn loạn chính trị và tôn giáo không ngừng. Trong cuộc

chiến chống lại Tây Ban Nha, Vieta đã phục vụ Henry IV. bằng cách giải mã các bức thư bị chặn được viết bằng một loại mật mã và được Tòa án Tây Ban Nha gửi tới thống đốc Hà Lan của họ. Người Tây Ban Nha cho rằng đã khám phá ra chìa khóa của ma thuật.

Một đại sứ từ Hà Lan đã từng nói với Henry IV. rằng nước Pháp không sở hữu một máy đo hình học duy nhất có khả năng giải một bài toán do nhà toán học người Bỉ, Adrianus Romanus, đề xuất cho các máy đo hình học. Đó là nghiệm của phương trình bậc bốn mươi lăm:—

$$45y - 3795y^3 + 95634y^5 - \cdots + 945y^{41} - 45y^{43} + y^{45} = C.$$

Henry IV. được gọi là Vieta, người đã theo đuổi những cuộc điều tra tương tự, ngay lập tức thấy rằng vấn đề đầy cảm hứng này chỉ đơn giản là phương trình mà $C = 2\sin\phi$ được biểu diễn dưới dạng $y = 2\sin\frac{1}{45}\phi$; rằng, vì $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, nên chỉ cần chia một góc thành 5 phần bằng nhau, và sau đó hai lần thành 3,—một phép chia có thể được thực hiện bằng các phương trình tương ứng của độ năm và độ ba. Điều tuyệt vời là Vieta đã khám phá ra 23 nghiệm của phương trình này, thay vì chỉ có một. Lý do tại sao anh ấy không tìm thấy 45 lời giải, là vì những lời giải còn lại liên quan đến sin âm, điều mà anh ấy không thể hiểu được. Các nghiên cứu chi tiết về bài toán cũ nổi tiếng về tiết diện của một góc thành một số lẻ các phần bằng nhau, đã đưa Vieta đến việc khám phá ra một nghiệm lượng giác của trường hợp bất khả quy Cardan trong lập phương. Anh ấy đã áp dụng phương trình $\left(2\cos\frac{1}{3}\phi\right)^3 - 3\left(2\cos\frac{1}{3}\phi\right) = 2\cos\phi$ thành nghiệm của $x^3 - 3a^2x = a^2b$, khi $a > \frac{1}{2}b$, bằng cách đặt $x = 2a\cos\frac{1}{3}\phi$, và xác định ϕ từ $b = 2a\cos\phi$.

Nguyên tắc chính được ông sử dụng trong giải phương trình là *reduction*. Anh ấy giải phương trình bậc hai bằng cách thực hiện một phép thay thế phù hợp sẽ loại bỏ số hạng chứa x ở cấp độ đầu tiên. Giống như Cardan, anh rút biểu thức tổng quát của lập phương thành dạng $x^3 + mx + n = 0$; sau đó, giả sử $x = \left(\frac{1}{3}a - z^2\right) \div z$ và thay

thế, anh ấy nhận được $z^6 - bz^3 - \frac{1}{27}a^3 = 0$. Đặt $z^3 = y$, anh ta có một phương trình bậc hai. Trong giải pháp phương trình trùng phương, Vieta vẫn đúng với nguyên lý rút gọn của mình. Điều này mang lại cho anh ta dung môi khối nổi tiếng. Do đó, anh ấy tuân thủ nguyên tắc yêu thích của mình, và do đó đưa vào đại số một phương pháp thống nhất khiến chúng ta ngưỡng mộ sôi nổi. Trong đại số của Vieta, chúng ta khám phá ra một phần kiến thức về các mối quan hệ tồn tại giữa các hệ số và nghiệm của một phương trình. Ông chỉ ra rằng nếu hệ số của số hạng thứ hai trong một phương trình bậc hai trừ đi tổng của hai số có tích là số hạng thứ ba, thì hai số đó là nghiệm của phương trình. Vieta từ chối tất cả trừ gốc tích cực; do đó anh ta không thể nhận thức đầy đủ các mối quan hệ được đề cập.

Sự đổi mới mang tính thời đại nhất trong đại số của Vieta là việc biểu thị các đại lượng chung hoặc không xác định bằng các chữ cái trong bảng chữ cái. Để chắc chắn, Regiomontanus và Stifel ở Đức, và Cardan ở Ý, đã sử dụng các chữ cái trước ông, nhưng Vieta đã mở rộng ý tưởng và lần đầu tiên biến nó thành một phần thiết yếu của đại số. Đại số mới được ông gọi là *logistica speciosa* để phân biệt với *logistica numerosa* cũ. Chủ nghĩa hình thức của Vieta khác biệt đáng kể so với ngày nay. Phương trình $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a+b)^3$ được viết bởi anh ấy "a cubus $+ b$ in a quadr. $3 + a$ in b quadr. $3 +$ b cubo æqualia $\overline{a+b}$ cubo." Trong các phương trình số, đại lượng chưa biết được ký hiệu là N, bình phương của nó là Q, và lập phương là C. Do đó, phương trình $x^3 - 8x^2 + 16x = 40$ được viết là $1C - 8Q + 16N æqual.$ 40. Quan sát rằng số mũ và biểu tượng của chúng ta (=) cho đẳng thức chưa được sử dụng; nhưng Vieta đó đã sử dụng chữ thập tiếng Malta (+) làm ký hiệu viết tắt cho phép cộng và (−) cho phép trừ. Hai ký tự này không được sử dụng phổ biến trước thời Vieta. "Thật kỳ lạ," Hallam nói, "rằng những khám phá về sự tiện lợi lớn nhất, và, rõ ràng, không vượt quá sự khéo léo của một thầy giáo làng, lẽ ra đã bị bỏ qua bởi những người có sự nhạy bén phi thường như Tartaglia, Cardan và Ferrari ; và hầu như không

kém đến mức, nhờ sự nhạy bén đó, họ đã bỏ qua sự trợ giúp của những thủ thuật này, trong đó chúng tôi cho rằng rất nhiều tiện ích của biểu thức đại số bao gồm. chậm mà chúng được đưa vào sử dụng phổ biến. Chúng thường được tạo ra một cách tình cờ hơn là thiết kế, và các tác giả của chúng ít có khái niệm về tác động của sự thay đổi mà họ đang tạo ra. Sự ra đời của các ký hiệu + và − dường như là do người Đức, mặc dù họ đã không làm phong phú đại số trong thời kỳ Phục hưng bằng những phát minh vĩ đại, cũng như người Ý, vẫn nuôi dưỡng nó với sự nhiệt tình tuyệt vời. Số học của **John Widmann**, được in vào SCN 1489 ở Leipzig, là cuốn sách sớm nhất của có tìm thấy các ký hiệu + và −. Có những dấu hiệu khiến chúng tôi phỏng đoán rằng chúng được sử dụng đầu tiên giữa các thương nhân. Chúng lại xuất hiện trong số học của Grammateus, một giáo viên tại Đại học Vienna. Học trò của ông, Christoff Rudolff, tác giả của cuốn sách giáo khoa đầu tiên về đại số bằng tiếng Đức (in năm 1525), cũng sử dụng các ký hiệu này. Stifel cũng vậy, ông đã cho ra đời ấn bản thứ hai của *Coss* của Rudolff vào năm 1553. Do đó, dần dần, việc áp dụng chúng đã trở nên phổ biến. Có một ký hiệu viết tắt khác mà chúng ta có nguồn gốc từ người Đức. Trong một bản viết tay được xuất bản vào khoảng thế kỷ 15, một dấu chấm được đặt trước một số được tạo ra để biểu thị việc rút ra một gốc của số đó. Dấu chấm này là phôi thai của biểu tượng hiện tại của chúng ta cho căn bậc hai. Christoff Rudolff, trong môn đại số của mình, nhận xét rằng "cơ số bậc hai, để cho ngắn gọn, được chỉ định trong thuật toán của ông với ký tự $\surd$, as $\sqrt{4}$." Ở đây, dấu chấm đã phát triển thành một biểu tượng giống như biểu tượng của chúng ta. *Michael Stifel* cũng đã sử dụng biểu tượng này. Dấu đẳng thức của chúng ta là do **Robert Recorde** (1510–1558), tác giả của *The Whetstone of Witte* (1557), chuyên luận tiếng Anh đầu tiên về đại số. Anh ấy chọn biểu tượng này vì không có hai thứ nào có thể bằng nhau hơn hai đường thẳng song song =. Dấu ÷hoặc phép chia lần đầu tiên được sử dụng bởi *Johann Heinrich Rahn*, người Thụy Sĩ, vào 1659, và được giới

thiệu ở Anh bởi *John Pell* vào 1668.

Michael Stifel (1486?–1567), nhà đại số học người Đức vĩ đại nhất của thế kỷ 16, sinh ra ở Esslingen và mất ở Jena. Anh ấy được đào tạo tại tu viện ở quê hương của mình, và sau đó trở thành mục sư Tin lành. Nghiên cứu về ý nghĩa của những con số thần bí trong sách Khải huyền và sách Đa-ni-ên đã lôi kéo ông đến với toán học. Ông nghiên cứu các tác phẩm của Đức và Ý, và xuất bản vào năm 1544, bằng tiếng Latinh, một cuốn sách có tựa đề *Arithmetica integra*. Melanchthon đã viết lời tựa cho nó. Ba phần của nó lần lượt xử lý các số hữu tỷ, số vô tỷ và đại số. Stifel đưa ra một bảng chứa các giá trị số của các hệ số nhị thức cho các lũy thừa dưới 18. Ông nhận thấy một lợi thế khi để một cấp số nhân tương ứng với một cấp số cộng, và đi đến cách gọi các lũy thừa tích phân bằng số. Đây là những mầm mống của lý thuyết về số mũ. Năm 1545, Stifel xuất bản một số học bằng tiếng Đức. Ấn bản *Coss* của Rudolff chứa các quy tắc để giải phương trình bậc ba, bắt nguồn từ của các đăng.

Ở trên, chúng tôi đã nhận xét rằng Vieta đã loại bỏ nghiệm âm của các phương trình . Thật vậy, chúng ta thấy rất ít nhà đại số học trước và trong thời kỳ Phục hưng hiểu được ý nghĩa thậm chí của các đại lượng âm. Fibonacci hiếm khi sử dụng chúng. Pacioli phát biểu quy tắc “trừ nhân với trừ cho cộng”, nhưng nó thực sự chỉ áp dụng cho sự phát triển tích của $(a-b)(c-d)$; các đại lượng hoàn toàn âm không xuất hiện trong tác phẩm của ông. “Cossist” (nhà đại số) vĩ đại người Đức, *Michael Stifel*, ngay từ năm 1544 đã nói về những con số “vô lý” hoặc “hư cấu dưới 0” và xuất hiện khi “số thực trên 0” được trừ đi từ 0. Cardan, cuối cùng, nói về một “trừ sạch”; “Nhưng những ý tưởng này,” Hankel nói, “vẫn còn thưa thớt, và cho đến đầu thế kỷ XVII, các nhà toán học chỉ xử lý các đại lượng dương tuyệt đối.” của một phương trình, là *Harriot* ở Anh. Về việc công nhận các gốc phủ định, Cardan và Bombelli đã vượt xa tất cả các nhà văn của thời Phục hưng, bao gồm cả Vieta. Tuy nhiên, ngay cả họ cũng chỉ đề cập đến cái gọi là nguồn gốc sai lầm hoặc hư cấu này một cách

thoáng qua và không nắm bắt được ý nghĩa và tầm quan trọng thực sự của chúng. Về chủ đề này, Cardan và Bombelli đã tiến gần đến điểm giống như Bhaskara người Hin-đu, người đã nhìn thấy những gốc rễ tiêu cực, nhưng không tán thành chúng. Việc khái quát hóa khái niệm về số lượng để bao gồm cả số âm là một quá trình cực kỳ chậm chạp và khó khăn trong sự phát triển của đại số.

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét lịch sử của hình học trong thời kỳ Phục hưng. Không giống như đại số, nó hầu như không đạt được bất kỳ tiến bộ nào. Lợi ích lớn nhất là kiến thức sâu sắc hơn về hình học Hy Lạp. Không có tiến bộ cơ bản nào được thực hiện trước thời của Descartes. Regiomontanus, Xylander of Augsburg, Tartaglia, Commandinus of Urbino ở Ý, Maurolycus và những nơi khác, đã dịch các công trình hình học từ tiếng Hy Lạp. **John Werner** của Nürnberg đã xuất bản vào năm 1522 công trình đầu tiên về hình nón xuất hiện ở Châu Âu theo Cơ đốc giáo. Không giống như các nhà hình học cũ, ông đã nghiên cứu các mặt cắt liên quan đến hình nón, và **Maurolycus** của Messina (1494–1575) tiếp nối phương thức nghiên cứu đường cônic này. Người sau này chắc chắn là nhà hình học vĩ đại nhất của thế kỷ 16. Từ các ghi chú của Pappus, anh ấy đã cố gắng khôi phục cuốn sách thứ năm bị mất tích của Apollonius trên *maxima* và *minima*. Công việc chính của anh ấy là do anh ấy tài giỏi và cách xử lý ban đầu của các mặt cắt hình nón, trong đó ông thảo luận về các tiếp tuyến và tiệm cận đầy đủ hơn so với Apollonius đã làm, và áp dụng chúng cho các vấn đề vật lý và thiên văn khác nhau.

Nhà hình học hàng đầu của Bồ Đào Nha là **Nonius**; của Pháp, trước Vieta, là **Peter Ramus**, người đã thiệt mạng trong vụ thảm sát ở St. Bartholomew. *Vieta* rất quen thuộc với hình học cổ đại. Hình thức mới mà ông mang lại cho đại số, bằng cách biểu diễn các đại lượng tổng quát bằng các chữ cái, giúp ông chỉ ra dễ dàng hơn cách thức xây dựng căn của hình lập phương phụ thuộc vào các bài toán cổ xưa nổi tiếng về nhân đôi hình lập phương và chia ba của

một góc. Ông đã đi đến một kết luận thú vị rằng bài toán trước bao gồm các nghiệm của mọi lập phương trong đó căn trong công thức của Tartaglia là có thật, nhưng bài toán sau chỉ bao gồm các nghiệm dẫn đến trường hợp bất khả qui.

Bài toán về phương trình cầu phương của đường tròn đã được hồi sinh vào thời đại này và được nghiên cứu một cách nhiệt tình ngay cả bởi những người xuất chúng và có khả năng toán học. Đội quân những người bình phương vòng tròn đã trở thành ghê gớm nhất trong thế kỷ XVII. Trong số những người đầu tiên làm sống lại vấn đề này là Hồng y người Đức **Nicolaus Cusanus** (mất năm 1464), người nổi tiếng là một nhà logic học vĩ đại. Những ngụy biện của anh ta đã bị Regiomontanus vạch trần toàn bộ. Trong trường hợp này, trong các trường hợp khác, mỗi góc phần tư của lưu ý đều đưa ra một nhà toán học đối lập: Orontius đã gặp bởi Buteo và Nonius; Joseph Scaliger của Vieta, Adrianus Romanus và Clavius; A. Quercu của Peter Metius. Hai nhà toán học của Hà Lan, **Adrianus Romanus** và textbfLudolph van Ceulen, bận rộn với việc tính gần đúng tỷ lệ giữa chu vi và đường kính. Cái trước mang giá trị π đến 15, cái sau mang giá trị 35, vị trí. giá trị của π do đó thường được đặt tên là "Số của Ludolph." Thành tích của anh ấy được coi là rất phi thường, đến nỗi những con số được khắc trên bia mộ của ông ở sân nhà thờ St. Peter, tại Leyden. Romanus là người đã đề xuất giải phương trình bậc 45 do Vieta giải. Khi nhận được giải pháp của Vieta, anh ta lập tức khởi hành đến Paris, để làm quen với một bậc thầy vĩ đại như vậy. Vieta đề xuất với anh ấy bài toán Apollonian, vẽ một đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn cho trước. "Adrianus Romanus giải bài toán bằng giao điểm của hai hyperbola; nhưng lời giải này không có tính chặt chẽ của hình học cổ đại. Vieta đã khiến của anh ấy thấy điều này, và sau đó, đến lượt anh ấy, đưa ra một giải pháp có tất cả sự chặt chẽ mong muốn." [25] Romanus đã làm được nhiều việc trong việc đơn giản hóa lượng giác cầu bằng cách rút gọn, bằng cách của một số phép chiếu nhất định, 28 trường hợp trong tam giác khi

đó chỉ được coi là sáu.

Ở đây phải đề cập đến những cải tiến của lịch Julian. Việc xác định các ngày lễ di động hàng năm trong một thời gian dài có liên quan đến vô số nhầm lẫn. Sự tiến bộ nhanh chóng của thiên văn học đã dẫn đến việc xem xét chủ đề này và nhiều lịch mới đã được đề xuất. Giáo hoàng Grêgôriô XIII. đã triệu tập một số lượng lớn các nhà toán học, thiên văn học và giám mục, những người đã quyết định chấp nhận lịch do Jesuit **Lilius Clavius** đề xuất. Để khắc phục những sai sót của lịch Julian, người ta đã đồng ý viết vào lịch mới ngày 15 tháng 10 ngay sau ngày 4 tháng 10 năm 1582. Lịch Gregorian vấp phải rất nhiều sự phản đối của cả hai giữa các nhà khoa học và giữa những người theo đạo Tin lành. Clavius, người được xếp hạng cao với tư cách là một nhà hình học, đã đáp ứng sự phản đối của những người trước đây một cách khéo léo và hiệu quả nhất; những định kiến về sau đã qua đi theo thời gian.

Niềm đam mê nghiên cứu các đặc tính huyền bí của các con số đã có từ thời cổ đại cho đến hiện đại. Ngay cả những người lỗi lạc như Pacioli và Stifel cũng đã viết nhiều về thuyết thần bí số học. *Numerorum Mysteria* của Peter Bungus có 700 qurto trang. Anh ấy đã làm việc với ngành công nghiệp tuyệt vời và hài lòng với 666, là con số của con thú trong sách Khải Huyền (xiii. 18), biểu tượng của Antichrist. Ông đã rút gọn cái tên Martin Luther 'ngoan đạo' thành một hình thức có thể diễn tả con số ghê gớm này. Đặt $a = 1$, $b = 2$, etc, $k = 10$, $l = 20$, etc., sau khi viết sai tên, anh ấy tìm thấy $M_{(30)}A_{(1)}R_{(80)}T_{(100)}I_{(9)}\ N_{(40)}\ L_{(20)}V_{(200)}T_{(100)}E_{(5)}R_{(80)}A_{(1)}$ tạo thành số cần thiết. Những cuộc tấn công vào nhà cải cách vĩ đại này không phải là vô cớ, vì bạn của ông, Michael Stifel, người sắc sảo và độc đáo nhất trong số các nhà toán học đầu tiên của Đức, đã thể hiện một sự khéo léo không kém khi chỉ ra rằng con số trên ám chỉ Giáo hoàng Leo X.,— một cuộc biểu tình đã mang lại cho Stifel sự thoải mái không kể xiết. [22]

Chiêm tinh học vẫn là một nghiên cứu yêu thích. ai cũng biết rằng Cardan, Maurolycus, Regiomontanus và nhiều khác các nhà khoa học sống ở thời kỳ thậm chí còn muộn hơn này, đã tham gia nghiên cứu sâu về chiêm tinh học; nhưng người ta thường không biết rằng bên cạnh các ngành khoa học huyền bí đã được nêu tên, những người đàn ông tham gia vào nghiên cứu thần bí về đa giác sao và hình vuông ma thuật. Faust nói với Mephistopheles: "Ngôi sao năm cánh khiến bạn đau đớn. Thật thú vị về mặt tâm lý khi thấy các nhà khoa học, chẳng hạn như Kepler vĩ đại, chứng minh trên một trang định lý về đa giác sao, với độ chính xác hình học nghiêm ngặt, trong khi ở trang tiếp theo, có lẽ, ông giải thích việc sử dụng chúng như bùa hộ mệnh hoặc trong phép thuật. [1] Playfair, nói về Cardan với tư cách là một nhà chiêm tinh, gọi anh ấy là "bằng chứng u sầu rằng không có sự điên rồ nào hoặc sự yếu đuối quá lớn không thể kết hợp với những thành tựu trí tuệ cao." [26] Chúng ta đừng phán xét quá khắt khe. Thời kỳ đang được xem xét là quá gần thời Trung cổ để thừa nhận sự giải phóng hoàn toàn khỏi chủ nghĩa thần bí ngay cả trong số các nhà khoa học. Các học giả như Kepler, Napier, Albrecht Dürer, trong khi ở xe tăng của sự tiến bộ và đặt một chân trên nền tảng vững chắc của nghiên cứu khoa học thực sự, vẫn đang đặt chân kia trên những ý tưởng kinh viện của các thời đại trước.

VIETA ĐẾN DESCARTES

Quyền lực giáo hội, trong thời đại ngu dốt là một lợi ích không thể trộn lẫn, trong thời đại khai sáng hơn đã trở thành một tội ác nghiêm trọng. Vì vậy, ở Pháp, trong các triều đại trước triều đại của Henry IV, tinh thần thần học chiếm ưu thế. Điều này được thể hiện một cách đau đớn qua các vụ thảm sát Vassy và St. Bartholomew. Bị cuốn vào các tranh chấp tôn giáo, mọi người không có thời gian rảnh rỗi cho khoa học và văn học thế tục. Do đó, cho đến thời Henry IV, người Pháp "đã không đưa ra một tác phẩm nào, việc phá hủy nó

bây giờ sẽ là một tổn thất đối với châu Âu.” Mặt khác, ở Anh, không có chiến tranh tôn giáo nào tiến hành. Người dân tương đối thờ ơ với xung đột tôn giáo; họ tập trung khả năng của mình vào các vấn đề thế tục, và vào thế kỷ 16, họ đã có được một nền văn học được bất tử bởi thiên tài Shakespeare và Spenser. Thời đại văn học vĩ đại này ở Anh được theo sau bởi một thời đại khoa học vĩ đại. Vào cuối thế kỷ 16, xiềng xích của chính quyền giáo hội đã bị Pháp dỡ bỏ. Sự thăng thiên của Henry IV. lên ngôi sau đó vào năm 1598 bởi Sắc lệnh Nantes, trao quyền tự do thờ phượng cho người Huguenot, và do đó chấm dứt chiến tranh tôn giáo. Thiên tài của quốc gia Pháp giờ đã bắt đầu nở rộ. Hồng y Richelieu, dưới thời trị vì của Louis XIII., đã theo đuổi chính sách chung là không ủng hộ ý kiến của bất kỳ giáo phái nào, mà thúc đẩy lợi ích của quốc gia. Tuổi của ông là đáng chú ý cho sự tiến bộ của kiến thức. Nó đã tạo ra nền văn học thế tục tuyệt vời đó, đối tác của nó đã được tìm thấy ở Anh vào thế kỷ XVI. Thế kỷ XVII cũng đã trở nên lừng lẫy nhờ các nhà toán học vĩ đại người Pháp, Roberval, Descartes, Desargues, Fermat và Pascal.

U ám hơn là bức tranh ở Đức. Những thay đổi vĩ đại đã cách mạng hóa thế giới vào thế kỷ 16, đưa nước Anh đến sự vĩ đại của một quốc gia, lại dẫn đến sự suy thoái của nước Đức. Những tác động đầu tiên của Cải cách đã được chào đón. Vào cuối thế kỷ 15 và trong suốt thế kỷ 16, nước Đức nổi tiếng vì những hoạt động theo đuổi khoa học của mình. Cô đã từng là người dẫn đầu trong lĩnh vực thiên văn học và lượng giác. Đại số cũng vậy, ngoại trừ những khám phá về phương trình bậc ba, trước thời của Vieta, ở trạng thái tiên tiến hơn ở đó so với những nơi khác. Nhưng vào đầu thế kỷ XVII, khi mặt trời khoa học bắt đầu mọc ở Pháp, thì nó lại lặn ở Đức. Tranh chấp thần học và xung đột tôn giáo xảy ra sau đó. Chiến tranh Ba Mươi Năm (1618-1648) tỏ ra tàn khốc. Đế chế Đức đã tan vỡ, và trở thành một liên minh đơn thuần lỏng lẻo của các chế độ chuyên quyền nhỏ. Thương mại đã bị phá hủy; cảm giác quốc gia đã chết. Nghệ thuật biến mất, và trong văn học chỉ có sự bắt chước mù quáng sự giả tạo

của Pháp. Nước Đức cũng không thể phục hồi từ tình trạng thấp kém này với 200 năm; vì năm 1756 bắt đầu một cuộc đấu tranh khác, Chiến tranh Bảy năm, biến nước Phổ thành một vùng đất hoang tàn. Do đó, vào đầu thế kỷ XVII, Kepler vĩ đại là nhà toán học người Đức duy nhất lỗi lạc, và trong khoảng thời gian 200 năm giữa Kepler và Gauss, đã xuất hiện không có nhà toán học vĩ đại nào ở Đức ngoại trừ Leibniz.

Cho đến thế kỷ XVII, toán học đã được trau dồi nhưng rất ít ở Vương quốc Anh. Trong suốt thế kỷ XVI, bà đã tạo ra không một nhà toán học nào có thể so sánh được với Vieta, Stifel hay Tartaglia. Nhưng với thời của Recorde, tiếng Anh trở nên dễ thấy đối với kỹ năng số. Công trình số học quan trọng đầu tiên của tác giả người Anh được xuất bản bằng tiếng Latinh vào năm 1522 bởi **Cuthbert Tonstall** (1474–1559). Anh ấy đã học tại Oxford, Cambridge và Padua, đồng thời vẽ tự do từ các tác phẩm của Pacioli và Regiomontanus. Các bản in lại số học của ông đã xuất hiện ở Anh và Pháp. Sau Recorde, các nhánh cao hơn của toán học bắt đầu được nghiên cứu. Sau đó, Scotland đã sinh ra Napier, người đã phát minh ra logarit. Sự đánh giá cao ngay lập tức về giá trị của chúng chắc chắn là kết quả của sự vượt trội trong tính toán. Ở Ý, và đặc biệt là ở Pháp, hình học, mà trong một thời gian dài là một môn khoa học gần như tĩnh tại, đã bắt đầu được nghiên cứu thành công. Galileo, Torricelli, Roberval, Fermat, Desargues, Pascal , Descartes và Wallis người Anh là những nhà cách mạng vĩ đại của ngành khoa học này. Cơ học lý thuyết bắt đầu được nghiên cứu. Fermat và Pascal đã đặt nền móng cho lý thuyết số và lý thuyết xác suất.

Trước tiên chúng ta sẽ xem xét những cải tiến được thực hiện trong nghệ thuật tính toán. Các quốc gia thời cổ đại đã thử nghiệm hàng nghìn năm dựa trên các ký hiệu số trước khi họ tình cờ tìm ra cái gọi là "ký hiệu Ả Rập." theo cách đơn giản của mật mã, được giới thiệu bởi người Hindu vào khoảng thế kỷ thứ năm hoặc thứ sáu sau Công nguyên, toán học đã nhận được một trong những động lực

mạnh mẽ nhất. Có vẻ như sau khi "ký hiệu Ả Rập" được hiểu thấu đáo, các phân số thập phân sẽ xuất hiện ngay lập tức như một phần mở rộng rõ ràng của Nhưng "thật tò mò khi nghĩ rằng khoa học đã cố gắng nhiều như thế nào trong nghiên cứu vật lý và các con số đã được cân nhắc sâu sắc như thế nào, trước khi người ta nhận thấy rằng sự đơn giản toàn năng của" ký hiệu Ả Rập" cũng có giá trị và có thể quản lý được trong một giảm dần vô hạn cũng như trong một cấp số tăng dần vô hạn." [28] Đối với chúng ta đơn giản như phân số thập phân, việc phát minh ra chúng không phải là kết quả của một trí óc hay thậm chí của một thời đại. Chúng được đưa vào sử dụng ở mức độ gần như không thể nhận thấy. Các nhà toán học đầu tiên đồng nhất với lịch sử của họ đã không nhận thức được bản chất và tầm quan trọng thực sự của chúng, và đã không phát minh ra một ký hiệu phù hợp. Ý tưởng về phân số thập phân xuất hiện lần đầu tiên trong các phương pháp tính gần đúng căn bậc hai của các số. của Seville, có lẽ bắt chước các quy tắc của Hindu, thêm các mật mã 2 n vào số, sau đó tìm căn bậc hai và lấy này làm tử số của một phân số có mẫu số là 1 theo sau là n ciphers. Phương pháp tương tự cũng được *Cardan* áp dụng, nhưng nó không được người Ý cùng thời với ông áp dụng; vì nếu không nó chắc chắn ít nhất đã được nhắc đến bởi *Cataldi* (mất năm 1626) trong một tác phẩm dành riêng cho việc chiết xuất rễ cây. Cataldi tìm căn bậc hai bằng phương pháp phân số liên tiếp—một phương pháp khéo léo và mới lạ, nhưng vì mục đích thực tế kém hơn phương pháp của Cardan. **Orontius Finæus** (mất năm 1555) ở Pháp, và **William Buckley** (mất khoảng năm 1550) ở Anh đã rút ra căn bậc hai của theo cùng một cách như Cardan và John của Seville. Việc phát minh ra số thập phân thường được cho là của Regiomontanus, dựa trên cơ sở thay vì đặt sin totus, trong lượng giác, bằng bội số của 60, giống như Người Hy Lạp, anh ấy đặt nó = 100.000. Nhưng ở đây, các đường lượng giác được biểu thị bằng *số nguyên* chứ không phải phân số. Mặc dù ông đã áp dụng phép chia thập phân cho bán kính, nhưng ông và những người kế nhiệm

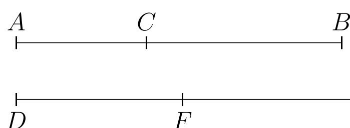
ông đã không áp dụng ý tưởng này bên ngoài lượng giác và thực tế là ông không có khái niệm gì về *phân số* thập phân. Gửi tới **Simon Stevin** của Bruges ở Bỉ (1548–1620), một người đàn ông đã có rất nhiều công trình nghiên cứu trong hầu hết các lĩnh vực khoa học đa dạng, chúng ta mang ơn cách xử lý phân số thập phân một cách có hệ thống đầu tiên. Trong *La Disme* (1585) của mình, ông đã mô tả bằng những thuật ngữ rất rõ ràng về những ưu điểm, không chỉ của phân số thập phân, mà còn của phép chia thập phân trong các hệ thống trọng lượng và thước đo. Stevin đã áp dụng các phân số mới " cho tất cả các hoạt động của số học thông thường." [25] Những gì anh ta thiếu là một ký hiệu phù hợp. Trong vị trí của dấu thập phân của chúng tôi, anh ấy đã sử dụng một mật mã; chỉ số tương ứng được gắn vào mỗi vị trí trong phân số. Do đó, theo ký hiệu của anh ấy, số 5,912 sẽ là $\overset{0123}{5912}$ hoặc 5⓪9①1②2③. Những chỉ số này, mặc dù rườm rà trong thực tế, nhưng rất đáng quan tâm, bởi vì chúng là mầm mống của một sự đổi mới quan trọng. Vinh dự thuộc về Stevin trong việc phát minh ra phương thức biểu thị lũy thừa hiện tại của chúng ta và cũng là người đưa các số mũ phân số vào đại số. Nói một cách chính xác, điều này đã được *Oresme* thực hiện sớm hơn nhiều, nhưng nó vẫn hoàn toàn không được chú ý. Thậm chí những đổi mới của không được đánh giá cao ngay lập tức hoặc được chấp nhận ngay lập tức, nhưng, không giống như của Oresme, chúng vẫn là một tài sản an toàn. Không có cải tiến nào được thực hiện trong ký hiệu số thập phân cho đến đầu thế kỷ XVII. Sau Stevin, số thập phân được sử dụng bởi **Joost Bürgi**, một người gốc Thụy Sĩ, người đã chuẩn bị một bản thảo về số học ngay sau năm 1592, và bởi **Johann Hartmann Beyer**, người coi phát minh này là của mình. Vào khoảng năm 1603, ông đã xuất bản tại Frankfurt on the Main *Logistica Decimalis*. Với Bürgi, số 0 được đặt bên dưới chữ số ở vị trí hàng đơn vị trả lời là dấu hiệu của sự tách biệt. Ký hiệu của Beyer giống với ký hiệu của Stevin. Theo Peacock, dấu thập phân là do Napier, người đã xuất bản *Rabdologia* của mình vào năm 1617,

có chứa chuyên luận về số thập phân, trong đó dấu thập phân được sử dụng trong một hoặc hai trường hợp . Trong bản dịch tiếng Anh *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* của Napier, do Edward Wright thực hiện năm 1616 và được tác giả sửa chữa, dấu thập phân xuất hiện trong các bảng. Không có đề cập đến số thập phân trong số học tiếng Anh từ năm 1619 đến 1631. *Oughtred* trong 1631 chỉ định phân số .56 do đó, 0|56. *Albert Girard*, một học trò của Stevin, một lần sử dụng điểm này vào năm 1629. John Wallis năm 1657 viết 12|345 , nhưng sau đó trong quảng cáo đại số của ông chọn điểm thông thường. De Morgan nói rằng “ đối với quý đầu tiên của thế kỷ thứ mười tám, chúng ta không chỉ đề cập đến chiến thắng hoàn toàn và cuối cùng của dấu thập phân, mà còn của hiện tại phương pháp phổ biến để thực hiện các phép toán chia và trích xuất căn bậc hai. [27] Chúng tôi đã nghiên cứu khá lâu về tiến trình của ký hiệu thập phân, bởi vì “lịch sử của ngôn ngữ . . . được quan tâm nhiều nhất , cũng như tiện ích: những đề xuất của nó là bài học tốt nhất cho tương lai mà một bộ óc suy tư có thể có.” [27]

Khả năng kỳ diệu của phép tính hiện đại là nhờ ba phát minh: Ký hiệu Ả Rập, Phân số thập phân và Logarit. Việc phát minh ra logarit trong quý đầu tiên của thế kỷ 17 đã được tính đúng thời điểm, vì Kepler khi đó đang kiểm tra quỹ đạo của các hành tinh, và Galileo vừa mới hướng kính viễn vọng về các vì sao. Trong thời kỳ Phục hưng, các nhà toán học Đức đã xây dựng các bảng lượng giác có độ chính xác cao, nhưng độ chính xác cao hơn này đã làm tăng đáng kể công việc của máy tính. Không ngoa khi nói rằng việc phát minh ra logarit “ bằng cách rút ngắn thời gian lao động đã nhân đôi tuổi thọ của nhà thiên văn học.” Logarit được phát minh bởi **John Napier**, Nam tước vùng Merchiston, ở Scotland (1550 –1617). Một trong những điều kỳ lạ nhất của lịch sử khoa học là Napier đã xây dựng logarit trước khi sử dụng số mũ. Để chắc chắn, Stifel và Stevin đã tạo ra một số nỗ lực biểu thị lũy thừa theo chỉ số, nhưng điều này không tation thường không được biết đến,—thậm chí không phải

Harriot, mà đại số xuất hiện rất lâu sau cái chết của Napier. Logarit đó chảy tự nhiên từ biểu tượng hàm mũ đã không được quan sát cho đến sau này. Chính Euler là người đầu tiên coi logarit là chỉ số của lũy thừa. Vậy thì dòng suy nghĩ của Napier là gì?

Gọi AB là một dòng xác định, DE là một dòng kéo dài vô tận từ D. Hãy tưởng tượng hai điểm bắt đầu từ cùng một khoảng khắc; cái di chuyển từ A về phía B, cái kia từ D về phía E. Đặt vận tốc trong thời điểm đầu tiên là như nhau cho cả hai: đặt vận tốc của điểm trên đường thẳng DE là đồng nhất; nhưng vận tốc của điểm trên AB giảm dần sao cho khi nó đến một điểm bất kỳ C thì vận tốc của nó tỉ lệ với quãng đường còn lại BC. Trong khi điểm đầu tiên di chuyển trên một khoảng cách AC, thì điểm thứ hai di chuyển trên một khoảng cách DF. Napier gọi DF là logarit của BC.



Quy trình của Napier rất độc đáo và khác biệt so với tất cả các phương thức trình bày chủ đề khác đến mức không thể nghi ngờ gì rằng phát minh này hoàn toàn là của riêng ông; nó là kết quả của sự suy đoán cô lập, không được trợ giúp. Đầu tiên, ông chỉ tìm logarit của sin; dòng AB là sin của 9° và được lấy $= 10^7$; BC là sin của cung và DF là logarit của nó. Chúng tôi nhận thấy rằng khi chuyển động tiếp tục, BC giảm theo cấp số nhân, trong khi DF tăng theo cấp số cộng. Đặt $AB = a = 10^7$, đặt $x = DF$, $y = BC$, sau đó $AC = a - y$. Vận tốc của điểm C là $\frac{d(a-y)}{dt} = y$; điều này mang lại $-\text{nat. log}\, y = t + c$. Khi $t = 0$ thì $y = a$ và $c = -\text{nat. log}\, a$. Một lần nữa, đặt $\frac{dx}{dt} = a$ là vận tốc của điểm F, sau đó $x = at$. Thay thế các giá trị của t and c và ghi nhớ rằng $a = 10^7$ và theo định nghĩa $x = \text{Nap. log}\, y$, chúng ta có

$$\text{Nap. log}\, y = 10^7\, \text{nat. log}\, \frac{10^7}{y}.$$

Rõ ràng từ công thức này là logarit của Napier không giống với

logarit tự nhiên. Logarit của Napier tăng khi chính số đó giảm. Anh ta lấy logarit của $\sin 90 = 0$; tức là logarit của $10^7 = 0$. Logarit của $\sin\alpha$ tăng từ 0 khi α giảm từ 90°. Nguồn gốc của logarit của Napier từ quan niệm về hai điểm lưu động nhắc nhở chúng ta về học thuyết về thông lượng của Newton. Mối quan hệ giữa các cấp số nhân và hình học, được Napier sử dụng một cách khéo léo, đã được Archimedes, Stifel và những người khác quan sát thấy. Napier đã không xác định cơ sở cho hệ thống logarit của mình. Trên thực tế, khái niệm về một "cơ sở" chưa bao giờ gợi ra cho anh ta. Cơ sở mà lập luận của ông yêu cầu là nghịch đảo của cơ sở của hệ thống tự nhiên, nhưng một cơ sở như vậy sẽ không tái tạo chính xác tất cả các số liệu của Napier, do tính toán của các bảng có chút thiếu chính xác. Phát minh vĩ đại của Napier đã được trao cho thế giới vào năm 1614 trong một tác phẩm có tựa đề *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Trong đó, ông giải thích bản chất của logarit của mình và đưa ra bảng logarit các sin tự nhiên của một góc phần tư từ phút này sang phút khác.

Henry Briggs (1556–1631), giáo sư hình học cùng thời với Napier tại Đại học Gresham, London, và sau đó là giáo sư tại Oxford, đã rất ngưỡng mộ cuốn sách của Napier, đến nỗi ông đã bỏ dở việc học của mình ở London để tỏ lòng tôn kính với nhà triết học người Scotland. Hành trình của Briggs bị chậm trễ, và Napier phàn nàn với một người bạn chung, "À, John, ông Briggs sẽ không đến đâu." Ngay lúc đó có tiếng gõ cửa. ở cổng, và Briggs được đưa vào phòng của lãnh chúa. Gần một phần tư giờ đã trôi qua, mỗi người nhìn nhau mà không nói một lời. Cuối cùng, Briggs bắt đầu: " Thưa ngài, tôi đã thực hiện chuyến hành trình dài này với mục đích là để gặp ngài, và để biết ngài đã nghĩ ra công cụ trợ giúp tuyệt vời nhất này trong thiên văn học, cụ thể là logarit, nhờ động cơ nào của trí thông minh hoặc sự khéo léo. ; nhưng, thưa ngài, do ngài đã phát hiện ra, tôi ngạc nhiên là không ai phát hiện ra nó trước đây, khi mà bây giờ đã biết điều đó thật dễ dàng." [28] Briggs đã gợi ý cho Napier lợi

thế có được từ việc giữ lại 0 cho logarit của toàn bộ sin, nhưng chọn 10.000.000.000 cho logarit của phần thứ 10 của cùng một sin đó, tức là của 5° $44'22''$. Napier nói rằng anh ấy đã nghĩ đến sự thay đổi, và anh ấy chỉ ra một chút cải tiến trong ý tưởng của Briggs; viz. số 0 đó phải là logarit của 1 và 10.000.000.000 của toàn bộ sin, do đó làm cho đặc tính của các số lớn hơn đơn vị là dương và không âm, như Briggs đã đề xuất. Briggs thừa nhận điều này thuận tiện hơn. Do đó, việc phát minh ra "logarit Briggian" xảy ra với Briggs và Napier một cách độc lập. Ưu điểm thực tế tuyệt vời của hệ thống mới là tiến trình cơ bản của nó được cung cấp cho cơ sở, 10, trong thang số của chúng tôi. Briggs dành tất cả năng lượng của mình để xây dựng các bảng theo kế hoạch mới. Napier qua đời vào năm 1617, với sự hài lòng khi tìm thấy ở Briggs một người bạn có khả năng giúp hoàn thành những kế hoạch còn dang dở của mình. Năm 1624, Briggs đã xuất bản *Arithmetica logarit* của mình, chứa logarit của 14 vị trí của các số, từ 1 đến 20.000 và từ 90.000 đến 100.000. Khoảng cách từ 20.000 đến 90.000 đã được lấp đầy bởi người kế nhiệm lẫy lừng của Napier và Briggs, **Adrian Vlacq** của Gouda ở Hà Lan. Ông đã xuất bản vào năm 1628 một bảng logarit từ 1 đến 100.000, trong đó 70.000 do chính ông tính toán. Ấn phẩm đầu tiên về logarit Briggian của các hàm lượng giác được thực hiện vào năm 1620 bởi **Gunter**, một đồng nghiệp của Briggs, người đã tìm ra các sin và tiếp tuyến logarit cho mỗi phút chia 7 vị trí. Gunter là người phát minh ra các từ *cosine* và *cotangent*. Briggs đã dành những năm cuối đời để tính toán các logarit Briggian mở rộng hơn của các hàm lượng giác, nhưng ông qua đời vào năm 1631, để lại công việc của mình còn dang dở. Nó được tiếp tục bởi **Henry Gellibrand** người Anh, và sau đó được xuất bản bởi Vlacq bằng chi phí của chính ông. Briggs đã chia một bậc thành 100 phần, nhưng do Vlacq đã xuất bản các bảng lượng giác được xây dựng trên phép chia lục giác cũ, sự đổi mới của Briggs vẫn không được công nhận. Briggs và Vlacq đã xuất bản bốn công trình cơ bản, kết quả của chúng "chưa bao giờ bị thay thế bởi

bất kỳ tính toán nào sau này.”

Các logarit đầu tiên trên cơ số *natural e* đã được xuất bản bởi **John Speidell** trong *Logarit mới* của ông (London, 1619), trong đó chứa các logarit tự nhiên của sin, tiếp tuyến, và cát tuyến.

Đối thủ khả dĩ duy nhất của John Napier trong việc phát minh ra logarit là **Justus Byrgius** (Joost Bürgi) người Thụy Sĩ. Anh ấy đã xuất bản một bảng logarit thô sơ sáu năm sau khi *Canon Mirificus* xuất hiện, nhưng có vẻ như ông đã nghĩ ra ý tưởng và xây dựng bảng đó sớm nhất, nếu không muốn nói là sớm hơn Napier đã làm. Nhưng ông đã bỏ qua việc công bố kết quả cho đến khi logarit của Napier được biết đến và được khắp châu Âu ngưỡng mộ.

Trong số các phát minh khác nhau của Napier để hỗ trợ trí nhớ của học sinh hoặc máy tính, có ”Quy tắc Napier về các phần hình tròn” để giải các tam giác vuông hình cầu. Có lẽ đây là “ví dụ vui nhất về trí nhớ nhân tạo từng được biết đến.”

Cuộc chinh phục rực rỡ nhất về đại số trong thế kỷ thứ mười sáu là giải phương trình bậc ba và phương trình trùng phương. Mọi nỗ lực giải các phương trình đại số cấp độ cao hơn đều không có kết quả, một hướng nghiên cứu mới—các tính chất của phương trình và nghiệm nguyên của chúng—dần dần được mở ra. Chúng ta đã thấy rằng Vieta đã đạt được một phần kiến thức về mối quan hệ giữa nghiệm và hệ số. **Peletarius**, một người Pháp, đã quan sát thấy từ 1558 rằng nghiệm của một phương trình là ước của số hạng cuối cùng. **Albert Girard** (1590–1634), một nhà toán học người Flemish, là người đã mở rộng lý thuyết phương trình xa hơn Vieta một chút. Cũng giống như Vieta, tác giả tài tình này đã áp dụng đại số vào hình học, và là người đầu tiên hiểu được việc sử dụng nghiệm âm trong cách giải của các bài toán hình học. Ông nói về số lượng tưởng tượng; suy ra bằng quy nạp rằng mỗi phương trình có số nghiệm bằng số đơn vị biểu thị bậc của nó; và lần đầu tiên chỉ ra cách biểu diễn tổng lũy thừa của chúng dưới dạng các hệ số.

Một nhà đại số học đáng kể khác là **Thomas Harriot** người Anh (1560–1621). Anh ta tháp tùng thuộc địa đầu tiên do Ngài Walter Raleigh cử đến Virginia. Sau khi khảo sát đất nước đó, ông trở về Anh. Là một nhà toán học, ông là niềm tự hào của đất nước mình. Ông đã đưa lý thuyết về các phương trình dưới một quan điểm toàn diện bằng cách nắm bắt chân lý đó ở mức độ đầy đủ của nó mà Vieta và Girard chỉ ước lượng được; viz. rằng trong một phương trình ở dạng đơn giản nhất, hệ số của số hạng thứ hai với dấu của nó đã thay đổi thì bằng tổng các nghiệm; hệ số của bậc ba bằng tổng các tích của mỗi hai gốc; v.v. Ông là người đầu tiên phân tách các phương trình thành các thừa số đơn giản của chúng; nhưng, vì ông không nhận ra các nghiệm ảo và thậm chí là nghiệm âm, nên ông cũng thất bại trong việc chứng minh rằng mọi phương trình đều có thể phân tích như vậy. Harriot đã thực hiện một số thay đổi trong ký hiệu đại số, sử dụng các chữ cái nhỏ trong bảng chữ cái thay cho các chữ hoa được sử dụng bởi Vieta. Các ký hiệu của bất đẳng thức > và < là do ông giới thiệu. Tác phẩm của Harriot, *Artis Analyticæ praxis*, được xuất bản năm 1631, mười năm sau khi ông qua đời. **William Oughtred** (1574–1660) đã đóng góp to lớn vào việc truyền bá tri thức toán học ở Anh thông qua các chuyên luận của ông, vốn đã được sử dụng từ lâu trong các trường đại học. Ông giới thiệu × là biểu tượng của phép nhân và :: là biểu tượng của tỷ lệ. Tỷ lệ của anh ấy được thể hiện chỉ bằng một dấu chấm. Vào thế kỷ thứ mười tám *Christian Wolf* đã bảo đảm việc sử dụng chung dấu chấm làm biểu tượng của phép nhân, và ký hiệu cho tỷ lệ sau đó đã được đổi thành hai dấu chấm. Các nhiệm vụ cấp bộ của Oughtred khiến anh ta có ít thời gian để theo đuổi toán học vào ban ngày, và buổi tối, người vợ tiết kiệm của anh ta đã từ chối anh ta sử dụng đèn.

Đại số lúc này ở trạng thái đủ hoàn hảo để Descartes có thể thực hiện bước quan trọng tạo thành một trong những kỷ nguyên lớn trong lịch sử toán học,—ứng dụng của giải tích đại số để định nghĩa tính chất và khảo sát tính chất của đường cong đại số.

Trong hình học, việc xác định diện tích của các hình đường cong được nghiên cứu kỹ lưỡng vào thời kỳ này. **Paul Guldin** (1577–1643), một nhà toán học nổi tiếng người Thụy Sĩ, Khám phá lại định lý sau, được xuất bản trong *Centrobaryca* của ông, đã được đặt theo tên ông, mặc dù lần đầu tiên được tìm thấy trong *Bộ sưu tập toán học* của Pappus: Thể tích của một vật rắn tròn xoay bằng diện tích của hình sinh, nhân với chu vi được mô tả bởi trọng tâm. Chúng ta sẽ thấy rằng phương pháp này vượt trội so với phương pháp của Kepler và Cavalieri khi tuân theo một khóa học chính xác và tự nhiên hơn; nhưng nó có nhược điểm là cần phải xác định trọng tâm, bản thân nó có thể là một vấn đề khó hơn so với vấn đề ban đầu là tìm thể tích. Guldin đã thực hiện một số nỗ lực để chứng minh định lý của mình, nhưng Cavalieri đã chỉ ra điểm yếu trong chứng minh của mình.

Johannes Kepler (1571–1630) là người gốc Würtemberg và tiếp thu các nguyên tắc của Copernicus khi ở Đại học Tübingen. Ông theo đuổi khoa học liên tục bị gián đoạn bởi chiến tranh, đàn áp tôn giáo, bối rối về tiền bạc, thường xuyên thay đổi nơi cư trú và những rắc rối gia đình. Vào khoảng năm 1600, ông đã trở thành trợ lý trong một năm cho nhà thiên văn học người Đan Mạch, Tycho Brahe, tại đài quan sát gần Praha. Mối quan hệ giữa hai nhà thiên văn học vĩ đại không phải lúc nào cũng có tính cách dễ chịu. Các ấn phẩm của Kepler rất đồ sộ. Nỗ lực đầu tiên của ông nhằm giải thích hệ mặt trời được thực hiện vào năm 1596, khi ông nghĩ rằng mình đã phát hiện ra mối quan hệ kỳ lạ giữa năm chất rắn thông thường và số lượng và khoảng cách của các hành tinh. Việc công bố phát hiện giả này đã mang lại cho ông nhiều danh tiếng. Sự suy ngẫm và giao tiếp trưởng thành hơn với Tycho Brahe và Galileo đã đưa ông đến với những nghiên cứu và kết quả xứng đáng hơn của thiên tài của ông—"Định luật Kepler." Ông đã làm phong phú toán học thuần túy cũng như thiên văn học. Không có gì lạ khi anh ấy quan tâm đến khoa học toán học đã giúp anh ấy rất nhiều; vì "nếu người

Hy Lạp không phát triển các mặt cắt hình nón, thì Kepler đã không thể thay thế Ptolemy."[11] Người Hy Lạp chưa bao giờ mơ rằng những đường cong này sẽ được sử dụng trong thực tế; Aristæus và Apollonius nghiên cứu chúng chỉ để thỏa mãn những khao khát lý tưởng về trí tuệ của họ; tuy nhiên các tiết diện hình nón đã hỗ trợ Kepler lần theo dấu vết chuyển động của các hành tinh trong quỹ đạo hình elip của chúng. Kepler cũng mở rộng việc sử dụng logarit và phân số thập phân, đồng thời rất nhiệt tình phổ biến kiến thức về chúng. Có một lần, khi đang mua rượu, anh ta đã bị ấn tượng bởi sự không chính xác của các phương thức xác định lượng chứa trong thùng thông thường. Điều này đã dẫn ông đến việc nghiên cứu về khối lượng chất rắn của cuộc cách mạng và xuất bản *Stereometria Doliorum* vào năm 1615. Trong đó, đầu tiên ông giải quyết các chất rắn mà Archimedes đã biết và sau đó tiếp tục với các chất rắn khác. Kepler đã giới thiệu một ý tưởng mới vào hình học; cụ thể là số lượng vô cùng lớn và vô cùng nhỏ. Các nhà toán học Hy Lạp luôn xa lánh quan niệm này, nhưng cùng với nó, các nhà toán học hiện đại đã hoàn toàn cách mạng hóa khoa học. Khi so sánh các hình thẳng, phương pháp chồng chất đã được người xưa sử dụng, nhưng khi so sánh các hình thẳng và đường cong với nhau, phương pháp này không thành công vì không có phép cộng hoặc trừ nào của các hình thẳng có thể tạo ra các đường cong. Để gặp trường hợp này, họ nghĩ ra Phương pháp Kiệt sức, vừa lâu vừa khó; nó hoàn toàn là tổng hợp, và nói chung yêu cầu rằng kết luận phải được biết ngay từ đầu. Khái niệm mới về vô cực đã dần dần dẫn đến việc phát minh ra các phương pháp mạnh mẽ hơn rất nhiều. Kepler quan niệm hình tròn bao gồm vô số hình tam giác có đỉnh chung ở tâm và đáy của chúng ở chu vi; và hình cầu bao gồm vô số kim tự tháp. Ông đã áp dụng các khái niệm thuộc loại này để xác định diện tích và thể tích của các hình tạo bởi các đường cong quay quanh bất kỳ đường thẳng nào dưới dạng trục, nhưng chỉ thành công trong việc giải một số bài toán đơn giản nhất trong số 84 bài toán mà ông đề xuất nghiên cứu

trong cuốn sách của mình. *Stereometria*.

Các điểm thú vị khác về mặt toán học trong các công trình của Kepler là (1) phát biểu của bài toán sớm nhất về các tiếp tuyến nghịch đảo; (2) một cuộc điều tra dẫn đến đánh giá tích phân xác định $\int_0^{\phi} \sin\ phi\, d\phi = 1 - \cos\phi$; (3) khẳng định rằng chu vi của một hình elip, có các trục là $2a$ và $2b$, gần bằng $\pi(a+b)$; (4) một đoạn văn mà từ đó người ta suy ra rằng Kepler đã biết biến thiên của một hàm gần giá trị cực đại của nó sẽ biến mất; (5) giả định về nguyên lý liên tục (phân biệt hình học cổ đại với hình học hiện đại), khi ông chỉ ra rằng một parabol có tiêu điểm tại vô cực, rằng các đường tỏa ra từ "cæcus focus" này song song với và không có điểm nào khác ở vô cực.

Stereometria đã khiến Cavalieri, một tu sĩ Dòng Tên người Ý, cân nhắc về số lượng vô cùng nhỏ. **Bonaventura Cavalieri** (1598–1647), một học trò của Galileo và là giáo sư tại Bologna, được tôn vinh vì *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, 1635. Công trình này trình bày phương pháp của ông về các vật không thể chia đôi, chiếm một vị trí trung gian giữa phương pháp rút gọn của người Hy Lạp và các phương pháp của Newton và Leibniz. Ông coi các đường bao gồm vô số điểm, bề mặt như bao gồm vô số đường thẳng, và các khối có vô số mặt phẳng. Độ lớn tương đối của hai khối hoặc hai bề mặt khi đó có thể được tìm thấy đơn giản bằng tổng của các chuỗi các mặt phẳng hoặc đường thẳng. Ví dụ, ông tìm được tổng bình phương tổng các đường thẳng tạo nên một tam giác bằng một phần ba tổng bình phương tất cả các đường thẳng của một hình bình hành có đáy và đường cao bằng nhau; vì nếu trong một tam giác, đường thẳng đầu tiên ở đỉnh là 1 thì đường thẳng thứ hai là 2, số thứ ba là 3, v.v. và tổng của r hình vuông là

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = n(n+1)(2n+1) \div 6.$$

Trong hình bình hành, mỗi đường thẳng là n và số của chúng là n;

do đó tổng bình phương của chúng là n^3. Vậy tỉ số giữa hai tổng là

$$n(n+1)(2n+1) \div 6n^3 = \frac{1}{3},$$

vì n là vô hạn. Từ đó, ông kết luận rằng kim tự tháp hoặc hình nón tương ứng là $\frac{1}{3}$ của một hình lăng trụ hoặc hình trụ có đáy và đường cao bằng nhau, vì các đa giác hoặc hình tròn tạo nên hình tròn trước đây giảm dần từ đáy đến đỉnh theo cùng một hướng bình phương của các đường thẳng song song với đáy trong một tam giác giảm dần từ đáy đến đỉnh. Bằng Phương pháp Bất khả phân, Cavalieri đã giải được phần lớn các bài toán do Kepler đề xuất. Mặc dù nhanh chóng và mang lại kết quả chính xác, phương pháp của Cavalieri thiếu cơ sở khoa học. Nếu một đường thẳng hoàn toàn không có chiều rộng, thì không có số lượng đường kẻ nào, dù lớn đến đâu, có thể tạo thành một khu vực; nếu một mặt phẳng không có độ dày gì cả, thì ngay cả vô số mặt phẳng cũng không thể tạo thành một khối. Lý do tại sao phương pháp này dẫn đến kết luận chính xác là một khu vực này so với khu vực khác theo cùng một tỷ lệ như tổng của các chuỗi đường trong khu vực này bằng tổng của các chuỗi đường trong khu vực kia. Mặc dù không khoa học, nhưng phương pháp của Cavalieri đã được sử dụng trong 50 năm như một loại phép tính tích phân. Nó mang lại lời giải cho một số bài toán khó. Guldin đã tấn công dữ dội vào Cavalieri và phương pháp của anh ta. Loại thứ hai được xuất bản vào năm 1647, sau cái chết của Guldin, một chuyên luận có tựa đề *Bài tập hình họcæ sex*, trong đó ông trả lời những phản đối của đối thủ và cố gắng giải thích rõ ràng hơn về phương pháp của mình. Guldin chưa bao giờ có thể chứng minh định lý mang tên ông, ngoại trừ bằng lý luận siêu hình, nhưng Cavalieri đã chứng minh nó bằng phương pháp bất khả phân. Một ấn bản sửa đổi của *Hình học của các số không thể chia* xuất hiện vào 1653.

Có một đường cong quan trọng mà người xưa không biết đến, giờ đây bắt đầu được nghiên cứu một cách hết sức sốt sắng. Roberval đặt cho nó cái tên “trochoid”, Pascal đặt tên “roulette” Galileo đặt

tên “cycloid.” Người phát minh ra đường cong này dường như là do Galileo, người đã đánh giá cao nó vì hình thức duyên dáng mà nó mang lại cho các mái vòm trong kiến trúc. Ông đã xác định được diện tích của nó bằng cách cân các số liệu trên giấy của hình tròn xoáy với diện tích của hình tròn sinh ra, và do đó nhận thấy diện tích đầu tiên gần bằng nhưng không chính xác gấp ba lần diện tích sau. Học trò của ông, **Evangelista Torricelli** (1608–1647) đã đưa ra một quyết định toán học, người được biết đến rộng rãi với tư cách là một nhà vật lý hơn là một nhà toán học.

Bằng phương pháp không thể chia nhỏ, ông đã chứng minh diện tích của nó gấp ba lần diện tích của vòng tròn quay và công bố giải pháp của mình. Phương trình cầu phương tương tự này đã được Roberval thực hiện vài năm trước đó ở Pháp, nhưng người Ý không biết. Roberval, là một người có tính cách cáu kỉnh và bạo lực, đã vô cớ buộc tội Torricelli hiền lành và dễ mến vì đã đánh cắp bằng chứng. Lời buộc tội đạo văn này đã tạo ra rất nhiều sự bất bình với Torricelli đến nỗi nó được coi là nguyên nhân dẫn đến cái chết sớm của ông. **Vincenzo Viviani**, một học trò lỗi lạc khác của Galileo, đã xác định tiếp tuyến của đường tròn. Điều này đã được thực hiện ở Pháp bởi Descartes và Fermat.

Ở Pháp, nơi hình học bắt đầu được trau dồi với thành công lớn nhất, Roberval, Fermat, Pascal, đã sử dụng Phương pháp Bất khả phân và thực hiện những cải tiến mới trong đó. **Giles Persone de Roberval** (1602–1675), giáo sư toán học trong bốn mươi năm tại Đại học Pháp ở Paris, đã tự nhận mình là người phát minh ra Phương pháp bất khả phân. Vì các tác phẩm hoàn chỉnh của ông không được xuất bản cho đến sau khi ông qua đời, nên rất khó để giải quyết các câu hỏi ưu tiên. Montucla và Chasles cho rằng ông đã phát minh ra phương pháp độc lập và sớm hơn nhà hình học người Ý, mặc dù công trình của ông được xuất bản sớm hơn nhiều so với của Roberval. Marie cảm thấy khó tin rằng người Pháp không vay mượn bất cứ thứ gì từ người Ý, vì cả hai đều không thể độc lập

đánh vào từ *Indivisiables*, vốn áp dụng cho số lượng vô cùng nhỏ, như quan niệm của Cavalieri, nhưng không phải như ý tưởng của Roberval. Roberval và Pascal đã cải thiện cơ sở duy lý của Phương pháp không thể chia nhỏ, bằng cách xem xét một diện tích được tạo thành từ vô số hình chữ nhật thay vì các đường thẳng, và một vật rắn được tạo thành từ các khối rắn nhỏ vô hạn thay vì các bề mặt. Roberval đã áp dụng phương pháp này để tìm diện tích, thể tích và trọng tâm. Anh ấy đã lập phương trình cầu phương của một parabola ở bất kỳ bậc nào $y^m = a^{m-1}x$, và cả của một parabola $y^m = a^{m-n}x^n$. Chúng tôi đã đề cập đến cầu phương của anh ấy về cycloid. Roberval được biết đến nhiều nhất với phương pháp vẽ tiếp tuyến. Ông là người đầu tiên áp dụng chuyển động cho để giải bài toán quan trọng này. Phương pháp của ông liên kết với nguyên lý thông lượng của Newton. Archimedes nghĩ hình xoắn ốc của ông được tạo ra bởi chuyển động kép. Ý tưởng này Roberval mở rộng cho tất cả các đường cong. Các đường cong phẳng, chẳng hạn như các phần hình nón, có thể được tạo ra bởi một điểm chịu tác dụng của hai lực và là kết quả của hai chuyển động. Nếu tại bất kỳ điểm nào của đường cong, kết quả được phân tích thành các thành phần của nó, thì đường chéo của hình bình hành được xác định bởi chúng là tiếp tuyến của đường cong tại điểm đó. Khó khăn lớn nhất liên quan đến phương pháp khéo léo này là phân giải kết quả thành các thành phần có độ dài và hướng thích hợp. Roberval không phải lúc nào cũng thành công trong việc này, nhưng ý tưởng mới của anh ấy là một bước tiến vượt bậc. Ông đã thoát khỏi định nghĩa cổ xưa về tiếp tuyến là một đường thẳng chỉ có một điểm chung với một đường cong,—một định nghĩa không có giá trị đối với các đường cong cấp cao hơn, cũng không phù hợp ngay cả với các đường cong cấp hai để làm nổi bật tính chất của các tiếp tuyến và các phần mà chúng có thể đóng vai trò trong việc tạo ra các đường cong. Chủ đề về tiếp tuyến cũng nhận được sự quan tâm đặc biệt từ Fermat, Descartes, và Barrow, và đạt đến mức phát triển cao nhất sau khi phát minh

ra phép tính vi phân. Fermat và Descartes đã định nghĩa tiếp tuyến là cát tuyến có hai giao điểm với đường cong trùng nhau; Barrow coi một đường cong là một đa giác, và gọi một trong các cạnh của nó tạo ra một tiếp tuyến.

Pierre de Fermat (1601–1665) là một học giả uyên thâm trong mọi ngành học và một nhà toán học có năng lực phi thường. Ông học luật tại Toulouse, và năm 1631 được bổ nhiệm làm ủy viên hội đồng của quốc hội Toulouse. Thời gian rảnh rỗi của anh ấy chủ yếu dành cho toán học, môn học mà anh ấy đã nghiên cứu với niềm đam mê không thể cưỡng lại. Không giống như Descartes và Pascal, ông có một cuộc sống yên tĩnh và không hung hăng. Fermat đã để lại ấn tượng thiên tài của mình cho tất cả các ngành toán học được biết đến lúc bấy giờ. Đóng góp to lớn cho hình học là *De maximis et minimis* của ông. Khoảng hai mươi năm trước, Kepler lần đầu tiên quan sát thấy rằng gia số của một biến, chẳng hạn như tung độ của một đường cong, biến mất đối với các giá trị rất gần với giá trị cực đại hoặc cực tiểu của các biến. Phát triển ý tưởng này, Fermat đã thu được quy tắc về cực đại và cực tiểu. Anh ấy đã thay thế $x+e$ cho x trong hàm đã cho của x rồi đánh đồng hai giá trị liên tiếp của hàm và chia phương trình cho e. Nếu lấy e 0, thì nghiệm của phương trình này là các giá trị của x, làm cho hàm đạt cực đại hoặc cực tiểu. Fermat đã sở hữu quy tắc này vào khoảng năm 1629. Sự khác biệt chính giữa nó và quy tắc của phép tính vi phân là nó đưa ra đại lượng bất định e thay vì đại lượng vô cùng nhỏ dx. Fermat lấy nó làm cơ sở cho phương pháp vẽ tiếp tuyến của mình.

Do muốn phát biểu rõ ràng, phương pháp của Fermat về cực đại và cực tiểu, và về tiếp tuyến, đã bị người đồng thời vĩ đại của ông, Descartes, công kích dữ dội, người không bao giờ có thể đưa ra công lý xứng đáng cho công lao của mình. Trong cuộc tranh chấp sau đó, Fermat tìm thấy hai người bảo vệ nhiệt tình là Roberval và Pascal, người cha; trong khi Mydorge, Desargues, và Hardy ủng hộ Descartes.

Kể từ khi Fermat đưa ra khái niệm về sự khác biệt nhỏ vô hạn giữa các giá trị liên tiếp của một hàm và đi đến nguyên tắc tìm cực đại và cực tiểu, nó đã được Lagrange, Laplace và Fourier duy trì, rằng Fermat có thể được coi là người đầu tiên phát minh ra phép tính vi phân. Điểm này không được hiểu thấu đáo, như sẽ thấy từ lời của Poisson, bản thân ông là một người Pháp, đã nói rất đúng rằng phép tính vi phân "bao gồm một hệ thống các quy tắc phù hợp để tìm sự khác biệt của tất cả các chức năng, chứ không phải trong việc sử dụng có thể được tạo ra từ những biến thể nhỏ vô hạn này trong giải pháp của một hoặc hai vấn đề riêng biệt."

Blaise Pascal (1623–1662) Một nhà toán học đương đại có thiên tài vượt trội hơn cả Fermat vĩ đại. Ông sinh ra tại Clermont ở Auvergne. Vào khoảng năm 1626, cha ông đã nghỉ hưu ở Paris, nơi ông cống hiến hết mình cho việc dạy dỗ con trai mình, vì ông không tin tưởng giao việc học hành của mình cho người khác. Thiên tài về hình học của Blaise Pascal đã tự bộc lộ khi anh chưa đầy mười hai tuổi. Cha anh rất giỏi toán học, nhưng không muốn con trai mình học nó cho đến khi anh hoàn toàn thông thạo tiếng Latinh và tiếng Hy Lạp. Tất cả những cuốn sách toán học đều bị giấu khỏi tầm mắt của anh. Một lần, cậu bé hỏi cha mình cha nói về vấn đề toán học, và được trả lời chung chung, "rằng đó là phương pháp tạo ra các số liệu một cách chính xác, và tìm ra các tỷ lệ tương đối của chúng với nhau." Đồng thời, ông bị cấm nói chuyện. bất cứ điều gì về nó, hoặc không bao giờ nghĩ về nó. Nhưng thiên tài của anh ấy không thể bị giới hạn trong những giới hạn này. Bắt đầu với một sự thật trần trụi rằng toán học đã dạy phương tiện để tạo ra những con số chính xác không thể sai lầm, anh ấy đã sử dụng những suy nghĩ của mình về nó và với một mẩu than vẽ vẽ trên gạch lát vỉa hè, thử các phương pháp vẽ, ví dụ, một hình tròn chính xác hoặc một tam giác đều. Anh ấy đặt tên riêng cho những con số này và sau đó hình thành các tiên đề, và nói tóm lại, anh ấy đã đến để tạo ra những minh chứng hoàn hảo. Bằng cách này, ông đã đi đến định lý mà không cần trợ giúp

rằng tổng ba góc của một tam giác bằng hai góc vuông. Cha của anh ấy đã bắt gặp anh ấy đang nghiên cứu định lý này, và đã rất ngạc nhiên trước sự siêu phàm và sức mạnh thiên tài của anh ấy đến mức phát khóc vì sung sướng. Giờ đây, người cha đã đưa cho cậu ấy *Elements* của Euclid, mà không cần sự trợ giúp, cậu ấy đã thành thạo một cách dễ dàng. Môn học thường xuyên của cậu ấy là ngôn ngữ, cậu bé chỉ dành hàng giờ để giải trí cho việc học về hình học, tuy nhiên ông đã có một sự thâm nhập sẵn sàng và sống động đến nỗi, ở tuổi mười sáu, ông đã viết một chuyên luận về hình nón, được coi là một nỗ lực đáng ngạc nhiên của một thiên tài, đến nỗi người ta nói rằng không có gì sánh được về sức mạnh của nó. kể từ thời Archimedes. Descartes từ chối tin rằng nó được viết bởi một người còn quá trẻ như Pascal. Chuyên luận này chưa bao giờ được xuất bản và hiện đã thất lạc. Leibniz đã nhìn thấy nó ở Paris và báo cáo về một phần nội dung của nó. Tuổi trẻ sớm phát triển đã đạt được những tiến bộ vượt bậc trong tất cả các ngành khoa học, nhưng việc áp dụng liên tục ở độ tuổi quá non nớt đã làm suy giảm sức khỏe của ông rất nhiều. Tuy nhiên, ông vẫn tiếp tục làm việc, và ở tuổi mười chín, ông đã phát minh ra cỗ máy nổi tiếng của mình để thực hiện các phép toán số học một cách máy móc. Tình trạng căng thẳng liên tục do làm việc quá sức này dẫn đến tình trạng ốm yếu vĩnh viễn, và đôi khi anh ấy nói rằng từ khi mười tám tuổi, anh ấy chưa bao giờ trải qua một ngày nào mà không bị đau. Ở tuổi hai mươi bốn, anh quyết định gác lại việc nghiên cứu khoa học nhân văn và cống hiến tài năng của mình cho tôn giáo. Các Thư tỉnh của ông chống lại Dòng Tên được tổ chức. Nhưng đôi khi anh trở lại nghiên cứu yêu thích của tuổi trẻ. Một đêm thức giấc vì cơn đau răng, một số ý nghĩ vô tình nảy ra trong đầu anh liên quan đến trò cò quay hoặc xích lô; ý này nối tiếp ý kia; và do đó, ông đã phát hiện ra các thuộc tính của đường cong này ngay cả khi trình diễn. Thư từ trao đổi giữa ông và Fermat về một số vấn đề là khởi đầu của lý thuyết xác suất. Bệnh tình của Pascal ngày càng nặng và ông qua đời ở Paris khi mới ba

mươi chín tuổi. [30] Nhờ ông, câu trả lời cho sự phản đối Phương pháp Bất khả phân của Cavalieri đã được đưa ra ở dạng rõ ràng nhất. Giống như Roberval, ông giải thích "tổng các đường thẳng" có nghĩa là "tổng các hình chữ nhật nhỏ vô hạn." Pascal đã nâng cao rất nhiều kiến thức về cycloid. Ông xác định diện tích của một phần được tạo bởi bất kỳ đường nào song song với đáy; thể tích do nó sinh ra quay quanh đáy hoặc quanh trục của nó; và cuối cùng là trọng tâm của các thể tích này, và cả của một nửa thể tích này bị cắt bởi các mặt phẳng đối xứng. Trước khi công bố kết quả của mình, vào khoảng năm 1658, ông đã gửi cho tất cả các nhà toán học lời thách đố nổi tiếng đưa ra giải thưởng cho hai lời giải đầu tiên của những bài toán này. Chỉ có Wallis và A. La Louère cạnh tranh cho họ. Cái sau khá bất bình đẳng với nhiệm vụ; người trước, bị ép thời gian, mắc nhiều lỗi: cả hai đều không được giải. Pascal sau đó đã công bố các giải pháp của riêng mình, điều này đã tạo ra một cảm giác tuyệt vời trong giới khoa học. Wallis cũng đã xuất bản bài viết của mình với các lỗi đã được sửa chữa. Mặc dù không tranh giải nhưng Huygens, Wren và Fermat đã giải được một số câu hỏi. Khám phá chính của **Christopher Wren** (1632–1723), kiến trúc sư nổi tiếng của Nhà thờ lớn St. Paul ở London, là sự chỉnh lưu của một cung tròn và xác định tâm của nó Trọng lực. Fermat tìm thấy diện tích được tạo bởi một cung của cycloid. Huygens đã phát minh ra con lắc cycloidal.

Đầu thế kỷ XVII cũng chứng kiến sự hồi sinh của hình học tổng hợp. Một người vẫn xử lý hình nón bằng các phương pháp cổ xưa, nhưng đã thành công trong việc đơn giản hóa rất nhiều chứng minh dài dòng của Apollonius, là **Claude Mydorge** ở Paris (1585–1647), một người bạn của Descartes. Nhưng nó vẫn dành cho **Girard Desargues** (1593–1662) của Lyons, và cho Pascal, để rời bỏ lối mòn và vạch ra những con đường mới. Họ đã giới thiệu phương pháp quan trọng là Phối cảnh. Tất cả các đường conic trên một hình nón có đáy hình tròn xuất hiện hình tròn đối với một mắt ở đỉnh. Do

đó Desargues và Pascal đã nghĩ ra cách xử lý các đường cônic như các hình chiếu của đường tròn. Hai định lý quan trọng và đẹp đẽ đã được Desargues đưa ra: Một là về "sự tiến triển của sáu điểm," trong đó một đường ngang gặp một đường cônic và một tứ giác nội tiếp; hai là, nếu các đỉnh của hai tam giác, nằm trong không gian hoặc trong một mặt phẳng, nằm trên ba đường thẳng cắt nhau tại một điểm, thì các cạnh của chúng cắt nhau tại ba điểm nằm trên một đường thẳng; và ngược lại. Định lý cuối cùng này đã được Brianchon, Sturm, Gergonne và Poncelet sử dụng trong thời gian gần đây. Poncelet đã biến nó thành cơ sở cho lý thuyết đồng hình tuyệt vời của mình số liệu. Chúng ta mắc nợ Desargues lý thuyết về sự suy thoái và sự chuyển đổi ngang; còn có quan niệm đẹp đẽ rằng hai điểm cực trị của một đường thẳng có thể được coi là gặp nhau ở vô cực, và rằng các đường thẳng song song khác với các cặp đường thẳng khác chỉ ở chỗ giao điểm của chúng ở vô cực. Pascal rất ngưỡng mộ các kết quả của Desargues, ông nói (trong *Essais pour les Coniques* của mình), "Tôi muốn thừa nhận rằng tôi nợ một ít điều mà tôi đã khám phá ra về chủ đề này, các tác phẩm của ông." Các tác phẩm của Pascal và Desargues chứa đựng những ý tưởng cơ bản của hình học tổng hợp hiện đại. Trong công trình tuyệt vời của Pascal về đường cônic, được viết vào năm 16 tuổi và hiện đã bị thất lạc, người ta đã đưa ra định lý về tỷ lệ anharmonic, lần đầu tiên được tìm thấy ở Pappus, và cả mệnh đề nổi tiếng về hình lục giác thần bí, được gọi là "Định lý Pascal", tức là các cạnh đối của một hình lục giác nội tiếp trong một đường cônic cắt nhau tại ba điểm thẳng hàng. Định lý này đã hình thành nền tảng cho lý thuyết của ông. Bản thân ông nói rằng chỉ từ điều này thôi ông đã suy ra hơn 400 hệ quả, bao gồm cả đường cônic của Apollonius và nhiều kết quả khác. Do đó, thiên tài của Desargues và Pascal đã khám phá ra một số kho báu phong phú của hình học tổng hợp hiện đại; nhưng do sự quan tâm hấp dẫn đối với hình học giải tích của Descartes và sau đó là phép tính vi phân, chủ đề này gần như hoàn toàn bị bỏ

quên cho đến thế kỷ hiện tại.

Trong lý thuyết số, không có kết quả mới nào có giá trị khoa học đã đạt được hơn 1000 năm, kéo dài từ thời Diophantus và người Hin-đu cho đến sự khởi đầu của thế kỷ 17. Nhưng thời kỳ huy hoàng mà chúng ta hiện đang xem xét đã sản sinh ra những người đã giải cứu khoa học này khỏi vương quốc của chủ nghĩa thần bí và mê tín dị đoan, nơi nó đã bị giam cầm quá lâu; của các con số lại bắt đầu được nghiên cứu một cách khoa học. Do không sở hữu phép phân tích bất định của đạo Hin-đu, nhiều kết quả tuyệt vời của những người Bà-la-môn phải được người châu Âu khám phá lại. Người Pháp **Bachet de Méziriac** (1581–1638), người theo chủ nghĩa Diophantist đáng chú ý sớm nhất ở châu Âu. Vào khoảng 1612, ông đã xuất bản *Problèmes plaisants et delectables qui se font par les nombres* , và trong 1621 bản tiếng Hy Lạp của *Diophantus* có ghi chú. Cha đẻ của lý thuyết số hiện đại là **Fermat**. Ông có tính cách ít giao tiếp đến mức thường che giấu các phương pháp của mình và chỉ công bố kết quả của mình. Trong một số trường hợp, các nhà phân tích sau này đã rất bối rối khi cố gắng cung cấp các bằng chứng. Fermat sở hữu một bản sao của Bachet's *Diophantus*, trong đó ông đã nhập nhiều ghi chú bên lề. Vào khoảng năm 1670, những ghi chú này đã được đưa vào một ấn bản mới của *Diophantus*, do con trai ông xuất bản. Các định lý khác về số, của Fermat, đã được xuất bản trong *Opera varia* của ông ấy (do con trai ông biên tập) và trong *Commercium epistolicum* của Wallis vào năm 1658. Trong số các định lý sau đây, bảy định lý đầu tiên được tìm thấy trong phần ghi chú bên lề :—

(1) $x^n + y^n = z^n$ là không thể đối với các giá trị tích phân của x, y và z, khi $n > 2$. Nhận xét: "Tôi đã tìm thấy một bằng chứng thực sự tuyệt vời cho điều này, nhưng biên độ quá nhỏ để giữ nó." Định lý này đã nhiều lần trở thành câu hỏi giải thưởng của các xã hội có học. Nó đã làm phát sinh các cuộc điều tra rất thú vị và khó khăn về phía Euler, Lagrange, Dirichlet và Kummer.

(2) Một số nguyên tố dạng $4n+1$ chỉ một lần là cạnh huyền của một tam giác vuông; bình phương của nó là hai lần; khối lập phương của nó gấp ba lần, v.v. Ví dụ: $5^2 = 3^2 + 4^2$; $25^2 = 15^2 + 20^2 = 7^2 + 24^2$; $125^2 = 75^2 + 100^2 = 35^2 + 120^2 = 44^2 + 117^2$.

(3) Một số nguyên tố có dạng $4n+1$ có thể được biểu diễn một lần và chỉ một lần dưới dạng tổng của hai bình phương. Chứng minh bằng Euler.

(4) Một số gồm hai hình lập phương có thể được giải thành hai hình lập phương khác theo vô số cách.

(5) Mọi số đều là số tam giác hoặc tổng của hai hoặc ba số tam giác; một hình vuông hoặc tổng của hai, ba hoặc bốn hình vuông; một số ngũ giác hoặc tổng của hai, ba, bốn hoặc năm số ngũ giác; tương tự cho các số đa giác nói chung. Bằng chứng của định lý này và các định lý khác được Fermat hứa hẹn trong một công trình tương lai chưa bao giờ xuất hiện. Định lý này cũng được đưa ra, cùng với những định lý khác, trong một bức thư năm 1637(?) gửi tới *Pater Mersenne*.

(6) Có thể tìm được bao nhiêu số tùy ý, sao cho bình phương của mỗi số vẫn là bình phương khi cộng hoặc trừ nó với tổng của tất cả các số.

(7) $x^4 + y^4 = z^2$ là không thể.

(8) Trong một bức thư năm 1640, ông đưa ra định lý nổi tiếng thường được gọi là "Định lý Fermat," mà chúng tôi phát biểu trong Ký hiệu của Gauss: Nếu p là số nguyên tố, và a là số nguyên tố đến p, sau đó là $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Nó đã được chứng minh bởi Euler.

(9) Fermat chết với niềm tin rằng ông đã tìm ra quy luật tìm kiếm bấy lâu của các số nguyên tố trong công thức $2^{2^n} + 1 =$ số nguyên tố, nhưng ông thừa nhận rằng mình không thể chứng minh được điều đó một cách nghiêm ngặt. Định luật này không đúng, như Euler đã chỉ ra trong ví dụ $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297 = 6.700.417$ times 641. Máy tính sét của Mỹ *Zerah Colburn*, khi còn là một cậu bé, đã dễ dàng

tìm ra các thừa số, nhưng không thể giải thích phương pháp mà cậu đã thực hiện phép tính nhẩm kỳ diệu của mình.

(10) Một số nguyên tố lẻ có thể biểu diễn dưới dạng hiệu của hai bình phương theo một và chỉ một cách. Định lý này, được đưa ra trong *Relation*, được Fermat sử dụng để phân tích các số lớn thành các thừa số nguyên tố.

(11) Nếu các số nguyên a, b, c là các cạnh của một tam giác vuông thì diện tích của nó không thể là số chính phương. Điều này đã được chứng minh bởi Lagrange.

(12) Nghiệm pháp Fermat của $ax^2 + 1 = y^2$, trong đó a là tích phân nhưng không phải là số chính phương, chỉ được trình bày ở dạng phác thảo rộng nhất, như được đưa ra trong *Relation*. Ông đã đề xuất bài toán cho người Pháp, *Bernhard Frenicle de Bessy*, và vào năm 1657 cho tất cả các nhà toán học còn sống. Ở Anh, Wallis và Lord Brounker đã cùng nhau tìm ra một giải pháp tốn nhiều công sức, được xuất bản vào 1658, và cũng vào 1668, trong một công trình đại số do *John Pell* đưa ra. Mặc dù Pell không có mối liên hệ nào khác với vấn đề, nhưng nó được gọi là "vấn đề của Pell." Giải pháp đầu tiên được người Hindu đưa ra.

Chúng ta không chắc chắn rằng Fermat đã chứng minh chặt chẽ tất cả các định lý của mình. Các phương pháp chứng minh của ông đã hoàn toàn bị thất lạc cho đến 1879, khi một tài liệu được tìm thấy chôn trong số các bản thảo của Huygens trong thư viện Leyden, có tựa đề *Relation des découvertes en la science des nombres*. Từ đó, có vẻ như ông đã sử dụng một phương pháp quy nạp, được ông gọi là *la Desserde infinie ou indefinie*. Ông nói rằng điều này đặc biệt có thể áp dụng trong việc chứng minh tính bất khả thi của một số quan hệ, chẳng hạn như Định lý 11 đã cho ở trên, nhưng ông cũng đã thành công trong việc sử dụng phương pháp này để chứng minh các mệnh đề khẳng định. Do đó, ông đã chứng minh Định lý 3 bằng cách chỉ ra rằng nếu chúng ta giả sử có một số nguyên tố $4n + 1$

không sở hữu tính chất này, thì sẽ có một số nguyên tố nhỏ hơn có dạng $4n+1$ không sở hữu nó; và cái thứ ba nhỏ hơn cái thứ hai, không sở hữu nó; và như thế. Do đó giảm dần vô tận, anh ta đến số 5, là thừa số nguyên tố nhỏ nhất có dạng $4n+1$. Từ giả thiết trên, có thể suy ra rằng 5 không phải là tổng của hai bình phương—một kết luận trái với thực tế. Do đó giả thiết là sai, và định lý được thiết lập. Fermat đã áp dụng thành công phương pháp suy giảm này trong một số lượng lớn các định lý. Bằng phương pháp này, Euler, Legendre, Dirichlet đã chứng minh một số phát biểu của mình và nhiều mệnh đề số khác.

Sự tương ứng giữa *Pascal* và *Fermat* liên quan đến một trò chơi may rủi nhất định là mầm mống của lý thuyết xác suất, lý thuyết này đã đạt được sự phát triển vượt bậc kể từ đó. Chevalier de Méré đã đề xuất với Pascal một bài toán cơ bản, đó là xác định xác suất mà mỗi người chơi có, tại bất kỳ giai đoạn nhất định nào của trò chơi, để thắng trò chơi. Pascal và Fermat cho rằng những người chơi có cơ hội ngang nhau để giành được một điểm.

Người đầu tiên đã truyền đạt vấn đề này cho Fermat, người đã nghiên cứu nó một cách say mê và giải quyết nó bằng lý thuyết tổ hợp, một lý thuyết đã được cả ông và Pascal nghiên cứu kỹ lưỡng. Phép tính xác suất cũng thu hút sự chú ý của Huygens. Định lý quan trọng nhất mà anh ấy đạt được là, nếu A có p cơ hội giành được số tiền a và q cơ hội giành được số tiền b, thì anh ta có thể mong đợi giành được số tiền $\frac{ap+bq}{p+q}$. Công trình vĩ đại tiếp theo về lý thuyết xác suất là *Ars conjectandi* của Jakob Bernoulli.

Trong số những người xưa, Archimedes là người duy nhất đạt được những quan niệm rõ ràng và đúng đắn về thống kê lý thuyết. Ông đã sở hữu chắc chắn ý tưởng về áp suất, vốn là gốc rễ của khoa học cơ học. Nhưng ý tưởng của ông đã ngủ yên gần hai mươi thế kỷ, cho đến thời của **Stevin** và **Galileo**. Stevin đã xác định chính xác lực cần thiết để duy trì một vật trên mặt phẳng nghiêng một góc bất

kỳ so với đường chân trời. Ông đã sở hữu một học thuyết hoàn chỉnh về trạng thái cân bằng. Trong khi Stevin nghiên cứu về tĩnh học, Galileo theo đuổi chủ yếu là động lực học. Galileo là người đầu tiên từ bỏ ý tưởng của Aristotle rằng các vật thể hạ xuống nhanh hơn theo tỷ lệ khi chúng nặng hơn; ông đã thiết lập định luật chuyển động đầu tiên; xác định quy luật của các vật thể rơi xuống; và, đã có được một khái niệm rõ ràng về gia tốc và tính độc lập của các chuyển động khác nhau, đã có thể chứng minh rằng các viên đạn chuyển động theo các đường cong parabol. Cho đến thời của ông, người ta tin rằng một viên đạn đại bác lúc đầu di chuyển về phía trước theo một đường thẳng và sau đó đột ngột rơi thẳng đứng xuống đất. Galileo hiểu rõ về *lực ly tâm*, và đã đưa ra định nghĩa chính xác về *động lượng*. Mặc dù ông đã xây dựng nguyên lý cơ bản của tĩnh học, được gọi là *hình bình hành của các lực*, nhưng ông vẫn chưa nhận ra đầy đủ phạm vi của nó. Nguyên lý của vận tốc ảo một phần được hình thành bởi **Guido Ubaldo** (mất năm 1607), và sau đó đầy đủ hơn bởi Galileo.

Galileo là người sáng lập khoa học về động lực học. Trong số những người cùng thời với ông, chủ yếu là những điều mới lạ mà ông phát hiện được trên bầu trời đã khiến ông được tôn vinh, nhưng Lagrange tuyên bố rằng những khám phá thiên văn của ông chỉ cần một chiếc kính viễn vọng và sự kiên trì, trong khi đó cần một thiên tài phi thường để khám phá các quy luật từ các hiện tượng, mà chúng ta thấy liên tục và lời giải thích thực sự đã thoát khỏi tất cả các nhà triết học trước đó. Người đóng góp đầu tiên cho khoa học cơ học sau Galileo là Descartes.

TỪ DESCARTES ĐẾN NEWTON

René Descartes (1596–1650) Trong số những nhà tư tưởng đầu tiên của thế kỷ 17 và 18, những người đã sử dụng sức mạnh tinh thần của mình để phá bỏ những ý tưởng cũ và xây dựng những ý

tưởng mới. Mặc dù suốt đời ông tuyên xưng đức tin chính thống, nhưng trong khoa học, ông là một người hoài nghi sâu sắc. Ông phát hiện ra rằng những nhà tư tưởng thông minh nhất thế giới đã nghiên cứu siêu hình học từ lâu, nhưng họ không khám phá ra điều gì chắc chắn cả; không, thậm chí đã mâu thuẫn thẳng thừng với nhau. Điều này đã dẫn ông đến một quyết định vĩ đại là không chấp nhận bất cứ điều gì theo thẩm quyền, nhưng bắt mọi thứ phải được kiểm tra kỹ lưỡng, theo các phương pháp điều tra mới. Sự chắc chắn của các kết luận trong hình học và số học đã khơi dậy trong tâm trí ông sự tương phản giữa những cách tìm kiếm chân lý đúng và sai. Sau đó, ông đã cố gắng áp dụng suy luận toán học cho tất cả các ngành khoa học. "So sánh những bí ẩn của tự nhiên với các định luật toán học, ông dám hy vọng rằng những bí mật của cả hai có thể được mở ra bằng cùng một chiếc chìa khóa." Vì vậy, ông đã xây dựng một hệ thống triết học gọi là Học thuyết Descartes.

Tuyệt vời như danh tiếng của Descartes với tư cách là một nhà siêu hình học, có thể đặt câu hỏi khá công bằng rằng liệu tuyên bố của ông được hậu thế ghi nhớ với tư cách là một nhà toán học có vĩ đại hơn hay không. Triết lý của ông từ lâu đã bị thay thế bởi các hệ thống khác, nhưng hình học giải tích của Descartes sẽ mãi mãi là một tài sản quý giá. Năm 21 tuổi, Descartes gia nhập quân đội của Hoàng tử Maurice xứ Orange. Những năm tháng đi lính là những năm tháng thảnh thơi, ông có thời gian để theo đuổi việc học. Vào thời điểm đó, toán học là môn khoa học yêu thích của ông. Nhưng vào năm 1625, ông không còn cống hiến hết mình cho toán học thuần túy. Ngài William Hamilton đã sai lầm khi tuyên bố rằng Descartes coi việc nghiên cứu toán học là hoàn toàn nguy hại như một phương tiện của văn hóa nội tại. Trong một lá thư gửi cho Mersenne, Descartes nói: "M. Desargues buộc tôi phải chịu trách nhiệm vì những nỗi đau mà ông ấy vui lòng có được ở tôi, ở chỗ ông ấy cho thấy rằng ông ấy xin lỗi vì tôi không muốn học thêm về hình học, nhưng tôi đã quyết định từ bỏ hình học trừu tượng, tức là, việc

xem xét các câu hỏi *chỉ dùng để rèn luyện trí óc*, và điều này, để nghiên cứu một loại hình học khác, đối tượng của nó là giải thích các hiện tượng tự nhiên.... Bạn biết rằng toàn bộ vật lý của tôi không có gì khác ngoài hình học." Khoảng thời gian từ năm 1629 đến 1649 đã được ông thông qua ở Hà Lan trong nghiên cứu, chủ yếu, về vật lý và siêu hình học. Nơi ở của ông ở Hà Lan là trong những ngày rực rỡ nhất của nhà nước Hà Lan. Năm 1637, ông xuất bản cuốn *Discours de la Méthode*, trong đó có một bài tiểu luận dài 106 trang về hình học. *Hình học* của anh ấy không dễ đọc. Một ấn bản sau đó đã xuất hiện với ghi chú của bạn anh ấy *De Beaune*, nhằm loại bỏ những khó khăn.

Người ta thường nói rằng Descartes là người đầu tiên áp dụng đại số vào hình học. Tuyên bố này là không chính xác, vì Vieta và những người khác đã làm điều này trước anh ta. Ngay cả người Ả Rập đôi khi sử dụng đại số liên quan đến hình học. Bước mới mà Descartes đã thực hiện là đưa vào hình học một phương pháp phân tích dựa trên khái niệm biến và hằng, cho phép ông biểu diễn các đường cong bằng các phương trình đại số. Trong hình học Hy Lạp, ý tưởng về chuyển động là mong muốn, nhưng với Descartes, nó đã trở thành một quan niệm rất hiệu quả. Theo ông, một điểm trên mặt phẳng được xác định vị trí bằng khoảng cách của nó với hai đường thẳng hoặc hai trục cố định. Những khoảng cách này thay đổi với mỗi lần thay đổi vị trí trong điểm. Ý tưởng hình học của *biểu diễn tọa độ*, cùng với ý tưởng đại số của *hai biến trong một phương trình* có vô số giá trị đồng thời, đã cung cấp một phương pháp nghiên cứu quỹ tích, điều này rất đáng ngưỡng mộ đối với tính tổng quát của các giải pháp của nó. Do đó, toàn bộ các mặt cắt hình nón của Apollonius được bao bọc và chứa trong một phương trình duy nhất bậc hai.

Thuật ngữ Latinh cho "origin" mà Descartes sử dụng bắt nguồn từ biểu thức *lineæ ordinatæ* được các nhà khảo sát La Mã sử dụng cho các đường song song. Thuật ngữ *abscissa* xuất hiện lần đầu tiên trong một tác phẩm bằng tiếng Latinh năm 1659, được viết bởi

Stefano degli Angeli (1623–1697), một giáo sư toán học ở Rome. [3] Hình học của Descartes được gọi là “hình học giải tích”, một phần vì, không giống như hình học tổng hợp của người xưa, nó thực ra là *analytical*, theo nghĩa là từ này là được sử dụng trong logic; và một phần vì thực tế sau đó đã phát sinh, chỉ định bằng thuật ngữ *analysis* phép tính với các đại lượng chung.

Ví dụ quan trọng đầu tiên được Descartes giải trong hình học của ông là “bài toán Pappus”; viz. “Cho một số đường thẳng trong một mặt phẳng, để tìm quỹ tích của một điểm sao cho các đường vuông góc, hay tổng quát hơn, các đường thẳng tạo thành các góc cho trước, vẽ từ điểm đó đến các dòng đã cho, sẽ thỏa mãn điều kiện là tích của một số trong số chúng sẽ theo một tỷ lệ nhất định với tích của các dòng còn lại.” Trong bài toán nổi tiếng này, người Hy Lạp chỉ giải được trường hợp đặc biệt khi số dòng đã cho là bốn , trong trường hợp đó quỹ tích của điểm hóa ra là một đường cônic. Đến Descartes, nó đã được giải quyết hoàn toàn, và nó là một ví dụ xuất sắc về việc sử dụng phương pháp phân tích của ông trong nghiên cứu về locus. Một giải pháp khác sau đó được đưa ra bởi Newton trong *Principia*.

Các phương pháp vẽ tiếp tuyến do Roberval và Fermat phát minh đã được chú ý sớm hơn. Descartes đưa ra phương pháp thứ ba. Trong tất cả các bài toán mà ông giải quyết bằng hình học của mình, không có bài toán nào mang lại cho ông niềm vui lớn bằng phương pháp dựng các tiếp tuyến. Nó sâu sắc nhưng hoạt bát, và về mặt đó, nó kém hơn của Fermat. Giải pháp của ông dựa trên phương pháp *Hệ số không xác định*, trong đó ông vinh dự phát minh ra. Các hệ số bất định cũng được ông sử dụng để giải các phương trình biquadratic.

Các bài tiểu luận của Descartes về khúc xạ và hình học đã bị Fermat chỉ trích gay gắt, ông đã viết những bài phản đối bài trước, và gửi chuyên luận của riêng mình về “cực đại và cực tiểu” để chỉ ra rằng có những thiếu sót trong hình học . Descartes sau đó đã công kích phương pháp tiếp tuyến của Fermat. Descartes đã sai trong

cuộc tấn công này, nhưng ông vẫn tiếp tục cuộc tranh cãi một cách ngoan cố. Anh ấy cũng có một cuộc tranh cãi với Roberval về cycloid. Đường cong này đã được gọi là "Helen của các nhà đo đạc hình học" do các thuộc tính tuyệt đẹp của nó và những tranh cãi mà khám phá của họ gây ra. Phép cầu phương của nó bởi Roberval thường được coi là một thành tựu xuất sắc, nhưng Descartes đã nhận xét về nó bằng cách nói rằng bất kỳ ai thông thạo hình học vừa phải cũng có thể làm được điều này. Sau đó, anh ấy đã gửi một bản trình diễn ngắn của riêng mình. Khi Roberval tiết lộ rằng ông đã được hỗ trợ bởi kiến thức về giải pháp, Descartes đã xây dựng tiếp tuyến của đường cong và thách thức Roberval và Fermat làm điều tương tự. Fermat đã hoàn thành nó, nhưng Roberval chưa bao giờ thành công trong việc giải quyết vấn đề này, vấn đề đã khiến thiên tài Descartes phải trả giá đắt nhưng chỉ được chú ý ở mức độ vừa phải.

Ông đã nghiên cứu một số đường cong mới, hiện được gọi là "Ovals of Descartes," mà ông dự định dùng để chế tạo thấu kính hội tụ, nhưng không mang lại kết quả có giá trị thực tế nào.

Việc áp dụng đại số vào học thuyết đường cong đã có tác dụng tích cực đối với đại số. Là một khoa học trừu tượng, Descartes đã cải thiện nó bằng cách sử dụng có hệ thống các số mũ và bằng cách giải thích và xây dựng đầy đủ các đại lượng âm. Descartes cũng thiết lập một số định lý về lý thuyết phương trình. Nổi tiếng là "quy tắc dấu hiệu" của ông để xác định số lượng gốc dương và âm; viz. một phương trình có thể có bao nhiêu nghiệm + khi có các biến thể của dấu, và càng nhiều nghiệm – khi có các hằng số của dấu. Descartes bị Wallis buộc tội đã tự mình sử dụng của lý thuyết phương trình của Harriot, đặc biệt là chế độ của ông trong việc tạo ra các phương trình; nhưng dường như không có cơ sở tốt cho khoản phí. Wallis cũng tuyên bố rằng Descartes đã không nhận thấy rằng quy tắc dấu ở trên là không đúng bất cứ khi nào phương trình có nghiệm ảo; nhưng Descartes không nói rằng phương trình *luôn có*, mà nói rằng nó *có thể có* rất nhiều nghiệm. Đúng là Descartes không xem

xét trực tiếp trường hợp của những điều tưởng tượng, nhưng sau đó trong *Hình học* của mình, ông đưa ra bằng chứng không thể chối cãi về khả năng xử lý trường hợp này.

Trong cơ học, khó có thể nói Descartes là người có vượt xa Galileo. Người thứ hai đã lật đổ những ý tưởng của Aristotle về chủ đề này, và Descartes chỉ đơn giản là "lao mình vào kẻ thù" mà đã bị "dập tắt". định luật thứ nhất và thứ hai của chuyển động là một cải tiến về hình thức, nhưng định luật thứ ba của ông là sai về bản chất. Chuyển động của các vật thể trong tác động trực tiếp của chúng đã được Galileo hiểu một cách không hoàn hảo, Descartes đã đưa ra sai lầm và lần đầu tiên được phát biểu chính xác bởi Wren, Wallis và Huygens.

Một trong những học trò tận tụy nhất của Descartes là *Công chúa Elizabeth* uyên bác, con gái của Frederick V. Bà đã áp dụng hình học giải tích mới để giải "Bài toán Apollonian." Người kế vị hoàng gia thứ hai của ông là *Queen Christina*, con gái của Gustavus Adolphus. Cô thúc giục Descartes đến tòa án Thụy Điển. Sau nhiều do dự, ông đã nhận lời vào năm 1649. Ông qua đời tại Stockholm một năm sau đó. Cuộc đời anh là một cuộc chiến trường kỳ chống lại những thành kiến của loài người.

Điều đáng chú ý nhất là ban đầu toán học và triết học của Descartes ít được đồng bào của ông đánh giá cao hơn so với người nước ngoài. Tính khí vô kỷ luật của Descartes đã khiến các nhà toán học vĩ đại người Pháp đương thời, Roberval, Fermat, Pascal xa lánh. Họ tiếp tục điều tra của riêng mình, và ở một số điểm phản đối mạnh mẽ Descartes. Các trường đại học của Pháp nằm dưới sự kiểm soát chặt chẽ của giáo hội và không làm gì để giới thiệu toán học và triết học của ông. Chính tại các trường đại học trẻ trung của Holland mà ảnh hưởng của những lời dạy của Descartes đã được ngay lập tức và mạnh mẽ nhất.

Người Pháp lỗi lạc duy nhất ngay lập tức theo bước chân của bậc

thầy vĩ đại là **De Beaune** (1601–1652). Ông là một trong những người đầu tiên chỉ ra rằng các tính chất của một đường cong có thể được suy ra từ các tính chất của tiếp tuyến của nó. Phương thức tìm hiểu này được gọi là *phương pháp nghịch đảo của tiếp tuyến*. Ông đã đóng góp cho lý thuyết phương trình bằng cách xem xét lần đầu tiên giới hạn trên và dưới của nghiệm của phương trình số.

Ở Hà Lan, một số lượng lớn các nhà toán học nổi tiếng đã ngay lập tức ngưỡng mộ hình học Descartes. Đứng đầu trong số này là *van Schooten*, *John de* Witt, *van Heuraet*, *Sluze* và *Hudde*. **Van Schooten** (mất năm 1660), giáo sư toán học tại Leyden, đã xuất bản một ấn bản về hình học của Descartes, cùng với các ghi chú của De Beaune. Tác phẩm chính của ông là *Exercitees Mathematicæ*, trong đó ông áp dụng hình học giải tích để giải nhiều bài toán thú vị và khó. **Johann de Witt** có trái tim cao thượng, một người về hưu lớn của Hà Lan, được tôn vinh như một chính khách và vì kết cục bi thảm của ông, là một nhà hình học nhiệt thành. Ông đã nghĩ ra một phương pháp mới và khéo léo để tạo ra các đường conic, về cơ bản giống như phương pháp tạo ra các tia bằng bút chì xạ ảnh trong hình học tổng hợp hiện đại. Ông xử lý chủ đề này không phải theo cách tổng hợp, mà với sự hỗ trợ của phép phân tích Descartes. **René François de Sluze** (1622–1685) và **Johann Hudde** (1633–1704) đã thực hiện một số cải tiến đối với phương pháp của Descartes và Fermat vẽ tiếp tuyến, và trên lý thuyết về cực đại và cực tiểu. Với Hudde, chúng tôi thấy lần đầu tiên sử dụng ba biến trong hình học giải tích. Ông là tác giả của một quy tắc tài tình để tìm các nghiệm bằng nhau. Chúng ta minh họa nó bằng phương trình $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$. Lấy một cấp số cộng 3, 2, 1, 0, trong đó số hạng lớn nhất bằng với bậc của của phương trình, rồi lần lượt nhân từng số hạng của phương trình theo số hạng tương ứng của cấp số cộng, chúng ta nhận được $3x^3 - 2x^2 - 8x = 0$ hoặc $3x^2 - 2x - 8 = 0$. Phương trình cuối cùng này thấp hơn một độ so với phương trình ban đầu. Tìm G.C.D. của hai phương trình. Đây là $x - 2$; do đó 2 là một trong

hai nghiệm bằng nhau. Nếu không có ước chung thì phương trình ban đầu sẽ không có nghiệm bằng nhau. Hudde đã minh họa cho quy tắc này. [24]

Heinrich van Heuraet phải được nhắc đến như một trong những hình học sớm nhất, người đã thành công trong việc nắn chỉnh các đường cong. Ông đã quan sát một cách tổng quát rằng hai bài toán cầu phương và chỉnh lưu thực sự giống hệt nhau, và bài toán này có thể rút gọn thành bài toán kia. Vì vậy, ông đã thực hiện việc chỉnh sửa hyperbola trở lại cầu phương của hyperbola. Hình parabol bán lập phương $y^3 = ax^2$ là đường cong đầu tiên được nắn chính xác tuyệt đối. Điều này dường như đã được hoàn thành một cách độc lập bởi Van Heuraet ở Hà Lan và **William Neil** (1637–1670) ở Anh. Theo Wallis, quyền ưu tiên thuộc về Neil. Ngay sau đó, cycloid đã được sửa lại bởi Wren và Fermat.

Ông hoàng của các nhà triết học ở Hà Lan, và là một trong những nhà khoa học vĩ đại nhất của thế kỷ XVII, là **Christian Huygens** (1629–1695), quê ở Hague. Nổi tiếng với tư cách là nhà vật lý và thiên văn học, cũng như nhà toán học, ông là người tiền nhiệm xứng đáng của Ngài Isaac Newton. Ông học tại Leyden dưới sự hướng dẫn của *Van Schooten* trẻ hơn. Sự quan tâm của một số định lý đầu tiên của ông đã khiến Descartes dự đoán sự vĩ đại trong tương lai của ông. Năm 1651, Huygens đã viết một chuyên luận trong đó ông chỉ ra những sai lầm của Gregory St. Vincent (1584–1667) về chủ đề bậc hai. Bản thân ông đã đưa ra một phép tính gần đúng rất gần và thuận tiện cho chiều dài của một cung tròn. Năm 1660 và 1663, ông đến Paris và London. Năm 1666, ông được Louis XIV bổ nhiệm làm thành viên của Học viện Khoa học. Ông được thuyết phục ở lại Paris từ thời điểm đó cho đến 1681, w khi anh ấy trở về thành phố quê hương của mình, một phần để xem xét sức khỏe của anh ấy và một phần vì việc hủy bỏ Sắc lệnh Nantes.

Phần lớn những khám phá sâu sắc của ông được thực hiện với sự

trợ giúp của hình học cổ đại, mặc dù đôi khi ông sử dụng hình học của Descartes hoặc của Cavalieri và Fermat. Do đó, giống như người bạn nổi tiếng của mình, Ngài Isaac Newton, ông luôn tỏ ra thiên vị hình học Hy Lạp. Newton và Huygens là những người có tâm hồn đồng điệu và dành cho nhau sự ngưỡng mộ lớn nhất. Newton luôn gọi ông là "Summus Hugenius."

Đối với hai đường cong (parabol lập phương và cycloid) trước đó đã được chỉnh sửa, ông đã thêm một đường thứ ba,—cissoid. Ông đã giải bài toán của dây xích, xác định bề mặt của hình nón parabol và hyperbolic, đồng thời phát hiện ra các tính chất của đường cong logarit và chất rắn do nó tạo ra. Huygens' *De horologio oscillatorio* (Paris, 1673) là một tác phẩm chỉ đứng thứ hai sau *Principia* của Newton và tạo thành trong lịch sử như một lời giới thiệu cần thiết với nó. [13] Cuốn sách mở đầu bằng mô tả về đồng hồ quả lắc, trong đó Huygens là người phát minh ra. Sau đó, tiếp theo là cách xử lý chuyển động có gia tốc của các vật thể rơi tự do, hoặc trượt trên các mặt phẳng nghiêng, hoặc trên các đường cong cho trước,—đỉnh điểm là khám phá xuất sắc rằng cycloid là đường cong đồng thời. Đối với lý thuyết về các đường cong, ông đã bổ sung thêm lý thuyết quan trọng về "các đường tiến hóa". Sau khi giải thích rằng tiếp tuyến của đường tiến hóa bình thường với đường cong, ông đã áp dụng lý thuyết này cho đường cycloid, và chứng minh bằng lập luận đơn giản rằng đường tiến hóa của đường cong này là một đường cycloid bằng nhau. Sau đó là cuộc thảo luận chung hoàn chỉnh về trung tâm dao động. Chủ đề này đã được đề xuất cho cuộc điều tra của Mersenne và được thảo luận bởi Descartes và Roberval. Trong giả định của Huygens rằng trung tâm chung của lực hấp dẫn của một nhóm các vật thể, dao động quanh một trục nằm ngang, tăng lên độ cao ban đầu, nhưng không cao hơn, lần đầu tiên được thể hiện một trong những nguyên lý đẹp nhất của động lực học, sau này được gọi là nguyên lý bảo toàn của *vis viva*. [32] Mười ba định lý ở phần cuối của công trình liên quan đến lý thuyết về lực ly tâm trong

chuyển động tròn. Lý thuyết này đã giúp Newton khám phá ra định luật vạn vật hấp dẫn.

Huygens đã viết chuyên luận chính thức đầu tiên về xác suất. Ông đã đề xuất lý thuyết sóng ánh sáng và với kỹ năng tuyệt vời đã áp dụng hình học vào sự phát triển của nó. Lý thuyết này đã bị lãng quên trong một thời gian dài, nhưng đã được Young và Fresnel hồi sinh và phát triển thành công một thế kỷ sau đó. Huygens và anh trai của ông đã cải tiến chiếc kính viễn vọng bằng cách nghĩ ra một phương pháp mài và đánh bóng thấu kính tốt hơn. Với các công cụ hiệu quả hơn, ông đã xác định bản chất của phần phụ của Sao Thổ và giải quyết các câu hỏi thiên văn khác. *Opuscula posthuma* của Huygens xuất hiện vào khoảng năm 1703.

Bây giờ đi từ Hà Lan đến Anh, chúng ta gặp ở đó một trong những nhà toán học nguyên bản nhất trong thời đại của ông—**John Wallis** (1616–1703). Ông được giáo dục cho Nhà thờ tại Cambridge và gia nhập Holy Order. Nhưng thiên tài của ông chủ yếu được sử dụng trong nghiên cứu toán học. Năm 1649, ông được bổ nhiệm làm giáo sư hình học Savilian tại Oxford. Ông là một trong những thành viên ban đầu của Hiệp hội Hoàng gia, được thành lập vào năm 1663. nắm bắt các phương pháp toán học của cả Cavalieri và Descartes. *Các mặt cắt Conic* của ông là công trình sớm nhất trong đó các đường cong này không còn được coi là các phần của một hình nón, nhưng là các đường cong cấp hai, và được xử lý một cách giải tích bằng phương pháp tọa độ Descartes. lý do, buộc tội Descartes đạo văn phát sinh từ Harriot. Chúng ta có đã được đề cập ở nơi khác Giải pháp của Wallis cho các câu hỏi có lời giải về cycloid do Pascal đề xuất.

Arithmetic of Infinites, xuất bản năm 1655, là tác phẩm vĩ đại nhất của ông. Bằng cách áp dụng phép phân tích cho Phương pháp chia đôi, ông đã tăng đáng kể sức mạnh của công cụ này để tạo ra các phép tính cầu phương. Ông đã tiến xa hơn Kepler bằng cách sử

dụng rộng rãi hơn “định luật về tính liên tục” và đặt hoàn toàn tin cậy vào nó. Theo định luật này, ông đã coi mẫu số của các phân số là lũy thừa với số mũ âm. Do đó, cấp số nhân giảm dần x^3, x^2, x^1, x^0, nếu tiếp tục, sẽ cho x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, v.v.; tương tự như $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$. Các số mũ của chuỗi hình học này nằm trong cấp số cộng liên tục, 3, 2, 1, 0, −1, −2, −3. Ông cũng sử dụng số mũ phân số, giống như số âm, đã được phát minh từ rất lâu trước đó, nhưng không được giới thiệu rộng rãi. Biểu tượng ∞ cho vô cực là do anh ấy.

Cavalieri và các nhà hình học người Pháp đã xác định được công thức để bình phương parabol ở bất kỳ bậc nào, $y = x^m$, m là một số nguyên dương. Bằng cách tổng các lũy thừa của các số hạng của chuỗi số học vô hạn, người ta thấy rằng đường cong $y = x^m$ là diện tích của hình bình hành có cùng đáy và cùng độ cao với 1 là $m+1$. Được hỗ trợ bởi định luật về tính liên tục, Wallis đã đi đến kết quả là công thức này đúng không chỉ khi m dương và nguyên, mà cả khi nó là phân số hoặc âm. Do đó, trong parabola $y = \sqrt{px}$, $m = \frac{1}{2}$; do đó diện tích của đoạn parabol bằng diện tích của hình chữ nhật ngoại tiếp là $1 : 1\frac{1}{2}$ hoặc $2 : 3$. Một lần nữa, giả sử rằng trong $y = x^m$, $m = -\frac{1}{2}$; thì đường cong là một loại hypebol được gọi là các tiệm cận của nó và không gian hyperbol giữa đường cong và các tiệm cận của nó là hình bình hành tương ứng là $1 : \frac{1}{2}$. Nếu $m = -1$, như trong hyperbola đều chung $y = x^{-1}$ hoặc $xy = 1$, thì tỷ lệ này là $1 : -1 + 1$ hoặc $1 : 0$, cho thấy rằng không gian tiệm cận của nó là vô hạn. Nhưng trong trường hợp m lớn hơn đơn vị và âm, Wallis đã không thể giải thích chính xác kết quả của mình. Ví dụ: nếu $m = -3$, thì tỷ lệ sẽ trở thành $1 : -2$ hoặc bằng một số âm. Ý nghĩa của việc này là gì? Wallis đã lý luận như vậy: Nếu mẫu số chỉ bằng 0, thì diện tích đã là vô hạn; nhưng nếu nó nhỏ hơn 0, thì diện tích phải lớn hơn vô hạn. Sau đó, Varignon đã chỉ ra rằng không gian này, được cho là vượt quá vô hạn, thực sự là hữu hạn, nhưng được coi là tiêu cực; nghĩa là, được đo theo hướng ngược lại. [31] Phương pháp Wallis dễ dàng mở rộng

cho các trường hợp như $y = ax^{\frac{m}{n}} + bx^{\frac{p}{q}}$ bằng cách thực hiện phép tính cầu phương cho từng số hạng một cách riêng biệt, rồi cộng các kết quả.

Cách mà Wallis nghiên cứu phương trình cầu phương của vòng tròn và đi đến biểu thức của anh ấy cho giá trị của π là thật phi thường. Ông phát hiện ra rằng các khu vực bao gồm giữa các trục, tung độ tương ứng với x và các đường cong được biểu thị bằng các phương trình $y = (1-x^2)^0$, $y = (1-x^2)^1$, $y = (1-x^2)^2$, $y = (1-x^2)^3$, v.v., được biểu thị bằng hàm của các hình chữ nhật ngoại tiếp có x và y cho các mặt của chúng, bằng số lượng tạo thành chuỗi

$$\begin{aligned}
&x,\\
&x - \tfrac{1}{3}x^3,\\
&x - \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5,\\
&x - \tfrac{3}{3}x^3 + \tfrac{3}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7, etc.
\end{aligned}$$

Khi $x = 1$, các giá trị này lần lượt trở thành 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, v.v. Bây giờ vì tọa độ của đường tròn là $y = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, số mũ của nó là $\frac{1}{2}$ hoặc giá trị trung bình nằm trong khoảng 0 và 1, câu hỏi về phương trình bậc hai này tự rút gọn thành: Nếu 0, 1, 2, 3, v.v., được vận hành theo một luật nhất định, hãy đưa ra 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, $\frac{1}{2}$ sẽ mang lại điều gì khi được vận hành theo cùng một luật? Anh ấy đã cố gắng giải quyết vấn đề này bằng *nội suy*, một phương pháp lần đầu tiên đưa trở nên nổi tiếng nhờ anh ấy, và sau đó là một và khó phân tích ở biểu thức rất đáng chú ý sau:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdots}$$

Anh ấy đã không thành công trong việc tự thực hiện phép nội suy, bởi vì anh ấy không sử dụng số mũ theo nghĩa đen hoặc tổng quát, và không thể hình dung ra một chuỗi có nhiều hơn một số hạng và ít hơn hai, điều mà đối với anh ấy, dường như chuỗi nội suy phải có. Việc xem xét khó khăn này đã đưa Newton đến khám phá về Định

lý nhị thức. Đây là nơi tốt nhất để nói về khám phá đó. Newton gần như giả định rằng các điều kiện tương tự làm cơ sở cho các biểu thức tổng quát cho các diện tích đã cho ở trên cũng phải đúng đối với biểu thức được nội suy. Đầu tiên, ông quan sát thấy rằng trong mỗi biểu thức, số hạng đầu tiên là x, rằng x tăng lũy thừa lẻ, rằng các dấu thay thế + và −, và rằng các số hạng thứ hai $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$, là cấp số cộng. Do đó, hai số hạng đầu tiên của chuỗi nội suy phải là $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$. Tiếp theo, ông xem xét rằng các mẫu số 1, 3, 5, 7, v.v., là cấp số cộng, và các hệ số trong tử số trong mỗi biểu thức là các chữ số của một lũy thừa nào đó của số 11; cụ thể là, đối với biểu thức đầu tiên, 11^0 hoặc 1; đối với lần thứ hai, 11^1 hoặc 1, 1; đối với thứ ba, 11^2 hoặc 1, 2, 1; cho lần thứ tư, 11^3 hoặc 1, 3, 3, 1; v.v. Sau đó, ông phát hiện ra rằng, khi đã cho chữ số thứ hai (gọi nó là m), các chữ số còn lại có thể tìm được bằng cách nhân liên tục các số hạng của chuỗi $\frac{m-0}{1}\cdot dfracm-12\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot$, v.v. Do đó, nếu $m=4$ thì $4\,cdot\frac{m-1}{2}$ cho 6; $6\cdot\frac{m-2}{3}$ cho 4; $4\cdot\frac{m-3}{4}$ cho 1. Áp dụng quy tắc này cho chuỗi bắt buộc, vì số hạng thứ hai là $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, nên ta có $m=\frac{1}{2}$, rồi lấy các hệ số tiếp theo lần lượt ở các tử số $-\frac{1}{8}$, $+\frac{1}{16}$, $-\frac{5}{128}$, v.v.; do đó, diện tích cần thiết cho đoạn tròn là $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}-\frac{\frac{1}{8}x^5}{5}-\frac{\frac{1}{16}x^7}{7}-$, v.v. Do đó, ông nhận thấy biểu thức nội suy là một chuỗi vô hạn, thay vì một chuỗi có nhiều hơn một số hạng và ít hơn hai, như Wallis tin rằng nó phải như vậy. Phép nội suy này gợi ý cho Newton một phương thức mở rộng $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$, hay tổng quát hơn, $(1-x^2)^m$, thành một chuỗi. Anh ấy quan sát thấy rằng anh ấy chỉ cần bỏ qua biểu thức vừa tìm được các mẫu số 1, 3, 5, 7, v.v., và hạ thấp từng lũy thừa của x bằng đơn vị, và anh ấy đã có biểu thức mong muốn. Trong một lá thư gửi cho Oldenburg (13/6/1676), Newton phát biểu định lý như sau: Việc rút các nghiệm được rút ngắn nhiều bởi định lý

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}}=P^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\text{etc.},$$

trong đó A có nghĩa là số hạng đầu tiên, $P^{\frac{m}{n}}$, B số hạng thứ hai, C số hạng thứ ba, v.v. Ông đã xác minh nó bằng phép nhân thực tế, nhưng không đưa ra bằng chứng thông thường của nó. Ông đã đưa nó cho bất kỳ số mũ nào, nhưng không phân biệt giữa trường hợp khi số mũ là dương và tích phân, và những trường hợp khác.

Ở đây cần đề cập rằng những khởi đầu rất thô sơ của định lý nhị thức được tìm thấy từ rất sớm. Người Hindu và Người Ả Rập đã sử dụng các khai triển của $(a+b)^2$ và $(a+b)^3$ để rút nghiệm; Vieta đã biết khai triển của $(a+b)^4$; nhưng này là kết quả của phép nhân đơn giản mà không cần khám phá ra bất kỳ định luật nào. Các hệ số nhị thức cho số mũ nguyên dương đã được một số nhà toán học Ả Rập và châu Âu biết đến. Pascal lấy các hệ số từ phương pháp cái được gọi là "tam giác số học." Lucas de Burgo, Stifel, Stevinus, Briggs và những người khác, tất cả đều sở hữu một cái gì đó mà từ đó người ta sẽ nghĩ rằng định lý nhị thức có thể đã được chú ý một chút, "nếu chúng ta không biết rằng những quan hệ đơn giản như vậy rất khó khám phá."

Mặc dù Wallis đã có được một biểu thức hoàn toàn mới cho π, nhưng ông không hài lòng với nó; vì thay vì một số lượng hữu hạn các thuật ngữ mang lại một giá trị tuyệt đối, nó chỉ chứa một số lượng vô hạn, ngày càng tiến gần đến giá trị đó. Do đó, ông đã thuyết phục bạn mình, **Lord Brouncker** (1620?-1684), chủ tịch đầu tiên của Hiệp hội Hoàng gia, điều tra chủ đề này. Tất nhiên Lord Brouncker đã không tìm thấy những gì họ đang theo đuổi, nhưng anh ấy đã đạt được sự bình đẳng đẹp đẽ sau:—

$$\pi = \cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\text{etc.}}}}}}$$

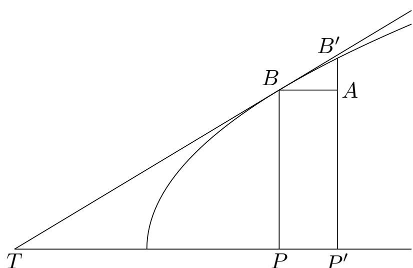
Các phân số liên tục, cả tăng dần và giảm dần, dường như đã được

người Hy Lạp và Ấn Độ giáo biết đến, mặc dù không có trong ký hiệu hiện tại của chúng ta. Biểu thức của Brouncker đã khai sinh ra lý thuyết về các phân số liên tục.

Phương pháp bậc hai của Wallis đã được các đệ tử của ông nghiên cứu kỹ lưỡng. Lord Brouncker đã thu được chuỗi vô hạn đầu tiên cho diện tích của một hyperbola đều giữa các tiệm cận của nó. **Nicolaus Mercator** của Holstein, người đã định cư ở Anh, đã đưa ra một loạt bài tương tự trong *Logarithmotechnia* (London, 1668) của mình. Ông bắt đầu với tính chất lớn của hyperbola đều, được phát hiện vào năm 1647 bởi *Gregory St. Vincent*, đã kết nối không gian hyperbol giữa các tiệm cận với các logarit tự nhiên và dẫn đến các logarit này được gọi là hyperbol. Bằng cách đó, Mercator đã tìm ra chuỗi logarit mà Wallis đã thử nhưng không tìm được. Ông đã chỉ ra cách xây dựng các bảng logarit có thể được rút gọn thành dạng cầu phương của không gian hypebol. Theo một số gợi ý của Wallis, *William Neil* đã thành công trong việc điều chỉnh hình parabol lập phương, và *Wren* trong chỉnh lưu bất kỳ cung cycloidal nào.

Isaac Barrow, một nhà toán học lỗi lạc người Anh và cùng thời với Wallis (1630-1677). Ông là giáo sư toán học ở London, và sau đó là ở Cambridge, nhưng vào năm 1669, ông đã nhường ghế cho người học trò lừng lẫy của mình, Isaac Newton, và từ bỏ việc nghiên cứu toán học để chuyển sang nghiên cứu về thần thánh. Là một nhà toán học, ông nổi tiếng nhất với phương pháp tiếp tuyến. Ông đã đơn giản hóa phương pháp Fermat bằng cách giới thiệu hai số vô cùng nhỏ thay vì một, và gần đúng với quá trình lập luận sau đó được Newton áp dụng trong học thuyết của ông về Tỷ lệ cực đại .

Ông coi tam giác vuông vô cực ABB' có đối với các cạnh của nó, sự khác biệt giữa hai tọa độ liên tiếp, khoảng cách giữa chúng và phần đường cong bị chặn bởi chúng. Tam giác này tương tự với *BPT*, được tạo bởi tung độ, tiếp tuyến và tiếp tuyến phụ.



Do đó, nếu chúng ta biết tỷ số của $B'A$ so với BA, thì chúng ta biết tỷ số của tung độ và tiếp tuyến phụ, và tiếp tuyến có thể được dựng ngay lập tức. Đối với bất kỳ đường cong nào, giả sử $y^2 = px$, tỷ lệ của $B'A$ so với BA được xác định từ phương trình của nó như sau: Nếu x nhận được mức tăng vô hạn $PP' = e$, thì y nhận được một số gia $B'A = a$ và phương trình của hoành độ $B'P'$ trở thành $y^2 + 2ay + a^2 = px + pe$. Vì $y^2 = px$, chúng ta có $2ay + a^2 = pe$; bỏ qua các lũy thừa cao hơn của các vi phân, chúng ta có $2ay = pe$, mang lại

$$a : e = p : 2y = p : 2\sqrt{px}.$$

Nhưng $a : e =$ tọa độ : tiếp tuyến; vì thế

$$p : 2\sqrt{px} = \sqrt{px} : \text{sub-tangent},$$

đưa ra $2x$ cho giá trị của tiếp tuyến phụ. Phương pháp này chỉ khác với phương pháp của phép tính vi phân ở ký hiệu. [31]

TỪ NEWTON TỚI EULER

Người ta thấy rằng ở Pháp đã đạt được tiến bộ khoa học phi thường vào đầu và giữa thế kỷ XVII. Sự khoan dung đánh dấu triều đại của Henry IV. và Louis XIII. được đi kèm với hoạt động trí tuệ mạnh mẽ. Niềm tin phi thường đã được đặt vào sức mạnh của tâm trí con người. Những cuộc chinh phục trí tuệ táo bạo của Descartes, Fermat và Pascal đã làm phong phú toán học với những kho báu bất diệt. Trong thời gian đầu của triều đại Louis XIV. chúng ta nhìn thấy ánh hoàng hôn huy hoàng của thời kỳ huy hoàng này. Sau đó là một đêm đầy hiệu quả về mặt tinh thần. Điều này thiếu các nhà tư tưởng khoa học vĩ đại dưới triều đại của Louis XIV. có thể là do một thực tế đơn giản là không có bộ óc vĩ đại nào được sinh ra; nhưng,

theo Buckle, đó là do chủ nghĩa gia trưởng, tinh thần phụ thuộc và phục tùng, cũng như sự thiếu khoan dung, đã đánh dấu chính sách của Louis XIV.

Trong trường hợp không có nhà tư tưởng vĩ đại người Pháp, Louis XIV. bao quanh mình bởi những người nước ngoài nổi tiếng. Römer đến từ Đan Mạch, Huygens đến từ Hà Lan, Dominic Cassini đến từ Ý, là những nhà toán học và thiên văn học tô điểm cho tòa án của ông. Họ đã sở hữu một danh tiếng rực rỡ trước khi đến Paris. Đơn giản vì họ thực hiện công trình khoa học ở Paris, công trình đó không thuộc về nước Pháp cũng như những khám phá của Descartes thuộc về Hà Lan, của Lagrange thuộc về Đức, hay của Euler và Poncelet thuộc về Nga. Chúng ta phải tìm kiếm các quốc gia khác ngoài Pháp để tìm kiếm những nhà khoa học vĩ đại của nửa cuối thế kỷ XVII.

Khoảng thời gian Louis XIV. đảm nhận sự chỉ đạo của chính phủ Pháp Charles II. trở thành vua nước Anh. Vào thời điểm này, nước Anh đang mở rộng thương mại và hàng hải của mình, đồng thời thăng tiến đáng kể về sự thịnh vượng về vật chất. Một phong trào trí thức mạnh mẽ đã diễn ra, được nhà vua vô tình ủng hộ. Thời đại của thơ ca không lâu sau đó là thời đại của khoa học và triết học. Trong hai thế kỷ liên tiếp, nước Anh đã sản sinh ra Shakespeare và Newton!

Nước Đức vẫn tiếp tục trong tình trạng suy thoái quốc gia. Chiến tranh Ba mươi năm đã chia rẽ đế chế và tàn bạo với người dân. Tuy nhiên, thời kỳ đen tối nhất trong lịch sử nước Đức này đã sản sinh ra Leibniz, một trong những thiên tài vĩ đại nhất của thời hiện đại.

Có những tiêu điểm nhất định trong lịch sử mà các đường tiến bộ trong quá khứ hội tụ về đó, và từ đó tỏa ra những tiến bộ của tương lai. Đó là thời đại của Newton và Leibniz trong lịch sử toán học. Trong suốt 50 năm trước thời đại này, một số nhà toán học thông minh và nhạy bén nhất đã uốn nắn sức mạnh thiên tài của họ

theo hướng mà cuối cùng đã dẫn đến việc Newton và Leibniz khám phá ra phép tính vi phân. Cavalieri, Roberval, Fermat, Descartes, Wallis và những người khác từng đóng góp cho hình học mới. Tiến bộ đạt được lớn đến mức, và họ tiến gần đến việc phát minh ra phép phân tích vô cùng nhỏ đến nỗi cả Lagrange và Laplace đều tuyên bố người đồng hương của họ, Fermat, là người phát minh ra nó. Do đó, phép tính vi phân không phải là một khám phá cá nhân mà là kết quả vĩ đại của một loạt các khám phá của những bộ óc khác nhau. Thật vậy, không có khám phá vĩ đại nào lóe lên trong tâm trí ngay lập tức, và mặc dù những khám phá của Newton sẽ ảnh hưởng đến nhân loại cho đến tận cùng thế giới, nhưng phải thừa nhận rằng những dòng của Pope chỉ là một " tưởng tượng thơ ca ":—

> " Tự nhiên và các quy luật của Tự nhiên ẩn mình trong đêm;
> Chúa phán: 'Hãy để Newton tồn tại', và tất cả là ánh sáng."

Isaac Newton (1642-1727) sinh ra tại Woolsthorpe, ở Lincolnshire, cùng năm mà Galileo qua đời. Khi mới sinh ra, ông quá nhỏ bé và yếu ớt đến mức tuyệt vọng với cuộc đời. Khi còn nhỏ, mẹ anh đã gửi anh đến một trường làng, và đến năm thứ 12, anh đến trường công lập ở Grantham. Lúc đầu, anh có vẻ rất lơ là trong học tập và có thành tích học tập rất thấp; nhưng khi, một ngày nọ, cậu bé Isaac đã bị một cậu bé xếp trên đá một cú mạnh vào bụng, cậu đã học hành chăm chỉ cho đến khi xếp hạng cao hơn đối thủ của mình ở trường. Từ đó cậu tiếp tục vươn lên cho đến khi đứng đầu. [33] Tại Grantham, Isaac thể hiện sở thích quyết đoán đối với các phát minh cơ khí. Cậu đã chế tạo đồng hồ nước, cối xay gió, xe ngựa do người ngồi trong xe di chuyển và các đồ chơi khác. Khi cậu được mười lăm tuổi, mẹ cậu đã nhận cậu nhà để hỗ trợ cô quản lý trang trại, nhưng anh ấy không thích công việc đồng áng và tính cách không thể cưỡng lại được. niềm đam mê học tập, khiến cô ấy gửi anh ấy trở lại Grantham, nơi anh ấy ở lại cho đến năm thứ mười tám, khi anh ấy vào Trinity College, Cambridge (1660). Cambridge là nơi sinh

thực sự của thiên tài Newton. Một số ý tưởng về khả năng trực giác mạnh mẽ của ông có thể được rút ra từ thực tế là ông coi các định lý của hình học cổ đại là chân lý hiển nhiên, và rằng, không cần bất kỳ nghiên cứu sơ bộ nào, ông đã tự biến mình thành bậc thầy về *Hình học* của Descartes. Sau đó, ông coi việc bỏ bê hình học cơ bản này là một sai lầm trong nghiên cứu toán học của mình, và ông bày tỏ sự tiếc nuối với Tiến sĩ Pemberton rằng "ông đã chuyên tâm vào các công trình của Descartes và các tác giả đại số khác trước khi ông có đã xem xét *Elements* của Euclid với sự chú ý mà một nhà văn xuất sắc xứng đáng có được." Bên cạnh *Hình học* của Descartes, ông đã nghiên cứu *Clavis* của Oughtred, của Kepler textitOptics, các tác phẩm của Vieta, *Miscellanies* của Schooten, *Lectures* của Barrow và tác phẩm của Wallis. Ông đặc biệt thích thú với *Arithmetic of Infinites* của Wallis, một chuyên luận chứa đầy những gợi ý phong phú và đa dạng. Newton đã may mắn có được một người thầy và một người bạn nhanh chóng, Tiến sĩ Barrow nổi tiếng, người đã được bầu làm giáo sư tiếng Hy Lạp vào năm 1660, và được phong làm giáo sư toán học Lucasian vào năm 1663. Toán học của Barrow và của Wallis là những điểm khởi đầu mà từ đó Newton, với năng lực cao hơn các bậc thầy của mình, đã tiến tới những lĩnh vực rộng lớn hơn. Wallis đã tạo ra phép cầu phương của các đường cong có tọa độ được biểu thị bằng tích phân bất kỳ và lũy thừa dương của $(1-x^2)$. Chúng ta đã thấy Wallis đã cố gắng nhưng thất bại trong việc nội suy giữa các diện tích được tính như vậy, diện tích của các đường cong khác, chẳng hạn như đường tròn; cách Newton tấn công vấn đề, thực hiện phép nội suy và phát hiện ra Định lý nhị thức, cho phép truy cập trực tiếp và dễ dàng hơn nhiều vào phương pháp cầu phương của các đường cong so với phương pháp nội suy; vì ngay cả khi biểu thức nhị thức của tọa độ được nâng lên lũy thừa phân số hoặc âm, thì nhị thức đó có thể ngay lập tức được mở rộng thành một chuỗi và phép cầu phương của từng số hạng riêng biệt của chuỗi đó có thể được thực hiện bằng phương pháp Wallis. Newton đã giới thiệu hệ thống

các chỉ số theo nghĩa đen.

Nghiên cứu của Newton về cầu phương nhanh chóng đưa ông đến một phát minh khác và sâu sắc nhất. Bản thân ông nói rằng vào năm 1665 và 1666, ông đã nghĩ ra phương pháp thông lượng và áp dụng chúng cho phương pháp cầu phương của các đường cong. Newton đã không truyền đạt phát minh này cho bất kỳ người bạn nào của mình cho đến năm 1669, khi ông đặt nó vào tay của Barrow một bài báo có tựa đề *De Analysi per Æquationes Numero Terminorum Infinitas*, đã được Barrow gửi cho Collins, người đã rất ngưỡng mộ nó. Trong chuyên luận này nguyên tắc của dòng chảy, mặc dù được chỉ ra rõ ràng, nhưng chỉ được phát triển và giải thích một phần. Giả sử trục hoành tăng đều theo tỷ lệ thời gian, ông coi diện tích của một đường cong là một Đại lượng mới sinh tăng lên bằng cách tiếp tục biến đổi theo tỷ lệ với độ dài của tung độ. Biểu thức thu được cho từ thông lượng mà ông đã mở rộng thành một chuỗi hữu hạn hoặc vô hạn các số hạng đơn thức, áp dụng được quy tắc Wallis. Barrow kêu gọi Newton xuất bản cuốn sách này khái niệm; "nhưng sự khiêm tốn của tác giả, mà sự thái quá, nếu không phải là đáng trách, thì chắc chắn là rất đáng tiếc trong trường hợp hiện tại, đã ngăn cản việc tuân thủ của anh ta."[26] Giá như tài liệu này được xuất bản sau đó, thay vì bốn mươi hai nhiều năm sau, có lẽ sẽ không có dịp để xảy ra cuộc tranh cãi dài và đáng trách như vậy giữa Newton và Leibniz.

Trong một thời gian dài, phương pháp của Newton vẫn chưa được biết đến, ngoại trừ bạn bè của ông và các phóng viên của họ. Trong một bức thư gửi cho Collins, đề ngày 10 tháng 12 đến ngày 10 tháng 1672 năm 1672, Newton trình bày sự thật về phát minh của mình bằng một ví dụ, rồi nói: "Đây là một phương pháp cụ thể, hay đúng hơn là hệ quả tất yếu, của một phương pháp tổng quát, nó tự mở rộng mà không cần bất kỳ tính toán rắc rối, không chỉ để vẽ các tiếp tuyến với bất kỳ đường cong nào, dù là hình học hay cơ học, hoặc dù sao đi nữa đối với các đường thẳng hoặc các đường cong khác,

mà còn để giải quyết các loại vấn đề khó hiểu khác về độ cong, diện tích, độ dài, trọng tâm của các đường cong, v.v.; nó cũng không (như phương pháp Maximis và Minimis của Hudden) bị giới hạn trong các phương trình không chứa các đại lượng bất thường. Tôi đã đan xen phương pháp này với phương pháp khác là làm việc trong các phương trình, bằng cách rút gọn chúng thành các chuỗi vô hạn."

Những từ cuối cùng này liên quan đến một chuyên luận mà ông đã soạn vào năm 1671, có tựa đề *Phương pháp của Fluxions*, trong đó ông nhằm mục đích trình bày phương pháp của mình như một phép tính độc lập và như một hệ thống hoàn chỉnh. Bài viết này nhằm mục đích giới thiệu ấn bản *Đại số* của Kinckhuysen, mà ông đã đảm nhận xuất bản. "Nhưng nỗi sợ liên quan đến các tranh chấp về khám phá mới này, hoặc có lẽ mong muốn làm cho nó hoàn thiện hơn, hoặc có lợi thế duy nhất là sử dụng nó trong các nghiên cứu vật lý của mình, đã khiến ông từ bỏ thiết kế này." [33]

Ngoại trừ hai bài báo về quang học, tất cả các công trình của ông dường như chỉ được xuất bản sau khi có lời kêu gọi cấp thiết nhất của bạn bè và trái với mong muốn của chính ông. [34] Các nghiên cứu của ông về ánh sáng đã bị chỉ trích gay gắt, và ông đã viết vào năm 1675: "Tôi bị ám ảnh bởi những cuộc thảo luận phát sinh từ lý thuyết ánh sáng của mình đến nỗi tôi đổ lỗi cho sự thiếu thận trọng của mình vì đã từ bỏ một phước lành to lớn như sự im lặng của mình để chạy theo một cái bóng."

Phương pháp của Fluxions, được dịch bởi J. Colson từ tiếng Latin của Newton, được xuất bản lần đầu tiên vào 1736, tức sáu mươi lăm năm sau khi nó được viết. Trong đó, trước tiên, ông giải thích sự mở rộng thành các chuỗi đại lượng phân số và vô tỷ,—một chủ đề mà trong những năm đầu tiên ông nghiên cứu, ông đã nhận được sự quan tâm kỹ lưỡng nhất. Sau đó, ông tiến tới lời giải của hai bài toán cơ học sau đây, có thể nói là trụ cột của phép tính trừu tượng:—

"I. Độ dài của không gian được mô tả liên tục (tức là tại mọi thời

điểm) cho trước; để tìm vận tốc của chuyển động tại bất kỳ thời điểm nào được đề xuất.

"II. Vận tốc của chuyển động được cho liên tục; để tìm chiều dài của không gian được mô tả bất cứ lúc nào được đề xuất."

Chuẩn bị cho lời giải, Newton nói: "Như vậy, trong phương trình $y = x^2$, nếu y đại diện cho độ dài của không gian tại bất kỳ thời điểm nào được mô tả, mà (thời gian) không gian khác x, bằng tăng với tốc độ đồng đều $\dot{x}$, đo lường và thể hiện như mô tả: sau đó $2x\dot{x}$ sẽ đại diện cho tốc độ mà không gian y, tại cùng một thời điểm, tiến hành được mô tả; và ngược lại."

"Nhưng trong khi chúng ta không cần xem xét thời gian ở đây, bất kỳ khoảng thời gian nào xa hơn nó được giải thích và đo lường bằng một chuyển động cục bộ tương đương; và ngoài ra, trong khi chỉ có thể so sánh các đại lượng cùng loại với nhau, cũng như vận tốc tăng và giảm của chúng; do đó, trong phần tiếp theo, tôi sẽ không quan tâm đến thời gian được xem xét chính thức, nhưng tôi sẽ giả sử một số đại lượng được đề xuất, cùng loại, được tăng lên bởi một dòng chảy cân bằng, mà phần còn lại có thể được gọi là đã đến lúc; và, do đó, bằng phép loại suy, nó có thể không nhận được tên gọi thời gian một cách không chính đáng." Trong phát biểu này của Newton chứa đựng một câu trả lời thỏa đáng cho sự phản đối đã được đưa ra chống lại phương pháp của ông, rằng nó đưa vào phân tích cái ngoại lai. ý tưởng về chuyển động. Do đó, một đại lượng tăng theo dòng chảy đều, là cái mà ngày nay chúng ta gọi là một biến độc lập.

Newton tiếp tục: "Bây giờ, những đại lượng mà tôi coi là tăng dần và vô tận, sau đây tôi sẽ gọi là *fluents*, hoặc *lượng chảy*, và sẽ biểu thị chúng bằng chữ cái cuối cùng của bảng chữ cái, v, x, y, và z; ... và vận tốc mà mọi thông thạo được tăng lên nhờ chuyển động tạo ra của nó (mà tôi có thể gọi là *fluxions*, hoặc đơn giản là vận tốc, hoặc tốc độ), tôi sẽ biểu thị bằng cùng một chữ cái được trỏ, do đó, $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. Nghĩa là, đối với độ chính xác của số lượng v, tôi sẽ đặt $\dot{v}$,

và đối với độ chính xác của các số lượng khác x, y, và z, tôi sẽ đặt $\dot{x}$, $\dot{y}$, và $\dot{z}$, tương ứng.” Ở đây cần lưu ý rằng Newton không coi bản thân các thông lượng là vô cùng nhỏ. “momen của dòng chảy,”, một thuật ngữ được giới thiệu thêm về sau, là với số lượng vô cùng nhỏ. Những “khoảnh khắc” này, như được định nghĩa và sử dụng trong *Phương pháp của Fluxions*, về cơ bản là sự khác biệt của Leibniz. De Morgan chỉ ra rằng có một số lượng không nhỏ sự nhầm lẫn do việc sử dụng từ *fluxion* và ký hiệu $\dot{x}$ bởi tất cả các nhà văn người Anh trước 1704, ngoại trừ Newton và Cheyne, theo nghĩa là một số gia nhỏ vô cùng. [35] Nói thì lạ, ngay cả trong *Commercium Epistolicum* các từ *moment* và *fluxion* dường như được sử dụng đồng nghĩa.

Sau khi chỉ ra bằng các ví dụ cách giải bài toán đầu tiên, Newton tiến hành chứng minh lời giải của mình:—

“ Các khoảnh khắc của các đại lượng chảy (nghĩa là các phần nhỏ vô hạn của chúng, bằng cách thêm vào đó, trong những phần thời gian nhỏ vô hạn, chúng liên tục tăng lên) giống như vận tốc chuyển động của chúng hoặc tăng.

“Do đó, nếu khoảnh khắc của bất kỳ một số nào (as x) được biểu diễn bằng tích của tốc độ của nó $\dot{x}$ thành một số lượng vô cùng nhỏ 0 (tức là bởi $\dot{x}0$), khoảnh khắc của các giá trị khác, v, y, z, sẽ được đại diện bởi $\dot{v}0$, $\dot{y}0$, $\dot{z}0$; bởi vì $\dot{v}0$, $\dot{x}0$, $\dot{y}0$ và $\dot{z}0$ đối với nhau là $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$ và $\dot{z}$.

“Bây giờ vì các khoảnh khắc, như $\dot{x}0$ và $\dot{y}0$, là những phần gia nhập nhỏ vô hạn của các đại lượng đang chảy x và y, theo đó các đại lượng đó được tăng lên qua một vài khoảng thời gian nhỏ vô tận, thì theo sau đó, những đại lượng đó, x và y, sau bất kỳ khoảng thời gian nhỏ vô hạn nào, sẽ trở thành $x+\dot{x}0$ và $y+\dot{y}0$, và do đó, phương trình luôn thể hiện một cách thờ ơ mối quan hệ của các đại lượng chảy, cũng sẽ thể hiện mối quan hệ giữa $x+\dot{x}0$ và $y+\dot{y}0$, như giữa x và y; để $x+\dot{x}0$ và $y+\dot{y}0$ có thể được thay thế trong cùng một phương trình cho các đại lượng đó, thay vì x and y. Do đó, hãy cho bất kỳ phương

trình nào $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ và thay thế $x + \dot{x}0$ cho x và $y + \dot{y}0$ cho y, và sẽ phát sinh

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3x^2\dot{x}0 + 3x\dot{x}0\dot{x}0 + \dot{x}^3 0^3 \\ -ax^2 - 2ax\dot{x}0 - a\dot{x}0\dot{x}0 \\ +axy + ay\dot{x}0 \quad + a\dot{x}0\dot{y}0 \\ \quad + ax\dot{y}0 \\ -y^3 \quad - 3y^2\dot{y}0 - 3y\dot{y}0\dot{y}0 - \dot{y}^3 0^3 \end{array}\right\} = 0.$$

"Bây giờ, theo giả định, $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, do đó, bị xóa và các số hạng còn lại được chia cho 0, sẽ vẫn còn

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}0 - a\dot{x}\dot{x}0 + a\dot{x}\dot{y}0$$
$$- 3y\dot{y}\dot{y}0 + \dot{x}^3 00 - \dot{y}^3 00 = 0.$$

Nhưng trong khi số 0 được coi là vô cùng nhỏ, để nó có thể biểu diễn các khoảnh khắc của các đại lượng, thì các số hạng được nhân với nó sẽ chẳng là gì đối với phần còn lại (*termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati*); do đó tôi từ chối chúng, và vẫn còn

$$3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0,$$

như trên trong Ví dụ I." Newton ở đây sử dụng số vô hạn.

Khó khăn hơn nhiều so với bài toán đầu tiên là những khó khăn gặp phải khi giải bài toán thứ hai, liên quan đến các phép toán nghịch đảo vốn đã đánh thuế kỹ năng của các nhà phân tích giỏi nhất kể từ thời của ông. Đầu tiên Newton đưa ra một giải pháp đặc biệt cho bài toán thứ hai, trong đó ông sử dụng một quy tắc mà ông không chứng minh được.

Trong lời giải tổng quát của bài toán thứ hai, Newton giả định tính thuần nhất đối với các thông lượng và sau đó xem xét ba trường hợp: (1) khi phương trình chứa hai thông lượng đại lượng và ngoại trừ một trong các thông lượng; (2) khi phương trình liên quan đến

cả thông lượng cũng như thông lượng; (3) khi phương trình chứa thông lượng và thông lượng của ba đại lượng trở lên. Trường hợp đầu tiên là dễ nhất vì nó chỉ yêu cầu tích phân $\frac{dy}{dx} = f(x)$, mà “giải pháp đặc biệt” của anh ấy có thể áp dụng được. Trường hợp thứ hai không đòi hỏi gì khác ngoài nghiệm tổng quát của một phương trình vi phân bậc nhất. Những người biết những nỗ lực cần thiết sau đó để khám phá đầy đủ lĩnh vực này trong giải tích sẽ không đánh giá thấp công trình của Newton mặc dù ông đã sử dụng các nghiệm dưới dạng chuỗi vô hạn. Trường hợp thứ ba của Newton bây giờ là nghiệm của phương trình đạo hàm riêng. Anh ấy đã lấy phương trình $2\dot{x} - \dot{z} + x\dot{y} = 0$ và thành công trong việc tìm ra một tích phân cụ thể của nó.

Phần còn lại của chuyên luận dành cho việc xác định cực đại và cực tiểu, bán kính cong của các đường cong và các ứng dụng hình học khác của phép tính thông lượng của ông. Tất cả điều này đã được thực hiện trước năm 1672.

Cần phải lưu ý rằng trong *Phương pháp của Fluxions* (cũng như trong *De Analysi* của ông và tất cả các bài báo trước đó), phương pháp mà Newton sử dụng là cực kỳ nhỏ, và về bản chất giống như phương pháp của Leibniz. Do đó, khái niệm ban đầu về phép tính ở Anh, cũng như ở Lục địa, được dựa trên các phép tính vô hạn. Các nguyên tắc cơ bản của phép tính thông lượng lần đầu tiên được đưa ra thế giới trong *Principia*; nhưng ký hiệu đặc biệt của nó đã không xuất hiện cho đến khi được xuất bản trong tập thứ hai của bộ sách *Algebra* của Wallis vào năm 1693. Về cơ bản, phần giải thích được đưa ra trong *Algebra* một đóng góp của Newton; nó dựa trên vô hạn. Trong lần xuất bản đầu tiên của *Principia* (1687), mô tả về dòng chảy cũng được dựa trên các hạt vô hạn, nhưng trong lần xuất bản thứ hai (1713) thì cơ sở này có phần thay đổi. Trong Sách II. Bổ đề II. của ấn bản đầu tiên chúng tôi đọc: “Tuy nhiên, hãy cẩn thận để hiểu các hạt hữu hạn. *Ngay khi khoảnh khắc kết thúc là sự vĩ đại,*

chúng không còn là khoảnh khắc. Vì hữu hạn ở một mức độ nào đó trái ngược với sự tăng hoặc giảm vĩnh viễn của chúng. Các nguyên tắc về độ lớn hữu hạn phải được hiểu là đã được sinh ra.” Trong lần xuất bản thứ hai, hai câu mà chúng tôi in nghiêng được thay thế bằng câu sau: “Particulæ finitæ non sunt momenta sed quantitates ipsæ ex momentis genitæ.” Thông qua độ khó của các cụm từ trong cả hai đoạn trích, điều này xuất hiện rất rõ ràng, rằng trong lần đầu tiên, các khoảnh khắc là những lượng vô cùng nhỏ. Không rõ chúng là gì nữa trong phần thứ hai. [35] Trong *Cầu phương của các đường cong* của năm 1704, số lượng vô cùng nhỏ bị loại bỏ hoàn toàn. Người ta đã chỉ ra rằng trong *Phương pháp thông lượng*, Newton đã bác bỏ các số hạng liên quan đến đại lượng 0, vì chúng vô cùng nhỏ so với các số hạng khác. Lập luận này rõ ràng là sai lầm; miễn là 0 là một đại lượng, dù rất nhỏ, thì việc bác bỏ này không thể được thực hiện mà không ảnh hưởng đến kết quả. Newton dường như đã cảm nhận được điều này, vì trong *Cầu phương của các đường cong*, ông đã nhận xét rằng “trong toán học không được bỏ qua những lỗi nhỏ nhất" (errores quam minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi).

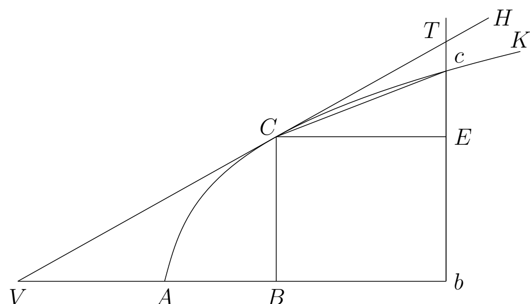
Sự khác biệt ban đầu giữa hệ thống của Newton và Leibniz nằm ở chỗ, Newton, giữ quan niệm về vận tốc hoặc dòng chảy, đã sử dụng số gia vô cùng nhỏ như một phương tiện để xác định nó, trong khi với Leibniz quan hệ của các số gia nhỏ vô hạn tự nó là đối tượng của sự xác định. Sự khác biệt giữa hai chủ yếu dựa trên sự khác biệt trong phương thức tạo số lượng. [35]

Chúng tôi đưa ra tuyên bố của Newton về phương pháp thông lượng hoặc tốc độ, như được đưa ra trong phần giới thiệu về *Cầu phương của đường cong* của ông. “Tôi coi các đại lượng toán học ở chỗ này không phải bao gồm các phần rất nhỏ, mà được mô tả bởi một chuyển động liên tục. Các đường được mô tả, và do đó được tạo ra, không phải bởi sự sắp xếp của các bộ phận, mà bởi sự chuyển động liên tục của các điểm; bề ngoài bởi sự chuyển động của các

dòng; chất rắn do chuyển động của bề mặt; góc quay của các bên; các phần thời gian theo dòng chảy liên tục: v.v. với số lượng khác. Những gen này thực sự diễn ra trong bản chất của sự vật, và được nhìn thấy hàng ngày trong chuyển động của các vật thể. . . .

" Thông lượng, theo như chúng tôi muốn (*quam proxime*), là số lượng thông thạo được tạo ra theo thời gian, bằng nhau và càng nhỏ càng tốt, và nói một cách chính xác, chúng nằm trong tỷ lệ nguyên tố của các số gia mới sinh; nhưng chúng có thể được biểu thị bằng bất kỳ dòng nào, tỷ lệ thuận với chúng."

Newton minh họa cho khẳng định cuối cùng này bằng bài toán về tiếp tuyến: Gọi AB là trục hoành, BC tung, VCH tiếp tuyến, Ec gia số của hoành, mà tạo ra gặp VH tại T, và Cc sự tăng trưởng của đường cong. Đường bên phải Cc được tạo thành K, có ba hình tam giác nhỏ được tạo thành, đường thẳng CEc, đường hỗn hợp CEc và đường thẳng CET. Trong số này, cái đầu tiên rõ ràng là nhỏ nhất và cái cuối cùng là lớn nhất. Bây giờ, giả sử tọa độ bc di chuyển đến vị trí BC, sao cho điểm c hoàn toàn trùng với điểm C; CK, và do đó, đường cong Cc, trùng với tiếp tuyến CH, Ec tuyệt đối bằng với ET, và tam giác biến thiên hỗn hợp CEc, ở dạng cuối cùng, tương tự như tam giác CET; và các cạnh biến thiên của nó CE, Ec, Cc, sẽ tỉ lệ với CE, ET và CT, các cạnh của tam giác CET. Do đó, suy ra rằng các thông lượng của các đường thẳng AB, BC, AC, nằm trong tỷ lệ cuối cùng của các số gia giảm dần của chúng, tỷ lệ thuận với các cạnh của tam giác CET, hoặc, tất cả đều là một , của tam giác VBC đồng dạng. Miễn là các điểm C và c cách xa nhau một khoảng, dù nhỏ đến đâu, đường thẳng CK sẽ phân cách một góc nhỏ so với tiếp tuyến CH. Nhưng khi CK



trùng với CH, và các đường thẳng CE, Ec, cC đạt đến các tỷ số cực đại của chúng, thì các điểm C và c trùng khớp chính xác và là một và tương tự như vậy Newton sau đó nói thêm rằng "trong toán học không được bỏ qua những lỗi nhỏ nhất". Đây rõ ràng là một sự bác bỏ các định đề của Leibniz. Học thuyết về số lượng vô cùng nhỏ ở đây bị bác bỏ theo cách khiến người ta cho rằng Newton chưa bao giờ tự mình nắm giữ nó. Vì vậy, có vẻ như học thuyết của Newton là khác nhau trong các thời kỳ khác nhau. Mặc dù, theo cách lập luận ở trên, Charybdis của những người vô hạn có thể tránh được một cách an toàn, nhưng sự nguy hiểm của một cái nhìn chằm chằm của Scylla vào mặt chúng ta. Chúng ta buộc phải tin rằng một điểm có thể coi là một tam giác, hoặc một tam giác có thể nội tiếp một điểm; không, ba tam giác khác nhau đó trở nên giống nhau và bằng nhau khi chúng đạt đến hình thức cuối cùng tại một và cùng một điểm.

Trong phần giới thiệu về *Cầu phương của các đường cong*, dòng của x^n được xác định như sau:—

"Đồng thời x, bằng cách chảy, trở thành $x+0$, lũy thừa x^n trở thành $(x+0)^n$, tức là theo phương pháp vô hạn loạt

$$x^n + n0x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2} + \text{etc.},$$

và sự tăng trưởng

$$0 \text{ and } n0x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}0^2x^{n-2} + \text{etc.},$$

đối với nhau như

$$1 \text{ to } nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}0x^{n-2} + \text{etc.}$$

"Bây giờ hãy để các gia số biến mất, và tỷ lệ cuối cùng của chúng sẽ là 1 to nx^{n-1}: do đó, sự thay đổi liên tục của số lượng x là sự thay đổi liên tục của số lượng x^n dưới dạng $1 : nx^{n-1}$.

"Thông lượng của các đường, thẳng hoặc cong, trong mọi trường hợp, cũng như thông lượng của các bề mặt, góc và các đại lượng

khác, có thể thu được theo cách tương tự bằng phương pháp tỷ lệ nguyên tố và tỷ lệ cơ bản. Nhưng để thiết lập theo cách này phép phân tích các đại lượng vô hạn, và khảo sát các tỷ số nguyên tố và cuối cùng của các đại lượng hữu hạn, dù sinh ra hay biến mất, đều phù hợp với hình học của người xưa; và tôi đã cố gắng chứng minh rằng, trong phương pháp thông lượng, không cần để đưa vô cực nhỏ vào hình học số lượng." Phương thức phân biệt này không loại bỏ được tất cả những khó khăn liên quan đến chủ đề. Khi 0 không có gì, thì chúng tôi nhận được tỷ lệ $\frac{0}{0} = nx^{n-1}$, trong đó cần làm sáng tỏ thêm. Thật vậy, phương pháp của Newton, do chính ông đưa ra, vướng phải những khó khăn và phản đối. Trong số những người ngưỡng mộ Newton nhất, đã có những tranh cãi dai dẳng về cách giải thích của ông về phương pháp "số nguyên tố và lý do cuối cùng."

Cái gọi là "phương pháp giới hạn" thường được gán cho Newton, nhưng phương pháp giới hạn thuần túy chưa bao giờ được ông áp dụng làm phương pháp xây dựng phép tính. Tất cả những gì anh ấy làm là thiết lập trong *Principia* của mình một số nguyên tắc mà có thể áp dụng cho phương pháp đó, nhưng phương pháp mà anh ấy sử dụng cho một mục đích khác. bổ đề đầu tiên của cuốn sách đầu tiên đã được coi là nền tảng của phương pháp giới hạn:—

"Các đại lượng và tỉ số của các đại lượng, trong bất kỳ thời gian hữu hạn nào cũng hội tụ liên tục đến đẳng thức, và trước khi kết thúc khoảng thời gian đó tiến gần đến đại lượng này hơn bất kỳ hiệu số nào cho trước, cuối cùng trở nên bằng nhau."

Trong điều này, cũng như trong các chủ đề sau này, có những điều tối nghĩa và khó khăn. Newton dường như dạy rằng một đại lượng biến đổi và giới hạn của nó cuối cùng sẽ trùng nhau và bằng nhau. Nhưng hiện nay người ta thường đồng ý rằng trong những phát biểu rõ ràng nhất đã được đưa ra về lý thuyết giới hạn, biến số không thực sự đạt đến giới hạn của nó, mặc dù biến số có thể tiếp cận nó bao nhiêu tùy ý.

Tên đầy đủ của *Principia* của Newton là *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Nó được in vào năm 1687 dưới sự chỉ đạo và chi phí của Tiến sĩ Edmund Halley. Ấn bản thứ hai được ra mắt vào năm 1713 với nhiều thay đổi và cải tiến, kèm theo lời tựa từ Mr. Cotes. Nó đã được bán hết trong vài tháng, nhưng một ấn bản lậu được xuất bản ở Amsterdam đã đáp ứng nhu cầu. [34] Ấn bản thứ ba và cũng là ấn bản cuối cùng xuất hiện ở Anh trong suốt cuộc đời của Newton được xuất bản vào năm 1726 bởi Henry Pemberton. *Principia* bao gồm ba cuốn sách, trong đó hai cuốn đầu tiên chiếm phần lớn tác phẩm, bàn về các nguyên lý toán học của triết học tự nhiên, cụ thể là các định luật và điều kiện của chuyển động và lực. Trong cuốn sách thứ ba, cấu trúc của vũ trụ được rút ra từ các nguyên tắc trên. Nguyên lý vĩ đại đằng sau công trình đáng nhớ này là nguyên lý vạn vật hấp dẫn. Cuốn sách đầu tiên được hoàn thành vào ngày 28 tháng 4 năm 1686. Sau khoảng thời gian ba tháng ngắn ngủi đáng kể, cuốn sách thứ hai đã hoàn thành. Cuốn sách thứ ba là kết quả của chín hoặc mười tháng lao động tiếp theo. Nó chỉ là một bản phác thảo của một chủ đề được xây dựng mở rộng hơn nhiều mà anh ấy đã lên kế hoạch, nhưng chưa bao giờ được hoàn thành.

Định luật hấp dẫn được phát biểu trong cuốn sách đầu tiên. Khám phá của nó bao trùm tên của Newton trong một vầng hào quang vinh quang vĩnh viễn. Phiên bản hiện tại của khám phá như sau: nó được phỏng đoán bởi Hooke, Huygens, Halley, Wren, Newton, và những người khác, rằng, nếu định luật thứ ba của Kepler là đúng (độ chính xác tuyệt đối của nó bị nghi ngờ vào thời điểm đó), thì lực hút giữa trái đất và các thành viên khác của hệ mặt trời sẽ thay đổi nghịch với bình phương khoảng cách. Nhưng bằng chứng về sự thật hay giả của phỏng đoán là cần thiết. Vào năm 1666, Newton đã lập luận, về bản chất, rằng nếu g biểu thị gia tốc trọng trường trên bề mặt trái đất, thì r là bán kính trái đất, R khoảng cách của mặt trăng với trái đất, T thời gian của cuộc cách mạng mặt trăng,

và a a độ ở xích đạo, sau đó, nếu định luật là đúng,

$$g\frac{r^2}{R^2} = 4\pi^2\frac{R}{T^2}, \text{ or } g = \frac{4\pi}{T^2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cdot 180a.$$

Dữ liệu theo lệnh của Newton cho $R = 60,4r$, $T = 2.360.628$ giây, nhưng a chỉ có 60 thay vì $69\frac{1}{2}$ dặm Anh. Giá trị sai này của a khiến giá trị được tính toán của g nhỏ hơn giá trị thực của nó, như được biết từ phép đo thực tế. Có vẻ như định luật bình phương nghịch đảo không phải là định luật đúng, và Newton đã gạt phép tính sang một bên. Vào khoảng năm 1684, tại một cuộc họp của Hiệp hội Hoàng gia, ông tình cờ xác nhận rằng Jean Picard đã đo được một cung của kinh tuyến và thu được giá trị chính xác hơn cho bán kính trái đất. Lấy giá trị đã sửa cho a, anh ấy tìm thấy một con số cho g tương ứng với giá trị đã biết. Như vậy định luật bình phương nghịch đảo đã được kiểm chứng. Trong một học viện ở *Principia*, Newton thừa nhận ông mắc nợ Huygens về các định luật về lực ly tâm được sử dụng trong phép tính của ông.

Việc nhà thiên văn học Adams xem xét một khối lượng lớn những bức thư và bản thảo chưa được xuất bản của Newton đã hình thành nên bộ sưu tập Portsmouth (vẫn là tài sản tư nhân cho đến năm 1872, khi chủ nhân của nó giao nó cho Đại học Cambridge) dường như chỉ ra rằng những khó khăn mà Newton gặp phải trong phép tính trên có bản chất khác. Theo Adams, việc xác minh bằng số của Newton đã khá hoàn chỉnh vào khoảng năm 1666, nhưng Newton đã không thể xác định được lực hút của một vỏ hình cầu lên một điểm bên ngoài sẽ là bao nhiêu. Những bức thư của anh ấy gửi cho Halley cho thấy rằng anh ấy không cho rằng trái đất bị hút như thể toàn bộ khối lượng của nó đều tập trung vào một điểm ở tâm. Do đó, ông không thể khẳng định rằng định luật hấp dẫn giả định đã được xác minh bằng các số liệu, mặc dù đối với những khoảng cách xa, ông có thể khẳng định rằng nó mang lại những kết quả gần đúng. Khi Halley đến thăm Newton vào năm 1684, ông đã yêu cầu

Newton xác định quỹ đạo của một hành tinh sẽ như thế nào nếu định luật hấp dẫn là định luật nghịch đảo bình phương. Newton đã giải một bài toán tương tự cho Hooke vào khoảng năm 1679, và trả lời ngay lập tức rằng là một hình elip. Sau chuyến thăm của Halley, Newton, với giá trị mới của Picard cho bán kính trái đất, đã xem lại phép tính ban đầu của ông, và có thể chỉ ra rằng nếu khoảng cách giữa các vật thể trong hệ mặt trời lớn đến mức có thể coi các vật thể là các điểm, khi đó chuyển động của chúng tuân theo định luật hấp dẫn giả định. Năm 1685, ông hoàn thành khám phá của mình bằng cách chỉ ra rằng một quả cầu có mật độ tại bất kỳ điểm nào chỉ phụ thuộc vào khoảng cách từ tâm sẽ hút một điểm bên ngoài như thể toàn bộ khối lượng của nó tập trung tại tâm. [34]

Các bản thảo chưa được xuất bản của Newton trong bộ sưu tập Portsmouth cho thấy rằng ông đã thực hiện, bằng phương pháp fluxions và flux, các tính toán về mặt trăng của ông ở mức độ gần đúng cao hơn mức được đưa ra trong *Principia*, nhưng ông không thể diễn giải các kết quả của mình về mặt hình học. Các bài báo trong bộ sưu tập đó làm sáng tỏ phương thức mà Newton đã đạt được một số kết quả trong *Principia*, chẳng hạn như cấu trúc nổi tiếng trong Book II., Prop. 25, chưa được chứng minh trong *Principia*, nhưng đã được ông thể hiện hai lần trong bản nháp của bức thư gửi cho David Gregory, ở Oxford. [34]

Danh tiếng của Newton chủ yếu dựa vào *Principia*. Brewster gọi đó là "trang sáng chói nhất trong hồ sơ lý trí của con người." Chúng ta hãy lắng nghe một lúc những nhận xét của Laplace, người đi đầu trong số những môn đồ của Newton, người đã vật lộn với những vấn đề tế nhị về chuyển động của các hành tinh dưới ảnh hưởng của lực hấp dẫn: "Newton đã xác lập rõ ràng sự tồn tại của nguyên tắc mà ông có công khám phá ra, nhưng việc phát triển các hệ quả và ưu điểm của nó là công việc của những người kế tục nhà toán học vĩ đại này. Sự không hoàn hảo của phép tính vô hạn, khi lần đầu tiên được phát hiện, đã không cho phép ông giải quyết hoàn toàn những vấn

đề khó khăn mà lý thuyết vũ trụ đưa ra; và đôi khi ông buộc phải đưa ra những gợi ý đơn thuần, mà luôn không chắc chắn cho đến khi được phân tích nghiêm ngặt xác nhận. Bất chấp những khiếm khuyết không thể tránh khỏi này, tầm quan trọng và tính tổng quát của những khám phá của ông liên quan đến hệ thống của vũ trụ, và những điểm thú vị nhất của triết học tự nhiên, rất nhiều quan điểm sâu sắc và độc đáo, vốn là nguồn gốc của những khám phá rực rỡ nhất về các nhà toán học của thế kỷ trước, tất cả đều được trình bày rất sang trọng, sẽ đảm bảo cho *Principia* một ưu thế lâu dài so với tất cả các sản phẩm khác của trí óc con người."

Arithmetica Universalis của Newton, bao gồm các bài giảng đại số do ông giảng dạy trong chín năm đầu tiên khi ông làm giáo sư tại Cambridge, được xuất bản vào khoảng năm 1707, tức hơn ba mươi năm sau khi chúng được viết. Tác phẩm này được xuất bản bởi Mr. Whiston. Chúng tôi không được thông báo chính xác bằng cách nào Mr. Whiston sở hữu nó, nhưng theo một số nhà chức trách, việc xuất bản nó là một sự vi phạm lòng tin từ phía ông ấy.

Arithmetica Universalis chứa các kết quả mới và quan trọng về lý thuyết phương trình. Định lý của ông về tổng lũy thừa các căn đã được nhiều người biết đến. Newton đã chỉ ra rằng trong các phương trình có hệ số thực, các nghiệm ảo luôn xuất hiện theo cặp. Thiên tài sáng tạo của ông được thể hiện một cách ngoạn mục trong quy tắc xác định giới hạn dưới của số nghiệm số ảo và giới hạn trên của số nghiệm dương và nghiệm âm. Mặc dù ít nhanh hơn Descartes', nhưng quy tắc Newton luôn cho càng gần, và nói chung càng gần, giới hạn số lượng nghiệm dương và âm. Newton đã không chứng minh quy tắc của mình. Nó đã chờ đợi chứng minh trong một thế kỷ rưỡi, cho đến khi, cuối cùng, Sylvester thiết lập một định lý tổng quát đáng chú ý bao gồm quy tắc Newton như một trường hợp đặc biệt.

Chuyên luận về *Phương pháp thông lượng* chứa phương pháp của

Newton để tính gần đúng nghiệm của phương trình số. Đây đơn giản là phương pháp của Vieta cải tiến. Chuyên luận tương tự chứa "Hình bình hành của Newton," giúp ông, trong một phương trình, $f(x, y) = 0$, để tìm một chuỗi trong lũy thừa của x bằng với biến y. Tiện ích tuyệt vời của quy tắc này nằm ở chỗ nó xác định *form* của chuỗi; khác nhau, khi đó phép khai triển có thể được thực hiện bằng phương pháp hệ số bất định. Quy tắc này vẫn được sử dụng để xác định các nhánh vô hạn của các đường cong, hoặc hình của chúng tại nhiều điểm. Newton không đưa ra bằng chứng nào cho nó, cũng như không có bất kỳ manh mối nào về cách thức ông đã phát hiện ra nó. Nửa thế kỷ sau, bằng chứng được Kaestner và Cramer cung cấp một cách độc lập. [37]

Năm 1704 đã được xuất bản, như một phụ lục của *Opticks*, *Enumeratio linearum tertii ordinis*, chứa các định lý về lý thuyết đường cong. Newton chia các thể lập phương thành bảy mươi hai loài, được sắp xếp thành các nhóm lớn hơn, mà các nhà bình luận của ông đã đặt tên cho chúng là "chi" và "lớp", công nhận mười bốn trong số các loài trước và bảy (hoặc bốn) trong số các loài sau. Ông đã bỏ qua sáu loài được yêu cầu bởi các nguyên tắc phân loại của mình, và sau đó được thêm vào bởi Stirling, Murdoch và Cramer. Anh ấy phát biểu định lý đáng chú ý rằng năm loài mà anh ấy đặt tên là "parabolas phân kỳ" đưa ra bởi hình chiếu của chúng trên mọi đường cong bậc ba. Như một quy luật, đường không chứa bằng chứng. Đó là chủ đề của phỏng đoán thường xuyên về cách Newton suy ra kết quả của mình. Gần đây chúng ta đã nắm được các sự kiện, vì nhiều phân tích được Newton sử dụng và một vài định lý bổ sung đã được phát hiện trong các bài báo của Portsmouth. Một tài khoản của bốn bản thảo ba chiều về chủ đề này đã được xuất bản bởi W. W. Rouse Ball, trong *Giao dịch của Hiệp hội Toán học Luân Đôn* (tập xx., trang. 104–143). Thật thú vị khi quan sát cách Newton bắt đầu nghiên cứu của mình về việc phân loại các đường cong bậc ba bằng phương pháp đại số, nhưng nhận thấy nó tốn nhiều công

sức, ông tấn công vấn đề về mặt hình học và sau đó quay lại phân tích. [36]

Không gian không cho phép chúng tôi làm nhiều hơn là chỉ đề cập đến các nghiên cứu kéo dài của Newton trong các ngành khoa học khác. Ông đã tiến hành một loạt thí nghiệm dài về quang học và là tác giả của lý thuyết hạt về ánh sáng. Bài báo cuối cùng của về quang học, mà ông đã đóng góp cho Hiệp hội Hoàng gia, năm 1687, xây dựng lý thuyết về “sự phù hợp’. Ông giải thích sự phân hủy ánh sáng và lý thuyết về cầu vồng . Ông đã phát minh ra kính viễn vọng phản xạ và kính lục phân (sau đó được phát hiện lại bởi Thomas Godfrey ở Philadelphia [2] và bởi John Hadley). Ông đã suy ra một biểu thức lý thuyết cho vận tốc âm thanh trong không khí, tham gia vào các thí nghiệm về hóa học, tính đàn hồi, từ tính và định luật làm mát, đồng thời đưa ra những suy đoán về địa chất.

Trong hai năm sau khi kết thúc 1692, Newton mắc chứng mất ngủ và thần kinh cáu kỉnh. Một số người nghĩ rằng anh ấy đã lao động trong tình trạng rối loạn tâm thần tạm thời. Mặc dù anh ấy đã lấy lại được sự bình tĩnh và sức mạnh của tâm trí, nhưng thời gian của những khám phá vĩ đại đã qua; anh ấy sẽ nghiên cứu những câu hỏi được đặt ra cho anh ấy, nhưng anh ấy không còn tự ý tham gia vào các lĩnh vực nghiên cứu mới nữa. Cuộc điều tra được chú ý nhất sau khi ông bị bệnh là việc kiểm tra lý thuyết mặt trăng của ông bằng các quan sát của Flamsteed, nhà thiên văn học hoàng gia. Vào 1695 , ông được bổ nhiệm làm quản giáo, và vào 1699, ông chủ của xưởng đúc tiền, chức vụ mà ông giữ cho đến khi qua đời. Thi thể của ông được an táng tại Tu viện Westminster, nơi mà vào năm 1731, một tượng đài tráng lệ đã được dựng lên, có khắc dòng chữ kết thúc bằng, “Sibi gratulentur fatales Tale tantumque exstitisse humani generis decus.” Định lý nhị thức cũng được khắc trên đó là không đúng. nó.

Chúng ta chuyển sang Leibniz, người phát minh thứ hai và độc

lập của phép tính. **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646–1716) sinh ra ở Leipzig. Không có thời kỳ nào trong lịch sử của bất kỳ quốc gia văn minh nào lại kém thuận lợi cho việc theo đuổi văn học và khoa học hơn giữa thế kỷ XVII thế kỷ ở Đức. Tuy nhiên, hoàn cảnh dường như đã kết hợp một cách vui vẻ để ban cho thiên tài trẻ tuổi một nền giáo dục khó có thể đạt được trong thời kỳ đen tối nhất này của lịch sử nước Đức. Anh ấy đã sớm được tiếp xúc với nền văn hóa tốt nhất hiện có lúc bấy giờ. Ở tuổi mười lăm, anh ấy vào Đại học Leipzig. Mặc dù luật là nghiên cứu chính của anh ấy, nhưng anh ấy đã rất siêng năng áp dụng bản thân vào mọi lĩnh vực kiến thức. Việc giảng dạy tại các trường đại học Đức lúc đó rất thấp. Toán học cao hơn hoàn toàn không được dạy. Chúng tôi được biết rằng một John nào đó Kuhn đã giảng về *Elements* của Euclid, nhưng các bài giảng của ông quá tối nghĩa đến nỗi không ai ngoại trừ Leibniz có thể hiểu chúng. Sau đó, Leibniz đã tham dự, trong nửa năm, tại Jena, các bài giảng của Erhard Weigel, một triết gia và nhà toán học nổi tiếng ở địa phương. Năm 1666, Leibniz xuất bản một chuyên luận, *De Arte Combinatoria*, trong đó ông không vượt qua những điều cơ bản của toán học. Các luận điểm khác do ông viết vào thời điểm này mang tính chất siêu hình và pháp lý. Một hoàn cảnh may mắn đã đưa Leibniz ra nước ngoài. Vào khoảng năm 1672, ông được Nam tước Boineburg cử đi công tác chính trị ở Paris. Ở đó, anh ấy đã làm quen với những người đàn ông nổi tiếng nhất thời đại. Trong số này có Huygens, , người đã trình bày một bản sao công trình của mình về dao động của con lắc cho Leibniz, và lần đầu tiên dẫn dắt chàng trai trẻ tài năng người Đức đến với nghiên cứu toán học cao hơn. Năm 1673, Leibniz đến London và ở đó từ tháng Giêng đến tháng Ba. Ở đó, anh ấy tình cờ làm quen với nhà toán học Pell, người mà anh ấy đã giải thích cho họ một phương pháp mà anh ấy đã tìm ra khi tính tổng các chuỗi số bằng sự khác biệt của chúng. Pell nói với anh ấy rằng một công thức tương tự đã được xuất bản bởi Mouton sớm nhất là vào khoảng năm 1670, và sau đó ông chú ý đến công

trình của Mercator về việc chỉnh hình parabol. Khi ở Luân Đôn, Leibniz đã trưng bày cho Hội Hoàng gia cỗ máy số học của mình, tương tự như của Pascal, nhưng hiệu quả hơn và hoàn hảo hơn. Sau khi trở lại Paris, anh ấy có thời gian rảnh để nghiên cứu toán học một cách có hệ thống hơn. Với nghị lực bất khuất, anh bắt đầu loại bỏ sự thiếu hiểu biết của mình về toán học cao hơn. Huygens là bậc thầy chính của ông. Ông nghiên cứu các công trình hình học của Descartes, Honorarius Fabri, Gregory St. Vincent, và Pascal. Một nghiên cứu cẩn thận về chuỗi vô hạn đã đưa ông đến khám phá về biểu thức sau đây cho tỷ lệ giữa chu vi và đường kính của hình tròn, trước đó đã được James Gregory phát hiện:—

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

Chuỗi trang nhã này được tìm thấy giống như chuỗi của Mercator trên hyperbola. Huygens rất hài lòng với điều đó và thúc giục ông tiến hành những cuộc điều tra mới. Leibniz tham gia nghiên cứu chi tiết về phép cầu phương của các đường cong và do đó trở nên quen thuộc với với toán học cao hơn. Trong số các giấy tờ của Leibniz, người ta vẫn tìm thấy một bản thảo về phương trình bậc hai, được viết trước khi ông rời Paris vào năm 1676, nhưng bản thảo này chưa bao giờ được ông in ra. Những phần quan trọng hơn của nó đã được thể hiện trong các bài báo xuất bản sau này trong *Acta Eruditorum*.

Trong nghiên cứu về hình học Descartes, Leibniz đã sớm chú ý đến các bài toán trực tiếp và nghịch đảo của tiếp tuyến. Bài toán trực tiếp đã được Descartes giải chỉ cho những đường cong đơn giản nhất; trong khi điều ngược lại đã hoàn toàn vượt qua khả năng phân tích của anh ta. Leibniz đã nghiên cứu cả hai vấn đề đối với bất kỳ đường cong nào; ông đã xây dựng cái mà ông gọi là *triangulumđặc trưng*—một tam giác vô cùng nhỏ nằm giữa phần vô cùng nhỏ của đường cong trùng với tiếp tuyến và sự khác biệt của các tọa độ và trục hoành. Một đường cong ở đây được coi là một đa giác. *triagulumđặc trưng* tương tự như tam giác được tạo bởi tiếp tuyến, hoành độ của

tiếp điểm và tiếp tuyến con, cũng như giữa tung độ, pháp tuyến và cận chuẩn phụ. Nó được Barrow sử dụng lần đầu tiên ở Anh, nhưng dường như đã được re-invented bởi Leibniz. Từ đó, Leibniz đã quan sát thấy mối liên hệ tồn tại giữa các bài toán trực tiếp và nghịch đảo của tiếp tuyến. Ông cũng thấy rằng vấn đề sau có thể được đưa trở lại phương trình cầu phương của các đường cong. Tất cả những kết quả này được chứa trong một bản thảo của Leibniz, được viết vào năm 1673. Một chế độ được ông sử dụng để tạo hiệu ứng cầu phương như sau: Hình chữ nhật được tạo bởi một tiếp tuyến phụ p và một phần tử a (tức là phần nhỏ vô hạn của trục hoành) là bằng với hình chữ nhật được tạo bởi tọa độ y và phần tử l của tọa độ đó, hoặc trong các ký hiệu, $pa = yl$. Nhưng tổng các hình chữ nhật này từ 0 trở đi sẽ cho một tam giác vuông bằng nửa bình phương của trục tung. Do đó, sử dụng ký hiệu của Cavalieri, anh ta nhận được

$$\text{omn.}\, pa = \text{omn.}\, yl = \frac{y^2}{2} \quad (\textit{omn.} \text{ có nghĩa là } \textit{omnia}, \text{ tất cả}).$$

Nhưng $y = \text{omn.}\, l$; vì thế

$$\overline{\text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\, l}\,\frac{l}{a}} = \frac{\overline{\text{omn.}\, l^2}}{2a}.$$

Phương trình này đặc biệt thú vị, vì đây là lần đầu tiên Leibniz giới thiệu một ký hiệu mới. Anh ấy nói: "Sẽ hữu ích nếu viết $\int$ cho *omn.*, dưới dạng $\int l$ cho *omn.* l, tức là tổng của l's"; sau đó anh ấy viết phương trình như sau:—

$$\frac{\int \overline{l^2}}{2a} = \int \overline{\int \bar{l}\,\frac{l}{a}}.$$

Từ đó, ông đã suy ra các tích phân đơn giản nhất, chẳng hạn như

$$\int x = \frac{x^2}{2}, \quad \int (x+y) = \int x + \int y.$$

Vì ký hiệu của tổng $\int$ làm tăng kích thước, nên ông kết luận rằng phép tính ngược lại, hoặc phép tính hiệu d, sẽ hạ thấp chúng . Do

đó, nếu $\int l = ya$, thì $l = \frac{ya}{d}$. Ký hiệu d lúc đầu được Leibniz đặt ở mẫu số, bởi vì việc hạ thấp lũy thừa của một số hạng được thực hiện trong phép tính thông thường bằng phép chia. Bản thảo đưa ra những điều trên được đề ngày 29 tháng 10 năm 1675. [39] Sau đó, đây là ngày đáng nhớ mà ký hiệu của phép tính mới ra đời,—a ký hiệu đã góp phần to lớn vào sự tăng trưởng nhanh chóng và sự phát triển hoàn hảo của giải tích.

Leibniz tiến hành áp dụng phép tính mới của mình để giải một số bài toán sau đó được nhóm lại với nhau dưới cái tên Bài toán nghịch đảo của tiếp tuyến. Ông nhận thấy bài toán parabol lập phương là giải pháp cho vấn đề sau: Để tìm đường cong trong đó đường chuẩn phụ tỷ lệ nghịch với tung độ. Tính đúng đắn của giải pháp của anh ấy đã được anh ấy kiểm tra bằng cách áp dụng cho kết quả phương pháp tiếp tuyến của Sluze và lập luận ngược lại với giả thiết ban đầu. Trong giải pháp của vấn đề thứ ba, anh ấy thay đổi ký hiệu của mình từ $\frac{x}{d}$ thành ký hiệu thông thường hiện nay dx. Điều đáng lưu ý là trong các cuộc điều tra này, Leibniz không giải thích được tầm quan trọng của dx và dy, ngoại trừ ở một chỗ trong ghi chú bên lề: “Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est, differia inter duas x proximas.” Anh ấy cũng không sử dụng thuật ngữ *differential* mà luôn dùng *difference*. Mãi đến mười năm sau, trong *Acta Eruditorum*, ông mới giải thích thêm về những biểu tượng này. Mục đích chính của ông là xác định sự thay đổi mà một biểu thức trải qua khi ký hiệu $\int$ or d được đặt trước nó. Các sinh viên đang vật lộn với các yếu tố của phép tính vi phân có thể là một niềm an ủi khi biết rằng nó đòi hỏi Leibniz phải suy nghĩ và chú ý nhiều [39] để xác định xem $dx\,dy$ có giống với $d(xy)$ và $\frac{dx}{dy}$ giống với $d\frac{x}{y}$. Sau khi xem xét những câu hỏi này khi kết thúc một trong những bản thảo của mình, ông kết luận rằng các cách diễn đạt không giống nhau, mặc dù ông không thể đưa ra giá trị thực sự cho mỗi cách diễn đạt. Mười ngày sau, trong một bản thảo đề ngày 21 tháng 11 21 tháng 11 năm 1675, ông đã tìm ra phương

trình $y d\overline{x} = d\overline{xy} - x d\overline{y}$, cho một biểu thức cho $d(xy)$, mà ông quan sát thấy là đúng với mọi đường cong. Ông cũng thành công trong việc loại bỏ dx khỏi một phương trình vi phân, sao cho nó chỉ chứa dy, và do đó dẫn đến lời giải của bài toán đang xét. “Kìa, một cách tao nhã nhất mà nhờ đó các bài toán về phương pháp nghịch đảo của tiếp tuyến được giải quyết, hoặc ít nhất được rút gọn thành phương trình bậc hai!” Do đó ông thấy rõ ràng rằng các bài toán nghịch đảo của tiếp tuyến có thể được giải bằng phương pháp bình phương, hay nói cách khác, bằng phép tính tích phân. Trong nửa năm , anh ấy đã phát hiện ra rằng bài toán trực tiếp về tiếp tuyến cũng mang lại sức mạnh cho phép tính mới của anh ấy, và do đó, một giải pháp tổng quát hơn giải pháp của Descartes có thể. Ông đã thành công trong việc giải quyết tất cả các vấn đề đặc biệt thuộc loại này mà Descartes vẫn chưa giải quyết được. Trong số này, chúng tôi chỉ đề cập đến bài toán nổi tiếng do De Beaune đề xuất cho Descartes, nghĩa là tìm đường cong có hoành độ đối với tiếp tuyến phụ của nó là một đường thẳng đã cho thì với phần hoành độ nằm giữa đường cong và một đường thẳng được vẽ từ đỉnh của đường cong ở một độ nghiêng nhất định so với trục.

Tóm lại, đó là tiến trình phát triển của phép tính mới do Leibniz thực hiện trong thời gian ông ở Paris. Trước khi ra đi, vào tháng 10 năm 1676, ông thấy mình nắm vững các quy tắc và công thức cơ bản nhất của phép tính vô hạn.

Từ Paris, Leibniz trở về Hanover bằng đường London và Amsterdam. Tại Luân Đôn, ông gặp Collins, người đã cho ông xem một phần thư từ khoa học của ông. Về điều này chúng ta sẽ nói sau. Ở Amsterdam, anh thảo luận toán học với Sluze, và hài lòng rằng phương pháp dựng tiếp tuyến của riêng anh không chỉ hoàn thành tất cả những gì Sluze đã làm, mà còn hơn thế nữa, vì nó có thể được mở rộng cho ba biến, bởi những mặt phẳng tiếp tuyến nào có thể được tìm thấy; và đặc biệt, vì không có số vô tỷ hay phân số nào ngăn cản việc áp dụng ngay phương pháp của ông.

Trong một bài báo từ ngày 11 tháng 7 đến ngày 11 tháng 7 năm 1677, Leibniz đã đưa ra các quy tắc đúng để phân biệt tổng, tích, thương, lũy thừa và nghiệm. Ông đã đưa ra sự khác biệt của một vài lũy thừa âm và phân số, ngay từ tháng 11 năm 1676, nhưng đã phạm phải một số sai lầm. Đối với $d\sqrt{x}$, anh ấy đã đưa ra giá trị sai $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ và ở một vị trí khác là giá trị $-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$; cho $d\dfrac{1}{x^3}$ xảy ra ở một vị trí có giá trị sai, $-\dfrac{2}{x^2}$, trong khi một vài dòng thấp hơn được cho $-\dfrac{3}{x^4}$, giá trị chính xác của nó.

Năm 1682, *Acta Eruditorum* được thành lập tại Berlin, một tạp chí thường được biết đến với tên *Leipzig Acts*. Nó bắt chước một phần tờ *Journal des Savans* của Pháp (thành lập năm 1665), và bài phê bình văn học và khoa học xuất bản ở Đức. Leibniz là người đóng góp thường xuyên. Tschirnhaus, người đã học toán ở Paris với Leibniz, và là người quen thuộc với phân tích mới của Leibniz, đã xuất bản trên *Acta Eruditorum* một bài báo về phép tính bậc hai, chủ yếu bao gồm chủ đề được Leibniz liên lạc với Tschirnhaus trong một cuộc tranh luận mà họ đã có về chủ đề này. Lo sợ rằng Tschirnhaus có thể tuyên bố là của mình và công bố ký hiệu và quy tắc của phép tính vi phân, cuối cùng Leibniz đã quyết định công bố thành quả những phát minh của mình cho công chúng. Vào khoảng năm 1684, tức chín năm sau khi phép tính mới lần đầu tiên xuất hiện trong tâm trí của Leibniz, và mười chín năm sau khi Newton lần đầu tiên nghiên cứu về thông lượng, và ba năm trước khi xuất bản của *Principia* của Newton, Leibniz đã xuất bản, trong *Leipzig Acts*, bài báo đầu tiên của ông về phép tính vi phân. Anh ấy không muốn trao cho thế giới tất cả kho báu của mình, mà chọn những phần công việc khó hiểu nhất và ít dễ hiểu nhất trong tác phẩm của mình. Bài viết mở ra kỷ nguyên vỏn vẹn sáu trang này mang tiêu đề: “ Phương pháp mới của phương pháp tối đa và tối thiểu, itemque tangentibus, quænec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genes.’ ’ Các quy tắc tính toán được nêu

ngắn gọn mà không có bằng chứng và ý nghĩa của dx and dy không được làm rõ. Từ đó suy ra rằng bản thân Leibniz không có ý tưởng rõ ràng và ổn định về chủ đề này. dy and dx là số lượng hữu hạn hay vô hạn? Lúc đầu, chúng thực sự có vẻ được coi là hữu hạn, khi ông nói: "Bây giờ chúng ta gọi bất kỳ dòng nào được chọn ngẫu nhiên là dx, sau đó chúng ta chỉ định dòng tới dx là y là tiếp tuyến phụ, by dy, là hiệu của y." Leibniz sau đó xác định chắc chắn, bằng phép tính của mình, theo cách nào một tia sáng truyền qua hai môi trường khúc xạ khác nhau, có thể truyền đi dễ dàng nhất từ điểm này sang điểm khác; và sau đó kết thúc bài viết của mình bằng cách đưa ra giải pháp của mình, trong một vài từ, về vấn đề của De Beaune. Hai năm sau (1686) Leibniz công bố trên *Acta Eruditorum* một bài báo chứa đựng những kiến thức cơ bản về phép tính tích phân. Số lượng dx and dy ở đó được coi là vô cùng nhỏ. Ông đã chỉ ra rằng bằng cách sử dụng ký hiệu của mình, các tính chất của đường cong có thể được biểu diễn đầy đủ bằng các phương trình. Như vậy phương trình

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

đặc trưng cho cycloid. [38]

Phát minh vĩ đại của Leibniz, hiện đã được công bố bởi các bài báo của ông trong *Công vụ Leipzig*, đã gây ấn tượng rất ít đối với số đông các nhà toán học. Ở Đức, không ai hiểu phép tính mới ngoại trừ Tschirnhaus, người vẫn thờ ơ với nó. Các tuyên bố của tác giả quá ngắn và cô đọng để làm cho phép tính được hiểu một cách tổng quát. Người đầu tiên nhận ra tầm quan trọng của nó và bắt đầu nghiên cứu về nó là hai người nước ngoài,—người Scotchman *John Craig*, và người Thụy Sĩ *James Bernoulli*. Người sau này đã viết cho Leibniz một bức thư vào năm 1687, với mong muốn được bắt đầu khám phá những bí ẩn của phân tích mới. Leibniz khi đó đang đi công tác nước ngoài nên bức thư này vẫn chưa được trả lời cho đến khi 1690. Trong khi đó, James Bernoulli đã thành công nhờ ứng

dụng chặt chẽ trong việc khám phá ra những bí mật của phép tính vi phân mà không cần sự trợ giúp. Anh ấy và anh trai John của mình đã chứng tỏ là những nhà toán học có sức mạnh phi thường. Họ đã thành công trong việc áp dụng khoa học mới và ở một mức độ khiến Leibniz tuyên bố rằng nó cũng giống như của họ. Leibniz đã trao đổi thư từ rộng rãi với họ, cũng như với các nhà toán học khác. Trong một bức thư gửi cho John Bernoulli, ông đề xuất, trong số những thứ khác, rằng phép tính tích phân được cải thiện bằng cách rút gọn các tích phân trở lại một số dạng cơ bản bất khả quy. Sự tích hợp của các biểu thức logarit sau đó đã được nghiên cứu. Các bài viết của Leibniz chứa đựng nhiều đổi mới và dự đoán về các phương pháp nổi bật kể từ đó. Do đó, ông đã sử dụng các tham số biến đổi, đặt nền tảng cho *phân tích tại chỗ*, đưa ra khái niệm đầu tiên về định thức trong nỗ lực của mình để đơn giản hóa biểu thức phát sinh trong quá trình loại bỏ các đại lượng chưa biết khỏi một tập hợp các Các phương trình tuyến tính. Ông đã dùng đến thiết bị chia nhỏ một số phân số thành tổng của các phân số khác nhằm mục đích tích hợp dễ dàng hơn; ông thừa nhận một cách rõ ràng nguyên tắc liên tục; ông đã đưa ra ví dụ đầu tiên về của một "nghiệm duy nhất" và đặt nền tảng cho lý thuyết về đường bao trong hai bài báo, một trong số đó lần đầu tiên chứa các thuật ngữ *tọa độ* và *trục tọa độ*. Anh ấy đã viết về các đường cong dao động, nhưng bài báo của anh ấy có lỗi (đã chỉ ra của John Bernoulli, nhưng không được ông thừa nhận) rằng một đường tròn dao động nhất thiết phải cắt một đường cong tại bốn điểm liên tiếp. Định lý nổi tiếng của ông về hệ số vi phân thứ n của tích hai hàm . Trong số nhiều bài báo của ông về cơ học, một số bài có giá trị, t rong khi những bài khác chứa những lỗi nghiêm trọng.

Trước khi theo dõi sự phát triển xa hơn của giải tích, chúng ta sẽ phác họa lịch sử của cuộc tranh cãi gay gắt và lâu dài đó giữa các nhà toán học Anh và Lục địa về việc phát minh ra giải tích. Câu hỏi đặt ra là Leibniz đã phát minh ra nó một cách độc lập với Newton

hay ông là một kẻ ăn cắp ý tưởng?

Chúng ta phải bắt đầu bằng việc trao đổi thư từ sớm giữa các bên xuất hiện trong tranh chấp này. Newton đã bắt đầu sử dụng ký hiệu của mình về thông lượng từ năm 1666. [41] Vào 1669 Barrow đã gửi cho Collins sơ đồ của Newton, *De Analysi per Equationes*, v.v. .

Chuyến thăm đầu tiên của Leibniz đến London kéo dài từ ngày 11 tháng 1 cho đến tháng 3, 1673. Anh ấy có thói quen cam kết viết những thông tin khoa học quan trọng nhận được từ những người khác. Vào khoảng năm 1890, Gerhardt đã phát hiện ra trong thư viện hoàng gia tại Hanover một tờ bản thảo với các ghi chú của Leibniz trong chuyến hành trình này. [40] Chúng có tiêu đề “Observata Philosophica in itinere Anglicano sub initium anni 1673. ” Trang tính được chia thành các phần bằng các đường ngang. Các phần dành cho Chymica, Mechanica, Magnetica, Botanica, Anatomica, Medica, Miscellanea, chứa các bản ghi nhớ phong phú, trong khi những phần dành cho toán học có rất ít ghi chú. Dưới Geometrica, ông chỉ nói điều này: “Tangentes omnium figurarum. Figurarum geometryarum explicatio per motum puncti in moto lati.” Từ đó, chúng tôi nghi ngờ rằng Leibniz đã đọc các bài giảng của Barrow. Newton chỉ được gọi dưới tên Optica. Rõ ràng là Leibniz đã không thu được kiến thức về dòng chảy trong chuyến thăm London này, và cũng không phải đối thủ của ông khẳng định rằng ông đã làm như vậy.

Nhiều lá thư của Newton, Collins và những người khác, cho đến đầu 1676, nói rằng Newton đã phát minh ra một phương pháp mà theo đó các tiếp tuyến có thể được vẽ mà không cần phải giải phóng các phương trình của chúng khỏi các số hạng vô tỷ. Leibniz đã tuyên bố vào năm 1674 với Oldenburg, khi đó là thư ký của Hiệp hội Hoàng gia, rằng ông sở hữu các phương pháp phân tích rất tổng quát, nhờ đó ông đã tìm ra các định lý có tầm quan trọng lớn về phương trình bậc hai của đường tròn bằng phương pháp chuỗi. Để

trả lời, Oldenburg tuyên bố rằng Newton và James Gregory cũng đã phát hiện ra các phương pháp cầu phương, mở rộng cho hình tròn. Leibniz mong muốn được truyền đạt những phương pháp này cho anh ta; và Newton, theo yêu cầu của Oldenburg và Collins, đã viết cho Oldenburg và Collins những bức thư nổi tiếng vào ngày 13 tháng 6 và ngày 24 tháng 10 năm 1676. Bức thư đầu tiên chứa Định lý nhị thức và nhiều vấn đề khác liên quan đến chuỗi vô hạn và cầu phương; nhưng không có gì trực tiếp trên phương pháp thông lượng. Leibniz trả lời bằng những lời lẽ cao nhất về những gì Newton đã làm và yêu cầu giải thích thêm. Newton trong bức thư thứ hai vừa được đề cập đã giải thích cách thức mà ông tìm ra Định lý nhị thức, đồng thời truyền đạt phương pháp về thông lượng và thông thạo của mình dưới dạng một phép đảo chữ trong đó tất cả các chữ cái trong câu được truyền đạt được sắp xếp theo thứ tự bảng chữ cái. Do đó Newton nói rằng phương pháp vẽ tiếp tuyến của ông là

$$6accd\ae\ 13eff\ \ 7i\ \ 3l\ \ 9n\ \ 4o\ \ 4qrr\ \ 4s\ \ 9t\ \ 12vx.$$

Câu đó là, "Dữ liệu æquatione quotcunque fluxes định lượng liên quan đến fluxiones invenire, và ngược lại." ("Có bất kỳ phương trình đã cho nào bao gồm không bao giờ có nhiều lượng chảy như vậy, để tìm các thông lượng, và ngược lại.") Chắc chắn phép đảo chữ này không mang lại gợi ý nào. Leibniz đã viết thư trả lời cho Collins, trong đó, không muốn che giấu, ông đã giải thích nguyên tắc, ký hiệu và cách sử dụng phép tính vi phân.

Cái chết của Oldenburg đã khiến thư từ này kết thúc. Không có gì quan trọng xảy ra cho đến 1684, khi Leibniz công bố bài báo đầu tiên của mình về phép tính vi phân trong *Leipzig Acts*, do đó mặc dù tuyên bố của Newton về quyền ưu tiên phát minh phải được tất cả mọi người thừa nhận, nhưng cũng phải công nhận rằng Leibniz là người đầu tiên mang lại toàn bộ lợi ích của giải tích cho thế giới. Do đó, trong khi phát minh của Newton vẫn còn là một bí mật, chỉ được truyền đạt cho một số bạn bè, thì phép tính của Leibniz đã

lan rộng khắp Lục địa. Cho đến nay, không có sự cạnh tranh hay thù địch nào tồn tại giữa các nhà khoa học lừng lẫy. Newton bày tỏ quan điểm rất tán thành về các phát minh của Leibniz, được biết đến với ông qua thư từ trên đây với Oldenburg, trong scholium nổi tiếng sau đây (*Principia*, ấn bản đầu tiên, 1687 , Book II., Prop. 7, scholium):—

"Trong những lá thư giữa tôi và nhà hình học xuất sắc nhất đó, G. G. Leibniz, mười năm trước, khi tôi biểu thị rằng tôi đã biết về phương pháp xác định cực đại và cực tiểu, cách vẽ các tiếp tuyến, v.v., và khi tôi giấu nó trong các chữ cái được chuyển đổi liên quan đến câu này (Dữ liệu æquatione, v.v. ., đã trích dẫn *ở* trên), người đàn ông lỗi lạc nhất đó đã viết lại rằng ông ấy cũng đã tìm được một phương pháp cùng loại, và đã truyền đạt phương pháp của ông ấy, phương pháp này hầu như không khác với phương pháp của tôi, ngoại trừ hình thức từ ngữ và ký hiệu của ông ấy."

Liên quan đến đoạn văn này, chúng ta sẽ thấy rằng Newton sau đó đã đủ yếu, như De Morgan nói: "Thứ nhất, để phủ nhận ý nghĩa đơn giản và hiển nhiên của , và thứ hai, để loại bỏ nó hoàn toàn khỏi ấn bản thứ ba của *Principia*." Ở lục địa, Leibniz và các cộng sự của ông, anh em James và John Bernoulli, và , và Hầu tước de l'Hospital. Vào khoảng năm 1695, Wallis đã thông báo cho Newton qua bức thư rằng "ông đã nghe nói rằng các khái niệm về dòng chảy của ông đã được truyền bá rộng rãi ở Hà Lan vỗ tay bằng cái tên 'Leibniz's Calculus Differentialis.' " Theo đó, Wallis đã tuyên bố trong lời nói đầu cho một tập các tác phẩm của mình rằng phép tính vi phân là phương pháp của Newton về các phép thông lượng đã được truyền đạt cho Leibniz trong các bức thư Oldenburg. Một đánh giá về các tác phẩm của Wallis, trong *Leipzig Acts* cho 1696, nhắc người đọc về việc chính Newton được nhận vào học viện được trích dẫn *ở* trên.

Trong mười lăm năm, Leibniz đã tận hưởng niềm vinh dự không

gì sánh được là người phát minh ra phép tính của mình. Nhưng vào năm 1699, Fato de Duillier, một người Thụy Sĩ, định cư ở Anh, đã tuyên bố trong một bài báo toán học , trình bày trước Hội Hoàng gia, niềm tin của ông rằng Newton là nhà phát minh đầu tiên; nói thêm rằng, liệu Leibniz, nhà phát minh thứ hai, có mượn bất cứ thứ gì của người kia hay không, ông sẽ để những người đã xem các bức thư và bản thảo của Newton phán xét. Đây là dấu hiệu rõ ràng đầu tiên của đạo văn. Có vẻ như các nhà toán học Anh đã có một thời gian ấp ủ những nghi ngờ bất lợi cho Leibniz. Chắc chắn một cảm giác đã chiếm ưu thế từ lâu rằng Leibniz, trong chuyến thăm thứ hai tới London vào năm 1676, đã hoặc có thể đã nhìn thấy trong số các bài báo của Collins, *Analysis per æquationes* của Newton, v.v., mà chứa các ứng dụng của phương pháp lưu lượng, nhưng không có sự phát triển hoặc giải thích có hệ thống về nó. Leibniz chắc chắn đã xem ít nhất một phần của đoạn này. Trong suốt tuần ở London, anh ấy ghi lại bất cứ điều gì khiến anh ấy quan tâm trong số các bức thư và giấy tờ của Collins. Bản ghi nhớ của ông được Gerhardt phát hiện vào năm 1849 trong thư viện Hanover có hai trang. [40] Trang liên quan đến câu hỏi của chúng tôi có tiêu đề "Excerpta extractatu Newtoni Msc. de Analysi per æquationes numero terminorum infinitas." Các ghi chú rất ngắn gọn, ngoại trừ *De Resolutione æquationumaffarum*, trong đó có một bản sao gần như hoàn chỉnh. Phần này rõ ràng là mới đối với anh ta. Nếu anh ấy xem xét toàn bộ bài viết của Newton, thì những phần khác không gây ấn tượng đặc biệt với anh ấy. Từ nó, anh ta dường như không thu được gì liên quan đến phép tính vô hạn. Bằng cách giới thiệu thuật toán của riêng mình trước đây, anh ấy đã đạt được tiến bộ lớn hơn so với những gì anh ấy biết ở London. Không có gì toán học mà anh ấy nhận được thu hút suy nghĩ của anh ấy trong tương lai gần, vì trên đường trở về Hà Lan, anh ấy đã soạn một cuộc đối thoại dài về các chủ đề cơ học.

Những lời nói bóng gió của Duillier đã thắp lên ngọn lửa bất hòa

mà cả thế kỷ khó có thể dập tắt được. Leibniz, người chưa bao giờ tranh cãi về quyền ưu tiên trong khám phá của Newton, và người tỏ ra khá hài lòng với việc Newton được nhận vào học viện của mình, giờ đây lần đầu tiên xuất hiện trong cuộc tranh luận. Anh ấy đã trả lời sôi nổi trong *Công vụ Leipzig* và phàn nàn với Hiệp hội Hoàng gia về sự bất công đã gây ra cho anh ấy.

Ở đây công việc tạm dừng một thời gian. Trong *Cầu phương của đường cong*, được xuất bản 1704, lần đầu tiên, một giải thích chính thức về phương pháp và ký hiệu của thông lượng đã được công khai. Vào khoảng năm 1705, xuất hiện một đánh giá bất lợi về điều này trong *Công vụ Leipzig*, nói rằng Newton sử dụng và luôn sử dụng các trợ từ cho sự khác biệt của Leibniz. Điều này được những người bạn của Newton coi là sự quy kết đạo văn từ phía thủ lĩnh của họ, nhưng cách giải thích này luôn bị Leibniz kịch liệt phản đối. Keill, giáo sư thiên văn học tại Oxford, đã thực hiện với sự nhiệt tình hơn là phán đoán để bảo vệ Newton. Trong một bài báo được đưa vào *Giao dịch triết học* của 1708, ông tuyên bố rằng Newton là người đầu tiên phát minh ra từ thông và "rằng phép tính tương tự sau đó đã được xuất bản bởi Leibniz, tên và cách ký hiệu đã được thay đổi." ' Leibniz phàn nàn với thư ký của Hiệp hội Hoàng gia về sự đối xử tồi tệ và yêu cầu sự can thiệp của cơ quan đó để khiến Keill từ chối ý định lừa đảo. Keill đã không được rút lại lời buộc tội của mình; ngược lại, được Newton và Hiệp hội Hoàng gia ủy quyền để giải thích và bảo vệ tuyên bố của mình. Điều này ông đã làm trong một bức thư dài. Leibniz sau đó đã phàn nàn rằng việc buộc tội giờ đây đã cởi mở hơn trước, và kêu gọi công lý lên Hiệp hội Hoàng gia và chính Newton. Hiệp hội Hoàng gia, do đó được kêu gọi với tư cách là thẩm phán, đã chỉ định một ủy ban thu thập và báo cáo về một khối lượng lớn tài liệu—hầu hết là các bức thư từ và gửi tới Newton, Leibniz, Wallis, Collins, v.v. Báo cáo này, được gọi là *Commercium Epistolicum*, xuất hiện vào năm 1712 và một lần nữa vào 1725, với tiền tố Recensio và ghi chú bổ sung của Keill. Kết luận cuối cùng

trong *Commercium Epistolicum* là Newton là nhà phát minh đầu tiên. Nhưng đây không phải là vấn đề. Câu hỏi không phải là liệu Newton có phải là nhà phát minh đầu tiên hay không, mà là liệu Leibniz có đánh cắp phương pháp này hay không. Ủy ban đã không chính thức mạo hiểm khẳng định niềm tin của họ rằng Leibniz là một kẻ đạo văn. Tuy nhiên, xuyên suốt tài liệu có mong muốn chứng minh Leibniz phạm tội nhiều hơn những gì họ muốn khẳng định một cách tích cực. Leibniz chỉ phản đối trong các bức thư riêng chống lại thủ tục tố tụng của Hiệp hội Hoàng gia, tuyên bố rằng ông sẽ không trả lời một lập luận quá yếu ớt. John Bernoulli, trong một bức thư gửi cho Leibniz, được xuất bản sau này trong một tài liệu nặc danh, rõ ràng là không công bằng đối với Newton cũng như những người bạn của ông đã đối xử với Leibniz . Keill trả lời, và sau đó Newton và Leibniz xuất hiện với tư cách là những người buộc tội lẫn nhau trong một số bức thư gửi cho bên thứ ba. Trong một bức thư gửi cho Conti, ngày 9 tháng 4 năm 1716, Leibniz một lần nữa nhắc nhở Newton về sự thừa nhận mà ông đã thực hiện trong trường học, điều mà giờ đây ông rất muốn từ chối; Leibniz cũng nói rằng ông luôn tin Newton, nhưng khi thấy ông ta đồng lõa trước những lời buộc tội mà ông ta biết là sai, lẽ tự nhiên là ông ta (Leibniz) bắt đầu nghi ngờ. Newton đã không trả lời bức thư này, nhưng lưu hành một số nhận xét giữa những người bạn của mình mà ông đã xuất bản ngay sau khi nghe tin Leibniz qua đời, ngày 14 tháng 11 năm 1716. Bài báo này của Newton đưa ra lời giải thích sau đây liên quan đến trường học đang được đề cập: " Anh ta [Leibniz] giả vờ rằng trong của tôi, tôi đã cho phép anh ta phát minh ra phép tính vi phân, độc lập với chính tôi; và việc gán phát minh này cho bản thân tôi là trái với kiến thức của tôi ở đó. Nhưng trong đoạn được đề cập đến tôi không tìm thấy một từ nào cho mục đích này." Trong ấn bản thứ ba của *Principia*, 1726, Newton đã bỏ qua sholium và thay thế ở vị trí khác, trong đó tên của Leibniz không xuất hiện.

Niềm tự hào dân tộc và cảm giác đảng phái từ lâu đã ngăn cản

việc áp dụng các ý kiến khách quan ở Anh, nhưng giờ đây hầu như tất cả những người quen thuộc với vấn đề này đều thừa nhận rằng Leibniz thực sự là một nhà phát minh độc lập. Có lẽ bằng chứng thuyết phục nhất cho thấy Leibniz là một nhà phát minh độc lập được tìm thấy trong quá trình nghiên cứu các bài báo toán học của ông (do C. I. Gerhardt sưu tầm và biên tập, gồm 6 tập, Berlin, 1849–1860), trong đó chỉ ra sự phát triển dần dần và tự nhiên của các quy tắc của phép tính trong tâm trí của chính mình. De Morgan nói: “Có một sự nhầm lẫn giữa về kiến thức về thông lượng hoặc vi phân và kiến thức về *phép tính* của thông lượng hoặc vi phân; nghĩa là, một phương pháp tiêu hóa với các quy tắc chung.”

Cuộc tranh luận này đáng tiếc là do sự xa lánh lâu dài và cay đắng mà nó tạo ra giữa các nhà toán học Anh và Lục địa. Nó gần như chấm dứt hoàn toàn mọi trao đổi ý kiến về các chủ đề khoa học. Người Anh tuân thủ chặt chẽ các phương pháp của Newton và, cho đến khoảng năm 1820, , trong hầu hết các trường hợp, vẫn không biết gì về những khám phá toán học xuất sắc đã được thực hiện trên Lục địa. Sự mất mát về lợi thế khoa học gần như hoàn toàn thuộc về phía Anh. Cách duy nhất mà tranh chấp này có thể được cho là đã thúc đẩy sự tiến bộ của toán học ở một mức độ nhỏ nào đó là thông qua các bài toán thách thức mà mỗi bên cố gắng làm phiền đối thủ của mình.

Vào thời điểm này, Leibniz đã bắt đầu thực hiện định kỳ việc đưa ra các bài toán thử thách. Lúc đầu, chúng không nhằm mục đích thách thức, mà chỉ đơn thuần là các bài tập trong phép tính mới. Đó là bài toán về đường cong đẳng thời (để tìm đường cong dọc theo đó một vật rơi với vận tốc không đổi), do ông đề xuất với người Cartesian vào năm 1687, và được chính James Bernoulli và John Bernoulli giải quyết . James Bernoulli đã đề xuất tại Leipzig *Journal* câu hỏi tìm đường cong (dây xích) được tạo thành bởi một chuỗi trọng lượng đồng đều bị treo tự do từ đầu của nó. Nó đã được Huygens, Leibniz và chính ông giải quyết. Vào năm 1697, John Bernoulli đã thách

thức các nhà toán học giỏi nhất ở châu Âu giải một bài toán khó, đó là tìm đường cong (đường cycloid) dọc theo đó một vật thể rơi từ từ điểm này sang điểm khác trong thời gian ngắn nhất có thể. Leibniz đã giải nó vào ngày anh ấy nhận được nó. Newton, de l'Hospital và hai Bernoullis đã đưa ra giải pháp. Newton's xuất hiện ẩn danh trong *Giao dịch triết học*, nhưng John Bernoulli đã nhận ra trong đó bộ óc mạnh mẽ của ông, "anquam", ông nói, "ex unggue leonem." Vấn đề quỹ đạo trực giao (a hệ thống các đường cong được mô tả bởi một định luật đã biết được đưa ra, để mô tả một đường cong cắt tất cả chúng theo các góc vuông) đã được đề xuất từ lâu trong *Acta Eruditorum*, nhưng ban đầu không nhận được nhiều sự chú ý. Nó lại được đề xuất vào năm 1716 bởi Leibniz, để cảm nhận nhịp đập của các nhà toán học Anh.

Đây có thể được coi là vấn đề thách thức đầu tiên được tuyên bố là nhằm vào người Anh. Newton đã giải nó ngay trong buổi tối mà nó được giao cho ông, mặc dù ông đã rất mệt mỏi vì công việc trong ngày ở xưởng đúc tiền. Giải pháp của ông, như đã xuất bản, là một kế hoạch chung của một cuộc điều tra hơn là một giải pháp thực tế, và vì lý do đó, Bernoulli đã chỉ trích là không có giá trị. Brook Taylor đã đảm nhận việc bảo vệ nhưng kết thúc bằng cách sử dụng ngôn ngữ rất đáng trách. Bernoulli không chịu thua kém về sự bất lịch sự, và đã đưa ra một câu trả lời cay đắng. Không lâu sau đó, Taylor đã gửi một lời thách thức công khai tới các nhà toán học Lục địa về một bài toán về tích phân của một dòng có dạng phức tạp mà rất ít nhà hình học ở Anh biết đến và được cho là vượt quá khả năng của các đối thủ của họ. Việc lựa chọn là không đúng đắn, vì Bernoulli đã giải thích phương pháp tích hợp này và các tích hợp tương tự từ lâu trước đó. Nó chỉ phục vụ để thể hiện kỹ năng và nâng cao chiến thắng của những người theo Leibniz. Thử thách cuối cùng và không khéo léo nhất là của John Keill. Bài toán là tìm đường đi của viên đạn trong môi trường có lực cản tỷ lệ với bình phương vận tốc. Trước tiên, không đảm bảo rằng bản thân mình có thể giải quyết

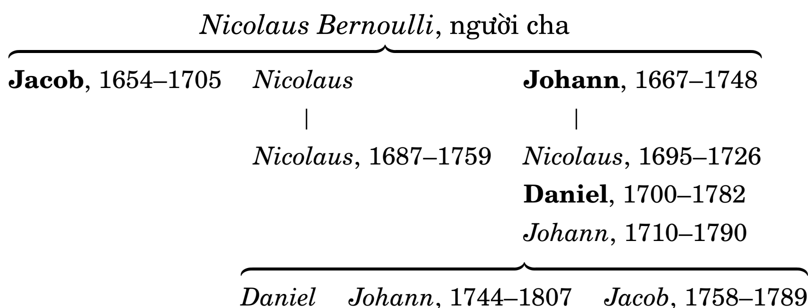
được, Keill đã mạnh dạn thách thức Bernoulli đưa ra một giải pháp. Cái sau đã giải quyết câu hỏi trong thời gian rất ngắn, không chỉ đối với điện trở tỷ lệ thuận với bình phương, mà còn đối với bất kỳ lũy thừa nào của vận tốc. Nghi ngờ sự yếu kém của đối thủ, anh ta nhiều lần đề nghị gửi giải pháp của mình cho một người bí mật ở London, với điều kiện Keill cũng sẽ làm như vậy. Keill không bao giờ trả lời, và Bernoulli đã lạm dụng anh ta và ca ngợi anh ta một cách tàn nhẫn. [26]

Các giải thích về các nguyên tắc cơ bản của giải tích, như được đưa ra bởi Newton và Leibniz, thiếu rõ ràng và chặt chẽ. Vì lý do đó, nó đã vấp phải sự phản đối từ một số khu vực. Vào năm 1694, Bernard Nieuwentyt của Hà Lan đã phủ nhận sự tồn tại của vi phân cấp cao hơn và phản đối thực hành bỏ qua các đại lượng nhỏ vô hạn. Những phản đối này Leibniz đã không thể đáp ứng một cách thỏa đáng. Trong câu trả lời của mình, ông cho biết giá trị của $\frac{dy}{dx}$ trong hình học có thể được biểu thị bằng tỷ lệ của các đại lượng hữu hạn. Theo cách giải thích của dx and dy, Leibniz đã bỏ trống. Đã có lúc chúng xuất hiện trong các bài viết của ông dưới dạng các dòng hữu hạn; sau đó chúng được gọi là số lượng vô cùng nhỏ, và một lần nữa, *số lượng không thể gán được*, xuất phát từ *số lượng có thể gán* theo quy luật liên tục. Trong bài thuyết trình cuối cùng này, Leibniz đã tiếp cận Newton gần nhất.

Ở Anh, Bishop Berkeley, nhà siêu hình học nổi tiếng, đã mạnh dạn tấn công các nguyên tắc của dòng chảy, người đã lập luận rất sắc sảo, cho rằng, bên cạnh những điều khác, ý tưởng cơ bản về việc giả định tồn tại một tỷ lệ hữu hạn giữa các số hạng hoàn toàn phù du- –"những bóng ma của những số lượng đã ra đi", như ông gọi chúng— thật ngớ ngẩn và khó hiểu. Câu trả lời của Jurin không xóa được tất cả các ý kiến phản đối. Berkeley là người đầu tiên chỉ ra điều đã được Lazare Carnot chỉ ra sau này, rằng các câu trả lời đúng là đạt được nhờ "sự đền bù cho các lỗi." Cuộc tấn công của Berkeley

không phải là không có điều tốt kết quả, vì nó là nguyên nhân trực tiếp của công trình nghiên cứu về dòng chảy của Maclaurin. Ở Pháp *Michel Rolle* bác bỏ phép tính vi phân và gây tranh cãi với *Varignon* về chủ đề này.

Trong số những người ủng hộ mạnh mẽ nhất của giải tích trên lục địa là Bernoullis. Họ và Euler đã khiến Basel ở Thụy Sĩ nổi tiếng là cái nôi của những nhà toán học vĩ đại. Gia đình Bernoullis đã trang bị trong suốt một thế kỷ tám thành viên nổi bật trong toán học. Chúng tôi nối lại bảng gia phả sau:—



Nổi tiếng nhất là hai anh em Jacob (James) và Johann (John), và Daniel, con trai của John. James và John là bạn thân của Leibniz và đã hợp tác với tay với anh ta. **James Bernoulli** (1654–1705) sinh ra ở Basel. Bắt đầu quan tâm đến phép tính, anh ấy đã thành thạo nó mà không cần sự trợ giúp của giáo viên. Từ năm 1687 cho đến khi qua đời, ông giữ ghế toán học tại Đại học Basel. Ông là người đầu tiên đưa ra lời giải cho bài toán Leibniz về đường đẳng thời. Trong lời giải của ông, được xuất bản trong *Acta Eruditorum*, 1690, lần đầu tiên chúng ta gặp từ *tích phân*. Leibniz đã gọi phép tính tích phân là *phép tính summatorius*, nhưng vào năm 1696, thuật ngữ *phép tính tích phân* đã được thống nhất giữa Leibniz và John Bernoulli. James đề xuất bài toán dây xích, sau đó chứng minh cách xây dựng đường cong này của Leibniz là đúng, và giải các bài toán phức tạp hơn, giả sử dây là (1) có mật độ thay đổi, (2) có thể giãn được, (3) tác dụng lên mỗi điểm bởi một lực hướng vào một tâm cố

định. Trong số những vấn đề này, anh ấy đã công bố câu trả lời mà không có lời giải thích, trong khi anh trai John của anh ấy đưa ra thêm lý thuyết của họ. Ông đã xác định hình dạng của "đường cong đàn hồi" được hình thành bởi một tấm hoặc thanh đàn hồi được cố định ở một đầu và bị uốn cong bởi một trọng lượng tác dụng lên đầu kia; của "lintearia," một tấm hình chữ nhật linh hoạt với hai mặt được cố định theo chiều ngang ở cùng độ cao, chứa đầy chất lỏng; của "volaria," một cánh buồm hình chữ nhật đầy gió. Anh ấy đã nghiên cứu các hình xoắn ốc loxodromic và logarit, trong đó cuối cùng, anh ấy đặc biệt thích thú với đặc tính đáng chú ý của nó là tự tái tạo trong nhiều điều kiện khác nhau. Theo ví dụ của Archimedes, ông muốn rằng đường cong sẽ được khắc trên tomb-stone của mình với dòng chữ "*eadem mutata resurgo*." Vào khoảng năm 1696, ông đã đề xuất bài toán đẳng tích nổi tiếng số liệu, và năm 1701 công bố giải pháp của riêng mình. Ông đã viết một tác phẩm về *Ars Conjectandi*, là sự phát triển của phép tính xác suất và bao gồm cuộc điều tra hiện được gọi là "Định lý Bernoulli" và cái gọi là "các con số của Bernoulli," trên thực tế (mặc dù không coi như vậy). indexBernoulli, Nicolaus (sinh năm 1695) anh) các hệ số của $\frac{x^n}{n!}$ trong phần mở rộng của $(e^x - 1)^{-1}$. Trong số các tác phẩm được sưu tầm của ông, gồm ba tập, một tập được in vào 1713, hai tập còn lại in 1744.

John Bernoulli (1667–1748) được anh trai của ông khởi xướng toán học. Sau đó, anh đến thăm Pháp, nơi anh gặp Malebranche, Cassini, De Lahire, Varignon và de l'Hospital. Trong mười năm, ông giữ ghế toán học tại Gröningen và sau đó kế vị anh trai mình tại Basel. Ông là một trong những giáo viên nhiệt tình nhất và là nhà nghiên cứu ban đầu thành công nhất trong thời đại của mình. Ông là thành viên của hầu hết mọi xã hội uyên bác ở châu Âu. Những tranh cãi của anh ấy cũng nhiều như những khám phá của anh ấy. Anh ấy rất nhiệt tình trong tình bạn, nhưng không công bằng, xấu tính và bạo lực với tất cả những ai khiến anh ấy không thích — kể

cả anh trai và con trai của anh ấy. Anh ấy đã có một cuộc tranh cãi gay gắt với James về bài toán đẳng tích. James kết án anh ta về một số nghịch lý. Sau cái chết của anh trai mình, anh ta đã cố gắng thay thế một giải pháp trá hình của người trước bằng một giải pháp không chính xác của riêng mình. John ngưỡng mộ công lao của Leibniz và Euler, nhưng mù quáng trước những điều của Newton . Ông đã làm phong phú thêm phép tính tích phân bằng công sức lao động của mình. Trong số những khám phá của ông có phép tính hàm mũ, đường đi xuống nhanh nhất và mối liên hệ đẹp đẽ của nó với đường đi được mô tả bởi một tia đi qua các tầng có mật độ thay đổi. Ông xử lý lượng giác bằng phương pháp phân tích, nghiên cứu các đường cong và quỹ đạo của . Ông đã nhiều lần được trao giải thưởng của Viện Hàn lâm Khoa học ở Paris.

Trong số các con trai của ông, **Nicholas** và **Daniel** được bổ nhiệm làm giáo sư toán học cùng lúc tại Học viện St. Petersburg. Người trước đây sớm chết trong thời kỳ đỉnh cao của cuộc đời; người sau quay trở lại Basel vào năm 1733, nơi ông đảm nhận vị trí chủ tịch triết học thực nghiệm. Công bố toán học đầu tiên của ông là nghiệm của một phương trình vi phân do Riccati đề xuất. Ông đã viết một tác phẩm về thủy động lực học. Các nghiên cứu của anh ấy về xác suất rất đáng chú ý vì sự táo bạo và độc đáo của chúng. Ông đề xuất lý thuyết *Kỳ vọng đạo đức*, mà ông cho rằng sẽ cho kết quả phù hợp với quan niệm thông thường của chúng ta hơn là lý thuyết *xác suất toán học*. "Kỳ vọng đạo đức" của ông đã trở thành cổ điển, nhưng không ai sử dụng nó. Ông áp dụng lý thuyết xác suất để bảo hiểm; để xác định tỷ lệ tử vong do bệnh đậu mùa ở các giai đoạn khác nhau của cuộc đời; để xác định số người sống sót ở một độ tuổi nhất định từ một số lần sinh nhất định; để xác định mức độ tiêm chủng kéo dài thời gian sống trung bình. Ông đã chỉ ra cách phép tính vi phân có thể được sử dụng trong lý thuyết xác suất. Anh và Euler rất vinh dự đã giành được hoặc chia sẻ ít nhất mười giải thưởng từ Viện Hàn lâm Khoa học ở Paris.

Johann Bernoulli (sinh năm 1710) nối nghiệp cha mình trong chức vụ giáo sư toán học tại Basel. Anh ấy đã giành được ba giải thưởng (về capstan, sự truyền ánh sáng và nam châm) từ Học viện Khoa học tại Paris. **Nicolaus Bernoulli** (sinh năm 1687) đã có một thời gian nắm giữ chiếc ghế toán học tại Padua mà Galileo đã từng đảm nhiệm. **Johann Bernoulli** (sinh năm 1744) ở tuổi 19 được bổ nhiệm làm nhà thiên văn học hoàng gia tại Berlin, và sau đó là giám đốc khoa toán học của Học viện. Anh trai của ông *Jacob* đã đảm nhận nhiệm vụ chủ tịch khoa vật lý thực nghiệm tại Basel, trước đó do chú của ông là Jacob đảm nhiệm, và sau đó được bổ nhiệm làm giáo sư toán học tại Học viện ở St. Petersburg.

Bây giờ chúng ta sẽ đề cập ngắn gọn về một số nhà toán học khác thuộc thời kỳ của Newton, Leibniz và Bernoullis trưởng lão.

Guillaume François Antoine l'Hospital (1661–1704), một học trò của John Bernoulli, đã được đề cập là tham gia vào các thử thách do Leibniz và Bernoullis đưa ra. Ông đã giúp rất nhiều trong việc làm cho phép tính của Leibniz được đông đảo các nhà toán học biết đến nhiều hơn bằng việc xuất bản một chuyên luận về nó vào năm 1696. Điều này lần đầu tiên chứa phương pháp tìm giá trị giới hạn của một phân số mà hai số hạng của nó có xu hướng tiến tới 0 tại điểm cuối cùng. cùng một lúc.

Một người Pháp nhiệt tình ủng hộ giải tích là **Pierre Varignon** (1654–1722). **Joseph Saurin** (1659–1737) đã giải được vấn đề tế nhị về cách xác định tiếp tuyến tại nhiều điểm của các đường cong đại số. **François Nicole** (1683–1758) vào năm 1717 đã ban hành chuyên luận có hệ thống đầu tiên về sai phân hữu hạn, trong đó ông tìm thấy tổng của a số lượng đáng kể sê-ri thú vị. Ông cũng viết về roulettes, đặc biệt là các epicycloids hình cầu, và sự cải chính của chúng. Cũng quan tâm đến sự khác biệt hữu hạn là **Pierre Raymond de Montmort** (1678–1719). Các bài viết chính của ông, về lý thuyết xác suất, đã khích lệ người kế vị nổi tiếng hơn của ông,

De Moivre. **Jean Paul de Gua** (1713–1785) đã chứng minh quy tắc dấu hiệu của Descartes, bây giờ đưa ra trong sách. Nhà hình học tài giỏi này đã viết một công trình về hình học giải tích vào năm 1740, đối tượng của công trình này là để chỉ ra rằng hầu hết các nghiên cứu về đường cong đều có thể được thực hiện với sự phân tích của Descartes khá dễ dàng như với phép tính. Anh ấy chỉ ra cách tìm các tiếp tuyến, tiệm cận và các điểm kỳ dị khác nhau của các đường cong ở mọi mức độ, và chứng minh bằng phối cảnh rằng một số điểm trong số này có thể ở vô cực. **Philippe de Lahire** (1640–1718), một học trò của Desargues, một nhà toán học bám vào các phương pháp của người xưa. Công trình của ông về các mặt cắt hình nón hoàn toàn là tổng hợp, nhưng khác với các luận thuyết cổ xưa ở chỗ suy ra các tính chất của hình nón từ các tính chất của đường tròn theo cách tương tự như Desargues và Pascal đã làm. Những đổi mới của ông có mối quan hệ chặt chẽ với hình học tổng hợp hiện đại. Anh ấy đã viết trên cò quay, trên phương pháp đồ họa, epicycloids, conchoids và trên các ô vuông ma thuật . **Michel Rolle** (1652–1719) là tác giả của định lý mang tên ông.

Trong số các nhà toán học người Ý, hẳn không được nhắc đến Riccati và Fagnano. **Jacopo Francesco, Bá tước Riccati** (1676–1754) được biết đến nhiều nhất nhờ bài toán của ông, được gọi là phương trình Riccati, được xuất bản trong *Acta Eruditorum* vào năm 1724. Ông đã thành công trong việc lấy tích phân phương trình vi phân này cho một số trường hợp đặc biệt. Một nhà hình học có năng lực phi thường là **Giulio Carlo, Bá tước de Fagnano** (1682–1766). Ông đã phát hiện ra công thức sau, $\pi = 2i \log \frac{1-i}{1+i}$, trong đó ông dự đoán Euler trong việc sử dụng số mũ và logarit ảo . Các nghiên cứu của ông về sự chính quy của hình elip và hyperbola là điểm khởi đầu của lý thuyết về hàm số elip. Ông đã chỉ ra, ví dụ , rằng có thể tìm thấy hai cung của một hình elip theo vô số cách, sự khác biệt của chúng có thể biểu thị bằng một đường bên phải.

Ở Đức, người duy nhất cùng thời với Leibniz được chú ý là **Ehrenfried Walter Tschirnhausen** (1651–1708), người đã khám phá ra chất ăn da của sự phản xạ, đã thử nghiệm trên gương phản xạ kim loại và kính nung lớn, và đã cho chúng tôi một phương pháp biến đổi các phương trình mang tên ông. Tin rằng các phương pháp đơn giản nhất (như phương pháp của người xưa) là đúng nhất, ông kết luận rằng trong các nghiên cứu liên quan đến tính chất của đường cong, giải tích cũng có thể được bỏ qua.

Sau cái chết của Leibniz, ở Đức không còn một nhà toán học nào nổi tiếng nữa. **Christian Wolf** (1679–1754), giáo sư tại Halle, có tham vọng trở thành người kế vị Leibniz, nhưng ông "đã ép những ý tưởng tài tình của Leibniz vào một chủ nghĩa kinh viện mô phạm, và nổi tiếng không thể chê vào đâu được vì đã trình bày các yếu tố của phép phân tích số học, đại số và được phát triển từ thời điểm đó của thời Phục hưng dưới hình thức Euclid,—tất nhiên là chỉ ở dạng bên ngoài, vì ông hoàn toàn không thể thâm nhập vào tinh thần của chúng." [16]

Những người đương thời và những người kế vị ngay lập tức của Newton ở Vương quốc Anh là những người không có công trạng gì. Chúng ta có nhắc đến Cotes, Taylor, Maclaurin, và De Moivre. Chúng tôi đã nói rằng khi **Roger Cotes** qua đời (1682–1716) , Newton đã thốt lên, "Nếu Cotes còn sống, chúng ta có thể đã biết điều gì đó." Theo yêu cầu của Tiến sĩ Bentley, Cotes đã tiến hành xuất bản ấn bản thứ hai của *Principia* của Newton. Các bài báo toán học của ông đã được xuất bản sau cái chết của ông bởi Robert Smith, người kế nhiệm ông trong chức vụ giáo sư Plumbian tại Đại học Trinity. Tiêu đề của tác phẩm, *Harmonia Mensurarum*, được gợi ý bởi định lý sau có trong đó: Nếu trên mỗi vectơ bán kính, qua một điểm cố định O, thì có một điểm R, sao cho nghịch đảo của OR là trung bình cộng của các nghịch đảo của OR_1,OR_2,$\ldots OR_n$, thì quỹ tích của R sẽ là một đường thẳng. Trong công việc này, tiến độ

đã được thực hiện trong việc áp dụng logarit và các thuộc tính của đường tròn vào phép tính thông thạo. Đối với Cotes, chúng ta mắc nợ một định lý trong lượng giác phụ thuộc vào hình thành các thừa số của $x^n - 1$. Đứng đầu trong số những người ngưỡng mộ Newton là Taylor và Maclaurin. Cuộc cãi vã giữa các nhà toán học người Anh và lục địa đã khiến họ làm việc khá độc lập với những người đương thời tuyệt vời của họ trên khắp Kênh.

Brook Taylor (1685–1731) quan tâm đến nhiều lĩnh vực học tập, và trong phần sau của cuộc đời, ông chủ yếu tham gia vào các suy đoán về tôn giáo và triết học. Công trình chính của ông, *Methodus incrementorum directa et inversa*, London, 1715–1717, đã bổ sung thêm một nhánh mới cho toán học, hiện được gọi là "sự khác biệt hữu hạn." Ông đã tạo ra nhiều ứng dụng quan trọng của nó , đặc biệt là nghiên cứu về dạng chuyển động của các dây dao động, lần đầu tiên được ông quy về các nguyên tắc cơ học. Công trình này cũng chứa "Định lý Taylor", tầm quan trọng của vốn không được các nhà phân tích công nhận trong hơn 50 năm, cho đến khi Lagrange chỉ ra sức mạnh của nó. Bằng chứng của ông về nó không xét đến vấn đề hội tụ, và hoàn toàn vô giá trị. Chứng minh chính xác đầu tiên được Cauchy đưa ra một thế kỷ sau. Công trình của Taylor đưa ra lời giải thích chính xác đầu tiên về hiện tượng khúc xạ thiên văn. Ông cũng đã viết một tác phẩm về quan điểm tuyến tính, một chuyên luận, giống như các tác phẩm khác của ông, thiếu sự đầy đủ và rõ ràng trong cách diễn đạt. Ở tuổi hai mươi ba, ông đã đưa ra một lời giải xuất sắc cho bài toán tâm dao động, được công bố vào năm 1714. Tuyên bố của ông về ưu tiên đã bị John Bernoulli phản đối một cách bất công.

Colin Maclaurin (1698–1746) được bầu làm giáo sư toán học tại Aberdeen khi mới 19 tuổi qua một kỳ thi cạnh tranh, và vào năm 1725 đã kế nhiệm James Gregory tại Đại học của Edinburg. Ông rất thích tình bạn với Newton, và, được truyền cảm hứng từ những khám phá của Newton, ông đã xuất bản *Geometria Organica* của

mình vào năm 1719, chứa một phương thức tạo hình nón mới và đáng chú ý, được biết đến với tên ông . Một tờ thứ hai, *De Linearum geometryarum Proprietatibus*, 1720, rất đáng chú ý vì sự trang nhã trong các phần trình bày của nó. Nó dựa trên hai định lý: thứ nhất là định lý Cotes; thứ hai là Maclaurin's: Nếu qua bất kỳ điểm nào O, một đường thẳng được vẽ cắt đường cong tại n điểm, và tại các điểm này, các tiếp tuyến sẽ được vẽ và nếu có bất kỳ đường thẳng nào khác qua O cắt đường cong theo R_1, R_2, v.v. và hệ các tiếp tuyến n trong r_1, r_2, v.v., sau đó $\sum \frac{1}{OR} = \sum \frac{1}{Or}$. Định lý này và định lý Cotes là sự tổng quát hóa các định lý của Newton. Maclaurin sử dụng những điều này để giải quyết các đường cong của cấp hai và cấp ba, mà đỉnh cao là định lý đáng chú ý rằng nếu một tứ giác có các đỉnh và hai giao điểm của các cạnh đối diện của nó trên một đường cong của bậc ba thì các tiếp tuyến vẽ ở hai đỉnh đối diện cắt nhau trên đường cong. Ông đã suy luận một cách độc lập định lý Pascal về quẻ. Sau đây là phần mở rộng của ông về định lý này (*Phil. Trans.*, 1735): Nếu một đa giác di chuyển sao cho mỗi cạnh của nó đi qua một điểm cố định và nếu tất cả các đỉnh của nó trừ một đỉnh mô tả các đường cong có độ lần lượt là m, n, p, v.v., thì đỉnh tự do di chuyển trên một đường cong có bậc $2mnp\cdots$, giảm xuống còn $mnp\cdots$ khi các điểm cố định đều nằm trên một đường thẳng. Maclaurin đã viết trên các đường cong bàn đạp. Ông là tác giả của *Đại số*. Mục tiêu của chuyên luận về *Fluxions* của ông là tìm ra học thuyết về dòng chảy trên các biểu diễn hình học theo cách thức của người xưa, và do đó, bằng cách giải thích chặt chẽ, trả lời những lời công kích như của Berkeley rằng học thuyết này dựa trên suy luận sai lầm. *Fluxions* lần đầu tiên chứa cách phân biệt chính xác giữa cực đại và cực tiểu, đồng thời giải thích việc sử dụng chúng trong lý thuyết đa điểm . "Định lý Maclaurin" trước đây đã được James Stirling đưa ra, và chỉ là một trường hợp riêng biệt của "Định lý Taylor." Kèm theo chuyên luận về *Fluxions* là nghiệm của một số tuyệt đẹp các bài toán hình học, cơ

học và thiên văn, trong đó ông sử dụng các phương pháp cổ xưa với kỹ năng tuyệt vời đến mức khiến Clairaut từ bỏ các phương pháp giải tích và tấn công bài toán hình trái đất bằng hình học thuần túy . Các giải pháp của ông đã nhận được sự ngưỡng mộ nồng nhiệt nhất của Lagrange. Maclaurin đã nghiên cứu lực hút của ellipsoid quay và chỉ ra rằng một khối chất lỏng đồng chất quay đều quanh một trục dưới tác dụng của trọng lực phải có dạng một ellipsoid quay. Newton đã đưa ra định lý này mà không cần chứng minh. Bất chấp thiên tài của Maclaurin, ảnh hưởng của ông đối với sự tiến bộ của toán học ở Vương quốc Anh là không may; vì, bằng tấm gương của mình, ông đã khiến những người đồng hương của mình sao nhãng việc phân tích và thờ ơ với sự tiến bộ tuyệt vời trong phân tích cao hơn được thực hiện trên Lục địa.

Chúng ta vẫn phải nói về **Abraham de Moivre** (1667–1754), là người gốc Pháp nhưng bị buộc phải rời đi Pháp ở tuổi mười tám, khi Thu hồi Sắc lệnh Nantes. Anh ấy định cư ở London, nơi anh ấy dạy các bài học về toán học. Ông sống đến tám mươi bảy tuổi và chìm vào trạng thái gần như hôn mê hoàn toàn. Sinh kế của anh sau này phụ thuộc vào việc giải các câu hỏi về trò chơi may rủi và các bài toán về xác suất, mà anh có thói quen đưa ra tại một quán rượu ở St. Martin's Lane. Không lâu trước khi qua đời, ông tuyên bố rằng ông cần ngủ thêm mười hoặc hai mươi phút mỗi ngày. Ngày hôm sau khi anh ta đạt được tổng cộng hơn hai mươi ba giờ, anh ta ngủ đúng hai mươi bốn giờ rồi qua đời trong giấc ngủ. De Moivre rất thích tình bạn của Newton và Halley. Năng lực của ông với tư cách là một nhà toán học nằm ở khả năng phân tích hơn là điều tra hình học. Ông đã cách mạng hóa lượng giác cao hơn bằng việc khám phá ra định lý được biết đến với tên ông và bằng cách mở rộng các định lý về phép nhân và chia các cung từ đường tròn đến hyperbola. Công trình của ông về lý thuyết xác suất vượt qua bất kỳ công trình nào được thực hiện bởi bất kỳ nhà toán học nào khác ngoại trừ Laplace. Đóng góp chính của ông là các nghiên cứu về Thời lượng chơi, Lý thuyết về

chuỗi tuần hoàn và phần mở rộng của ông về giá trị của định lý Bernoulli nhờ sự trợ giúp của định lý Stirling. [42] Các tác phẩm chính của ông là *Học thuyết về cơ hội*, 1716, *Miscellanea Analytica*, 1730, và các bài báo của ông trong *Các giao dịch triết học*.

EULER, LAGRANGE VÀ LAPLACE

Trong suốt 90 năm từ 1730 đến 1820, người Pháp và người Thụy Sĩ đã trau dồi toán học với thành công rực rỡ nhất. Không có thời kỳ nào trước đó xuất hiện một loạt tên tuổi lừng lẫy như vậy. Lúc này Thụy Sĩ có Euler của cô ấy; Pháp, Lagrange, Laplace, Legendre và Monge của cô ấy. Sự tầm thường của toán học Pháp đánh dấu thời Louis-XIV. bây giờ đã được theo sau bởi một trong những thời kỳ tươi sáng nhất của lịch sử. Mặt khác, Anh và Đức, trong thời kỳ không hiệu quả ở Pháp có Newton và Leibniz của họ, giờ đây không thể tự hào về một nhà toán học vĩ đại nào. Nước Pháp hiện đang vẫy vương trượng toán học. Nghiên cứu toán học của người Anh và người Đức đã chìm xuống mức thấp nhất. Trong số đó, hướng nghiên cứu ban đầu đã không được lựa chọn. Cái trước gắn bó quá mức với các phương pháp hình học cổ đại; cái sau tạo ra trường tổ hợp, không mang lại giá trị gì.

Công sức của Euler, Lagrange và Laplace nằm ở phân tích cao hơn, và điều này họ đã phát triển đến một mức độ tuyệt vời. Bởi họ, phân tích đã hoàn toàn bị cắt đứt khỏi hình học. Trong giai đoạn trước đó, nỗ lực của các nhà toán học không chỉ ở Anh, mà ở một mức độ nào đó, ngay cả trên lục địa, đã hướng tới việc giải các bài toán khoác trên mình lớp áo hình học, và kết quả tính toán thường được quy về dạng hình học. Một sự thay đổi bây giờ đã diễn ra. Euler đã giải phóng phép tính giải tích khỏi hình học và thiết lập nó như một ngành khoa học độc lập. Lagrange và Laplace tuân thủ chặt chẽ sự tách biệt này. Xây dựng trên nền tảng rộng lớn đã được Newton và Leibniz đặt ra cho cơ học và phân tích cao hơn, Euler,

với trí óc phong phú vô song, đã dựng lên một cấu trúc phức tạp. Có rất ít ý tưởng tuyệt vời được các nhà phân tích thành công theo đuổi mà không phải do Euler đề xuất, hoặc ông không có vinh dự được phát minh. Có lẽ, với ít phát minh hoa lệ hơn, nhưng với thiên tài toàn diện hơn và lý luận sâu sắc hơn, Lagrange đã phát triển phép tính vô hạn và đưa cơ chế phân tích thành dạng mà trong đó bây giờ chúng ta biết điều đó. Laplace đã áp dụng phép tính và cơ học để xây dựng lý thuyết vạn vật hấp dẫn, và do đó, phần lớn mở rộng và bổ sung cho các công lao của Newton, đã đưa ra một cuộc thảo luận phân tích đầy đủ về hệ mặt trời. Ông cũng đã viết một tác phẩm đánh dấu kỷ nguyên về Xác suất. Trong số các nhánh giải tích được tạo ra trong giai đoạn này có phép tính Biến thiên của Euler và Lagrange, Điều hòa hình cầu của Laplace và Legendre, và Tích phân Elliptic của Legendre.

So sánh sự phát triển của giải tích vào thời điểm này với sự phát triển trong thời của Gauss, Cauchy và các nhà toán học gần đây, , chúng tôi quan sát thấy một sự khác biệt quan trọng. Trong giai đoạn trước, chúng ta chủ yếu chứng kiến sự phát triển liên quan đến *form*. Đặt niềm tin gần như hoàn toàn vào kết quả tính toán, các nhà toán học không phải lúc nào cũng dừng lại để khám phá các bằng chứng chặt chẽ, và do đó đã dẫn đến các mệnh đề chung, một số mệnh đề sau đó chỉ được chứng minh là đúng trong các trường hợp đặc biệt. Trường phái Tổ hợp ở Đức đã đưa xu hướng này đến cực điểm; họ tôn thờ chủ nghĩa hình thức và không chú ý đến nội dung thực sự của công thức. Nhưng trong thời gian gần đây, bên cạnh sự khéo léo trong cách xử lý vấn đề một cách trang trọng, người ta còn bổ sung thêm một sự chặt chẽ rất cần thiết trong việc chứng minh. Một ví dụ điển hình về sự chặt chẽ ngày càng tăng này được thấy trong cách sử dụng hiện tại của chuỗi vô hạn so với cách sử dụng của Euler, và của Lagrange trong các tác phẩm trước đây của ông.

Sự tẩy chay hình học do những bộ óc bậc thầy của thời kỳ này gây ra không thể kéo dài vĩnh viễn. Thật vậy, một trường phái hình

học mới đã ra đời ở Pháp trước khi thời kỳ này kết thúc. Lagrange không cho phép một sơ đồ xuất hiện trong *Mécanique analytique* của mình, nhưng mười ba năm trước khi ông qua đời, Monge đã xuất bản *Hình học mô tả*.

Leonhard Euler (1707–1783) sinh ra ở Basel. Cha của ông, , một bộ trưởng, đã hướng dẫn ông về toán học lần đầu tiên và sau đó gửi ông đến Đại học Basel, nơi ông trở thành học trò yêu thích của John Bernoulli. Vào năm thứ 19, ông đã viết một luận văn về cột buồm của tàu, đã nhận được giải nhì của Viện Hàn lâm Khoa học Pháp. Khi hai con trai của John Bernoulli, Daniel và Nicolaus, đến Nga, họ đã xúi giục Catharine I., vào năm 1727, mời người bạn của họ là Euler đến St. Petersburg , nơi Daniel, vào năm 1733, được bổ nhiệm làm trưởng ban toán học. Năm 1735, việc giải một bài toán thiên văn, do Học viện đề xuất, mà một số nhà toán học lỗi lạc đã yêu cầu thời gian vài tháng, đã được Euler thực hiện trong ba ngày với sự trợ giúp về các phương pháp cải tiến của riêng mình. Nhưng nỗ lực này đã khiến anh ấy lên cơn sốt và khiến anh ấy không thể sử dụng mắt phải. Với những phương pháp vẫn còn ưu việt hơn, vấn đề tương tự này sau đó đã được Gauss lừng lẫy giải quyết sau đó trong một giờ! [47] The chế độ chuyên quyền của Anne I. đã khiến Euler dịu dàng tránh xa các vấn đề công cộng và dành toàn bộ thời gian cho khoa học. Sau cuộc gọi của ông đến Berlin bởi Frederick Đại đế vào năm 1747, nữ hoàng Phổ, người đã tiếp đón ông một cách tử tế, đã tự hỏi làm thế nào mà một học giả nổi tiếng lại có thể rụt rè và kín tiếng như vậy. Euler naïvely trả lời, “ Thưa bà, đó là bởi vì tôi đến từ một đất nước mà khi người ta nói, người ta sẽ bị treo cổ.” Năm 1766, ông gặp khó khăn trong việc xin phép rời Berlin để nhận cuộc gọi của Catharine II. tới St. Petersburg. Ngay sau khi trở về Nga, ông bị mù, nhưng điều này không ngăn được năng suất văn chương tuyệt vời của ông, kéo dài suốt mười bảy năm, cho đến khi ngày mất của ông. [45] Ông đã đọc cho người hầu của mình *Anleitung zur Algebra*, 1770, mặc dù thuần túy là tiểu học, được coi

là một trong những những nỗ lực sớm nhất để đặt các quy trình cơ bản trên cơ sở hợp lý.

Euler đã viết vô số tác phẩm, chủ yếu là những tác phẩm sau: *Introductio in analysin infinitorum*, 1748, một tác phẩm đã gây ra một cuộc cách mạng trong toán học giải tích, một chủ đề cho đến nay chưa bao giờ được trình bày một cách tổng quát và có hệ thống như vậy ; *Institutiones calculi differis*, 1755, và *Institutiones calculi integrationis*, 1768–1770, là những công trình đầy đủ và chính xác nhất về giải tích thời bấy giờ, và không chứa chỉ một bản tóm tắt đầy đủ về mọi thứ sau đó được biết về chủ đề này, mà còn cả Hàm Beta và Gamma và các cuộc điều tra ban đầu khác; *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, 1744, thể hiện một số lượng thiên tài toán học hiếm có đối thủ, chứa đựng những nghiên cứu của ông về phép tính biến thiên (một chủ đề sau này được Lagrange cải tiến), cho phát minh mà Euler là được dẫn đầu bởi nghiên cứu về các đường cong đẳng lượng, brachistochrone trong một môi trường điện trở và lý thuyết trắc địa (các chủ đề trước đây đã thu hút sự chú ý của của Bernoullis trưởng lão và những người khác); *Theoria motuum planetarum et cometarum*, 1744, *Theoria motus lunæ* 1753, *Theoria motuum lunæ* 1772, là những tác phẩm chính của ông về thiên văn học; *Ses lettres à une Princesse d'Allemagne sur quelques sujets de Physique et de Philosophie*, 1770, là một tác phẩm rất được yêu thích.

Chúng tôi tiếp tục đề cập đến những đổi mới và phát minh chính của Euler. Ông coi lượng giác như một nhánh của phép phân tích , giới thiệu (đồng thời với Thomas Simpson ở Anh) các chữ viết tắt hiện nay cho các hàm lượng giác và công thức đơn giản hóaæ bằng phương pháp đơn giản là chỉ định các góc của một tam giác bằng A, B, C và các cạnh đối diện bởi a, b, c , tương ứng. Ông đã chỉ ra mối liên hệ giữa hàm lượng giác và hàm mũ. Trong một bài báo năm 1737, lần đầu tiên chúng ta gặp ký hiệu π để biểu thị $3,14159\ldots$. [21]

Euler đã đặt ra các quy tắc cho phép biến đổi tọa độ trong không

gian, đưa ra cách xử lý phân tích có phương pháp đối với các đường cong phẳng và các bề mặt bậc hai. Ông là người đầu tiên thảo luận về phương trình bậc hai theo ba biến và phân loại các bề mặt được đại diện bởi nó. Theo các tiêu chí tương tự như tiêu chí được sử dụng trong phân loại hình nón, ông đã thu được năm loài. Ông đã nghĩ ra một phương pháp giải phương trình biquadratic bằng cách giả sử $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, với hy vọng rằng nó sẽ đưa anh ấy đến một nghiệm tổng quát của phương trình đại số. Phương pháp loại bỏ bằng cách giải một loạt các phương trình tuyến tính (được phát minh độc lập bởi Bézout) và phương pháp loại bỏ bằng các hàm đối xứng là do ông. [20] Tiến xa là những nghiên cứu của Euler về logarit. Leibniz và John Bernoulli đã từng tranh luận về câu hỏi liệu một số âm có logarit hay không. Bernoulli tuyên bố rằng vì $(-a)^2 = (+a)^2$ nên chúng ta có $\log(-a)^2 = \log(+a)^2$ và $2\log(-a) = 2\log(+a)$, và cuối cùng là $\log(-a) = \log(+a)$. Euler đã chứng minh rằng a thực sự có vô số logarit, tất cả đều là ảo khi a âm và tất cả trừ một logarit khi a dương. Sau đó, anh ấy giải thích làm thế nào $\log(-a)^2$ có thể bằng $\log(+a)^2$, nhưng $\log(-a)$ lại không bằng $\log(+a)$.

Chủ đề của chuỗi vô hạn nhận được cuộc sống mới từ anh ấy. Nhờ những nghiên cứu của ông về chuỗi, chúng ta có được sự sáng tạo của lý thuyết tích phân xác định nhờ sự phát triển của cái gọi là *tích phân Euler*. Anh ấy thỉnh thoảng cảnh báo độc giả của mình về việc sử dụng các chuỗi khác nhau, nhưng bản thân anh ấy vẫn rất bất cẩn. Cách xử lý cứng nhắc mà các chuỗi vô hạn phải chịu bây giờ là điều không thể tưởng tượng được. Không có khái niệm rõ ràng nào về những gì tạo nên một chuỗi hội tụ. Cả Leibniz, Jacob và John Bernoulli đều không nghi ngờ gì về tính chính xác của biểu thức $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Guido Grandi đã đi xa đến mức kết luận từ điều này rằng $\frac{1}{2} = 0 + 0 + 0 + \cdots$. Khi xử lý loạt bài, Leibniz đã nâng cao một phương pháp chứng minh siêu hình, phương pháp này đã thống trị tâm trí của Bernoullis trưởng lão, và thậm chí cả Euler. [46] Xu hướng lập luận đó là biện minh cho những kết quả mà đối với chúng

ta bây giờ dường như rất vô lý. Sự lỏng lẻo trong điều trị có thể được nhìn thấy rõ nhất từ các ví dụ. Chính bài báo trong đó Euler cảnh báo chống lại các chuỗi phân kỳ chứa bằng chứng rằng

$$\cdots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0 \text{ như sau:}$$
$$n + n^2 + \cdots = \frac{n}{1-n}, \quad 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{n}{n-1};$$

những thứ này được thêm vào bằng không. Euler không ngần ngại viết $1-3+5-7+\cdots = 0$, và không ai phản đối kết quả như vậy ngoại trừ Nicolaus Bernoulli, cháu trai của John và Jacob. Thật kỳ lạ khi nói rằng, Euler cuối cùng đã thành công trong việc chuyển đổi Nicolaus Bernoulli sang quan điểm sai lầm của riêng mình. Tại thời điểm hiện tại, thật khó để tin rằng Euler đã có thể tự tin viết $\sin\phi - 2\sin 2\phi + 3\sin 3\phi - 4\sin 4\phi + \cdots = 0$, nhưng các ví dụ như vậy cung cấp những minh họa nổi bật về việc thiếu cơ sở khoa học của một số phần phân tích tại thời điểm đó. Bằng chứng của Euler về công thức nhị thức cho số mũ phân số âm và , đã được sao chép trong sách giáo khoa tiểu học của những năm gần đây, là bị lỗi. Một sự phát triển đáng chú ý, nhờ Euler, là cái mà ông đặt tên là chuỗi siêu hình học, tổng của nó mà ông quan sát thấy là phụ thuộc vào tích phân của một phương trình vi phân tuyến tính cấp hai, nhưng Gauss vẫn chỉ ra ra rằng đối với các giá trị đặc biệt của các chữ cái, chuỗi này đại diện cho gần như tất cả các chức năng được biết đến sau đó.

Euler đã phát triển phép tính sai phân hữu hạn trong chương đầu tiên của *Institutiones calculi differis*, sau đó suy ra phép tính vi phân từ nó. Ông đã thiết lập một định lý về hàm thuần nhất, được biết đến với tên ông, và đã đóng góp phần lớn cho lý thuyết về phương trình vi phân, một chủ đề đã nhận được sự quan tâm của Newton, Leibniz và Bernoullis, nhưng vẫn chưa được phát triển. Clairaut, Fontaine và Euler gần như đồng thời quan sát các tiêu chí về khả năng tích hợp của , nhưng ngoài ra Euler còn chỉ ra cách sử dụng chúng để xác định các yếu tố tích hợp. Các nguyên tắc mà

các tiêu chí dựa vào liên quan đến một số mức độ tối nghĩa. Định lý bổ sung nổi tiếng cho tích phân elip lần đầu tiên được thiết lập bởi bởi Euler. Ông đã phát minh ra một thuật toán mới cho các phân số liên tục, thuật toán mà ông đã sử dụng để giải phương trình vô định $ax + by = c$. Bây giờ chúng ta biết rằng về cơ bản nghiệm tương tự của phương trình này đã được người Hindu đưa ra 1000 nhiều năm trước đó. Bằng cách đưa ra các thừa số của số $2^{2^n} + 1$ khi $n = 5$, ông chỉ ra rằng biểu thức này không phải lúc nào cũng đại diện cho các số nguyên tố, như Fermat đã giả định. Đầu tiên, ông cung cấp bằng chứng cho "Định lý Fermat," và định lý thứ hai của Fermat, định lý này phát biểu rằng mọi số nguyên tố có dạng $4n + 1$ có thể biểu thị dưới dạng tổng của hai bình phương theo một và chỉ một cách. Định lý thứ ba của Fermat, rằng $x^n + y^n = z^n$, không có nghiệm nguyên cho các giá trị của n lớn hơn 2, đã được Euler chứng minh là đúng khi $n = 3$. Euler đã khám phá ra bốn định lý mà khi kết hợp với nhau tạo nên định luật tương hỗ bậc hai, một định luật độc lập được khám phá bởi Legendre. [48] Euler đã phát biểu và chứng minh rất tốt -định lý đã biết, đưa ra mối quan hệ giữa số đỉnh, số mặt và số cạnh của một số khối đa diện nhất định, tuy nhiên, dường như Descartes đã biết. Sức mạnh của Euler cũng hướng tới chủ đề hấp dẫn của lý thuyết xác suất, trong đó ông giải một số bài toán khó về .

Không kém phần quan trọng là công sức của Euler trong cơ học phân tích. Whewell nói: "Người đã làm nhiều nhất để mang lại cho phân tích tính tổng quát và đối xứng mà giờ đây là niềm tự hào của nó, cũng là người đã tạo ra phân tích cơ học; Ý tôi là Euler." [11] Ông đã xây dựng lý thuyết về chuyển động quay của một vật quanh một điểm cố định, thiết lập các phương trình tổng quát về chuyển động của một vật tự do và phương trình tổng quát của thủy động lực học. Anh ấy đã giải được vô số và đủ loại bài toán cơ học, những vấn đề luôn nảy sinh trong đầu anh ấy. Vì vậy, khi đọc những dòng của Virgil, "Mỏ neo hạ xuống, sống tàu đang gấp gáp dừng lại," anh

không thể không hỏi chuyển động của con tàu trong trường hợp như vậy sẽ như thế nào. Cùng khoảng thời gian với Daniel Bernoulli, ông đã xuất bản *Nguyên tắc bảo tồn Khu vực* và bảo vệ nguyên tắc "tác động tối thiểu nhất" nâng cao của Maupertius. Ông cũng viết về thủy triều và âm thanh.

Thiên văn học nhờ có Euler phương pháp biến thiên của các hằng số tùy ý . Bằng cách đó, ông đã tấn công vấn đề nhiễu loạn, giải thích, trong trường hợp có hai hành tinh, các biến thể lâu dài của độ lệch tâm, các nút, v.v. Ông là một trong những người đầu tiên tiếp thu thành công lý thuyết về chuyển động của mặt trăng bằng cách đưa ra các giải pháp gần đúng cho "bài toán ba vật thể." Ông đã đặt cơ sở vững chắc cho việc tính toán các bảng của mặt trăng. Những nghiên cứu về chuyển động của mặt trăng, đã giành được hai giải thưởng, được thực hiện trong khi ông bị mù, với sự hỗ trợ của các con trai và hai học trò của ông.

Hầu hết các hồi ký của ông được chứa trong các giao dịch của Viện Hàn lâm Khoa học tại St. Petersburg, và trong các giao dịch của Học viện tại Berlin. Từ năm 1728 đến năm 1783, một phần lớn các giao dịch của Petropolitan được lấp đầy bởi các bài viết của ông. Ông đã cam kết cung cấp cho Học viện Petersburg đủ số lượng hồi ký để làm phong phú thêm các hoạt động của nó trong hai mươi năm—một lời hứa còn hơn cả sự thực hiện, vì cho đến năm 1818, các tập thường chứa một hoặc nhiều bài báo của ông. Người ta nói rằng một ấn bản các tác phẩm hoàn chỉnh của Euler sẽ có giá 16.000 đô la trang quarto. Phương thức làm việc của anh ấy trước tiên là tập trung quyền lực của mình vào một vấn đề đặc biệt, sau đó giải quyết riêng rẽ tất cả các vấn đề phát sinh từ vấn đề đầu tiên. Không ai giỏi hơn anh ta về sự khéo léo trong việc áp dụng các phương pháp cho những vấn đề đặc biệt. Dễ thấy rằng các nhà toán học không thể tiếp tục thói quen viết và xuất bản của Euler được lâu. Vật liệu này sẽ sớm phát triển đến mức không thể quản lý được. Chúng ta không ngạc nhiên khi thấy điều gần như ngược lại ở Lagrange, người kế

nhiệm vĩ đại của ông. Người Pháp vĩ đại thích cái chung và cái trừu tượng, hơn là, giống như Euler, cái đặc biệt và cụ thể. Các bài viết của ông cô đọng và tóm tắt những gì Euler thuật lại với độ dài lớn.

Jean-le-Rond D'Alembert (1717–1783) bị lộ khi một đứa trẻ sơ sinh, với mẹ của anh ấy trong một khu chợ cạnh nhà thờ St. Jean-le-Rond, gần Nôtre-Dame ở Paris, từ đó anh ấy lấy tên Cơ đốc giáo của mình. Anh ấy được nuôi dưỡng bởi vợ của một người thợ lắp kính nghèo. Người ta kể rằng khi anh ta bắt đầu bộc lộ tài năng lớn, mẹ anh ta đã cho gọi anh ta đến, nhưng nhận được câu trả lời: "Cô chỉ là mẹ kế của tôi, vợ của người thợ lắp kính là mẹ tôi." ' Cha ông cung cấp cho ông một khoản thu nhập hàng năm. D'Alembert bắt đầu học luật, nhưng đó là tình yêu của ông dành cho toán học, ngành luật đó đã sớm bị từ bỏ. Ở tuổi 24, danh tiếng của ông là một nhà toán học bảo đảm cho ông nhập học đến Viện hàn lâm Khoa học. Năm 1743 xuất hiện *Traité de dynamique* của ông, được thành lập dựa trên nguyên tắc chung quan trọng mang tên ông: Lực gây ấn tượng tương đương với lực tác dụng. Nguyên lý của D'Alembert dường như đã đã được Fontaine công nhận trước ông, và ở một mức độ nào đó được John Bernoulli và Newton công nhận. D'Alembert đã cho nó một dạng toán học rõ ràng và tạo ra nhiều ứng dụng của nó. Nó cho phép các quy luật chuyển động và lý luận tùy thuộc vào chúng để được biểu diễn ở dạng tổng quát nhất, bằng ngôn ngữ phân tích. D'Alembert đã áp dụng nó vào năm 1744 trong chuyên luận về trạng thái cân bằng và chuyển động của chất lỏng, vào năm 1746 cho chuyên luận về nguyên nhân chung của gió, đã nhận được giải thưởng từ Học viện Berlin. Trong cả hai chuyên luận này, cũng như trong một năm 1747, thảo luận về vấn đề nổi tiếng của các hợp âm dao động, ông đã dẫn đến các phương trình đạo hàm riêng. Ông là , người đi đầu trong số những người tiên phong trong việc nghiên cứu các phương trình như vậy. Đối với phương trình $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, nảy sinh trong bài toán dao động hợp âm, ông đã đưa ra như là giải

pháp chung,

$$y = f(x+at) + \phi(x-at),$$

và chỉ ra rằng chỉ có một hàm tùy ý, nếu y được cho là triệt tiêu với $x = 0$ và $x = l$. Daniel Bernoulli, bắt đầu với một tích phân cụ thể do Brook Taylor đưa ra, đã chỉ ra rằng phương trình vi phân này thỏa mãn bởi chuỗi lượng giác

$$y = \alpha \sin\frac{\pi x}{l} \cdot \cos\frac{\pi t}{l} + \beta \sin\frac{2\pi x}{l} \cdot \cos\frac{2\pi t}{l} + \cdots,$$

và tuyên bố biểu thức này là giải pháp chung nhất. Euler phủ nhận tính tổng quát của nó, trên cơ sở rằng, nếu đúng, thì kết luận đáng ngờ sẽ theo sau là chuỗi trên đại diện cho bất kỳ hàm tùy ý nào của một biến. Những nghi ngờ này đã bị Fourier xua tan. Lagrange tiếp tục tìm tổng của chuỗi trên, nhưng D'Alembert đã phản đối đúng quy trình của mình, với lý do nó liên quan đến chuỗi phân kỳ. [46]

Một kết quả tuyệt vời nhất mà D'Alembert đạt được, với sự trợ giúp của nguyên tắc của ông, là lời giải trọn vẹn cho bài toán tuế sai của các điểm phân, vốn đã làm khó tài năng của những bộ óc giỏi nhất. Ông đã gửi đến Học viện Pháp vào năm 1747, cùng ngày với Clairaut, một lời giải cho bài toán ba vật thể. Điều này đã trở thành một câu hỏi được các nhà toán học quan tâm, trong đó mỗi người cạnh tranh để vượt qua tất cả những người khác. Bài toán hai vật, đòi hỏi xác định chuyển động của chúng khi chúng hút nhau với những lực tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách giữa chúng, đã được Newton giải quyết triệt để. "Bài toán ba vật" yêu cầu chuyển động của ba vật hút lẫn nhau theo định luật vạn vật hấp dẫn. Cho đến nay, giải pháp hoàn chỉnh cho vấn đề này đã vượt qua khả năng phân tích. Các phương trình vi phân tổng quát của chuyển động được Laplace phát biểu, nhưng khó khăn nảy sinh trong tích phân của chúng. "các giải pháp" được đưa ra cho đến nay chỉ là các phương pháp gần đúng thuận tiện trong các trường hợp đặc biệt khi một vật thể là mặt trời, làm xáo trộn chuyển động của mặt trăng quanh trái

đất hoặc khi một hành tinh di chuyển dưới ảnh hưởng của mặt trời và một hành tinh khác.

Trong cuộc thảo luận về ý nghĩa của đại lượng âm của các quá trình cơ bản của phép tính, và của lý thuyết xác suất, D'Alembert đã chú ý đến triết học toán học. Những lời chỉ trích của anh ấy không phải lúc nào cũng vui vẻ. Năm 1754, ông được bổ nhiệm làm thư ký thường trực của Học viện Pháp. Trong những năm cuối đời, ông chủ yếu bận rộn với bộ bách khoa toàn thư vĩ đại của Pháp, do Diderot và chính ông bắt đầu. D'Alembert đã từ chối, vào năm 1762, lời mời của Catharine II. để đảm nhận việc giáo dục con trai mình. Frederick the Great ép anh ta đến Berlin. Anh ta đã đến thăm, nhưng từ chối nơi thường trú ở đó.

Alexis Claude Clairaut (1713–1765) là một thần đồng thời trẻ. Ông đã đọc các tác phẩm của l'Hospital về giải tích vô cực và về mặt cắt hình nón khi mới 10 tuổi. báo chí khi ông mười sáu tuổi. Đó là một tác phẩm có vẻ đẹp xuất sắc và giúp ông được nhận vào Học viện Khoa học khi vẫn chưa đủ tuổi hợp pháp. Năm 1731, ông đưa ra bằng chứng về định lý được phát biểu bởi Newton, rằng mọi khối lập phương là hình chiếu của một trong năm parabol phân kỳ. Clairaut đã làm quen với của Maupertius, người mà ông đã đi cùng trong một chuyến thám hiểm đến Lapland để đo độ dài của kinh tuyến. Vào thời điểm đó, hình dạng của trái đất là một chủ đề gây bất đồng nghiêm trọng. Newton và Huygens đã kết luận từ lý thuyết rằng trái đất bị san phẳng ở hai cực. Khoảng 17 13 Dominico Cassini đã đo một vòng cung kéo dài từ Dunkirk đến Perpignan và thu được kết quả đáng kinh ngạc là trái đất dài ra ở hai cực. Để quyết định giữa các ý kiến trái chiều, các phép đo đã được đổi mới. Maupertius đã giành được danh hiệu "người làm phẳng trái đất" nhờ công trình nghiên cứu của mình ở Lapland bằng cách bác bỏ nguyên lý của người Cassinian rằng trái đất bị kéo dài ở hai cực, và chứng minh rằng Newton đã đúng. Khi trở về, năm 1743, Clairaut xuất bản tác phẩm *Théorie de la figure de la Terre*, dựa trên kết quả

của Maclaurin về các ellipsoid đồng nhất. Nó chứa một định lý đáng chú ý, được đặt theo tên của Clairaut, rằng tổng các phân số biểu thị tính elip và độ tăng của lực hấp dẫn ở cực bằng $2\frac{1}{2}$ nhân với phân số biểu thị lực ly tâm ở cực đường xích đạo, đơn vị lực được biểu diễn bằng lực hấp dẫn tại đường xích đạo. Định lý này độc lập với bất kỳ giả thuyết nào liên quan đến quy luật mật độ của các tầng tiếp theo của trái đất. Nó thể hiện hầu hết các nghiên cứu của Clairaut. Todhunter nói rằng " trong hình vẽ trái đất, không có người nào khác đạt được nhiều thành tựu như Clairaut, và chủ thể hiện nay về cơ bản vẫn như khi ông rời bỏ nó, mặc dù hình thức đã khác. Phân tích tuyệt vời mà Laplace cung cấp, tô điểm nhưng không thực sự làm thay đổi lý thuyết bắt đầu từ bàn tay sáng tạo của Clairaut."

Năm 1752, ông đã giành được giải thưởng của Học viện St. Petersburg cho bài báo về *Théorie de la Lune*, trong đó lần đầu tiên phân tích hiện đại được áp dụng cho chuyển động của mặt trăng. Điều này chứa đựng lời giải thích về chuyển động của các mặt trăng. Chuyển động này, mà Newton không giải thích được, thoạt đầu đối với ông dường như không thể giải thích được bằng định luật Newton, và ông đang trên đà đưa ra một giả thuyết mới về lực hấp dẫn, khi, lấy biện pháp phòng ngừa để thực hiện phép tính của mình ở mức độ gần đúng cao hơn, ông đã đạt được kết quả phù hợp với quan sát. Chuyển động của mặt trăng được nghiên cứu cùng thời gian bởi Euler và D'Alembert. Clairaut dự đoán rằng "Sao chổi Halley", sau đó dự kiến sẽ quay trở lại, sẽ đến điểm gần nhất của mặt trời vào ngày 13 tháng 4 năm 1759, một ngày hóa ra là quá muộn một tháng. Ông là người đầu tiên phát hiện nghiệm kỳ dị trong phương trình vi phân cấp một nhưng cấp cao hơn cấp một.

Trong các công việc khoa học của họ, giữa Clairaut và D'Alembert có sự kình địch lớn, thường không mấy thân thiện. Tham vọng ngày càng lớn của Clairaut để tỏa sáng trong xã hội, nơi ông được rất được yêu thích, đã cản trở công việc khoa học của ông trong phần sau của cuộc đời.

Johann Heinrich Lambert (1728–1777), sinh ra tại Mühlhausen ở Alsace, là con trai của một thợ may nghèo. Trong khi làm việc tại cửa hàng của cha mình, ông đã mua lại thông qua những nỗ lực tự nguyện của mình để có kiến thức về toán học cơ bản. Ở tuổi ba mươi, ông trở thành gia sư trong một gia đình Thụy Sĩ và có được thời gian nhàn rỗi để tiếp tục việc học của mình. Trong chuyến du lịch cùng các học trò của mình qua châu Âu, ông đã làm quen với các nhà toán học hàng đầu. Năm 1764, ông định cư ở Berlin, nơi ông trở thành thành viên của Học viện, và tận hưởng xã hội của Euler và Lagrange. Ông nhận được một khoản trợ cấp nhỏ, và sau đó trở thành biên tập viên của Berlin *Ephemeris*. Sự uyên bác về nhiều mặt của ông khiến người ta nhớ đến Leibniz. Trong *Những bức thư về vũ trụ* của mình, ông đã đưa ra một số lời tiên tri đáng chú ý về hệ sao. Trong toán học, ông đã thực hiện một số khám phá đã được mở rộng và làm lu mờ bởi những người đương thời vĩ đại của ông. Nghiên cứu đầu tiên của ông về toán học thuần túy dev bỏ qua trong một chuỗi vô hạn là nghiệm x của phương trình $x^m + px = q$. Vì mỗi phương trình dạng $ax^r + bx^s = d$ có thể rút gọn thành $x^m + px = q$ theo hai cách, nên một trong hai chuỗi kết quả luôn được tìm thấy là hội tụ, và để đưa ra một giá trị x. Các kết quả của Lambert đã kích thích Euler, người đã mở rộng phương pháp này thành một phương trình có bốn số hạng, và đặc biệt là Lagrange, người đã tìm ra rằng hàm một nghiệm của $a - x + \phi(x) = 0$ có thể biểu diễn bằng dãy số mang tên ông. Năm 1761, Lambert gửi cho Học viện Berlin một cuốn hồi ký, trong đó ông chứng minh rằng π là phi lý. Bằng chứng này được đưa ra trong Lưu ý IV. của *Géometrie* của Legendre, trong đó được mở rộng thành π^2. Chúng ta mang ơn thiên tài của Lambert vì đã giới thiệu về lượng giác của các hàm hyperbolic, mà ông được chỉ định bởi *sinh x*, *cosh x*, v.v. *Freye Perspective* của ông, 1759 và 1773, bao gồm các nghiên cứu về hình học mô tả, và mang lại cho ông vinh dự là tiền thân của Monge. Trong nỗ lực đơn giản hóa việc tính toán quỹ đạo của sao chổi, về mặt hình học, ông đã dẫn đến một số định

lý đáng chú ý về đường conic, chẳng hạn như sau: “Nếu trong hai hình elip có trục chính chung, chúng ta lấy hai các cung sao cho dây cung của chúng bằng nhau và tổng của các vectơ bán kính, được vẽ tương ứng từ các tiêu điểm đến các điểm cực trị của các cung này, bằng nhau, khi đó các cung được tạo thành trong mỗi hình elip bởi cung và hai bán kính các vectơ đối với nhau dưới dạng căn bậc hai của các tham số của hình elip.” [13]

John Landen (1719–1790) là một nhà toán học người Anh, người có các bài viết là điểm khởi đầu cho các nghiên cứu của Euler, Lagrange và Legendre. Khám phá cơ bản của Landen, có trong một cuốn hồi ký năm 1755, là mọi cung của hyperbola đều được nắn ngay lập tức bằng hai cung của một hình elip. Trong “phân tích phần dư” của mình, ông đã cố gắng loại bỏ những khó khăn siêu hình của dòng chảy bằng cách áp dụng một phương pháp đại số thuần túy. *Calcul des Fonctions* của Lagrange được dựa trên ý tưởng này. Landen đã chỉ ra cách biểu thức đại số cho nghiệm của một phương trình bậc ba có thể được suy ra bằng cách áp dụng phép tính vi phân và tích phân. Hầu hết thời gian của nhà văn gợi ý này được dành cho việc theo đuổi cuộc sống năng động.

Étienne Bézout (1730–1783) là một nhà văn người Pháp chuyên viết sách dạy toán nổi tiếng. Trong *Théorie générale des Équations Algébriques*, 1779, ông đã đưa ra phương pháp khử bằng phương trình tuyến tính (cũng do Euler phát minh ra). Phương pháp này được ông xuất bản lần đầu trong một hồi ký năm 1764, trong đó ông sử dụng các định thức mà không tham gia vào lý thuyết của chúng. Một định lý hay về bậc của kết quả mang tên ông.

Louis Arbogaste (1759–1803) ở Alsace là giáo sư toán học tại Strasburg. Tác phẩm chính của ông, *Calcul des Dérivations*, 1800, đưa ra phương pháp mang tên ông, theo đó các hệ số liên tiếp của một khai triển được suy ra từ nhau khi biểu thức phức tạp. De Morgan đã chỉ ra rằng bản chất thực sự của đạo hàm là sự khác

biệt đi kèm với sự tích hợp. Trong cuốn sách này, lần đầu tiên các biểu tượng của hoạt động được tách ra khỏi các biểu tượng của số lượng. Ký hiệu $D_x y$ cho dy/dx là do anh ấy.

Maria Gaetana Agnesi (1718–1799) ở Milan, nổi tiếng là một nhà ngôn ngữ học, toán học và triết học, đã ngồi vào ghế toán học tại Đại học Bologna trong thời gian cha cô bị bệnh. Năm 1748, bà xuất bản *Instituzioni Analitiche*, được dịch sang tiếng Anh năm 1801. "phù thủy Agnesi" hoặc "versiera" là một đường cong phẳng chứa một đường thẳng, $x = 0$, và một khối $\left(\frac{y}{c}\right)^2 + 1 = \frac{c}{x}$.

Joseph Louis Lagrange (1736–1813), một trong những nhà toán học vĩ đại nhất mọi thời đại, sinh ra tại Turin và mất tại Paris. Ông là người gốc Pháp. Cha của ông, người đã phụ trách ngân hàng quân đội Sardinia, từng rất giàu có, nhưng đã đánh mất tất cả những gì ông có trong đầu cơ. Lagrange coi sự mất mát này là vận may của mình, vì nếu không, ông có thể đã không biến toán học thành mục tiêu theo đuổi của đời mình. Trong khi ở đại học ở Turin, thiên tài của anh ấy không ngay lập tức bị bẻ cong thực sự. Lúc đầu, Cicero và Virgil thu hút anh ấy nhiều hơn Archimedes và Newton. Anh ấy sớm bắt đầu ngưỡng mộ hình học của những người cổ đại, nhưng việc nghiên cứu một đoạn đường của Halley đã khơi dậy sự nhiệt tình của anh ấy đối với phương pháp phân tích trong quá trình phát triển mà ông đã được định sẵn để gặt hái vinh quang bất diệt. Giờ đây, ông đã chuyên tâm vào toán học, và vào năm thứ mười bảy, ông trở thành giáo sư toán học tại học viện quân sự hoàng gia ở Turin. Không cần sự trợ giúp hay hướng dẫn anh nhập đã theo một khóa học mà trong hai năm đã đặt anh ta ngang hàng với những người vĩ đại nhất cùng thời với anh ta. Với sự giúp đỡ của các học trò của mình, ông đã thành lập một hội mà sau đó phát triển thành Học viện Turin. Trong năm tập đầu tiên của các giao dịch của nó xuất hiện hầu hết các bài báo trước đó của ông. Ở tuổi mười chín, anh ấy đã truyền đạt cho Euler một phương pháp chung để xử lý

"các bài toán đẳng lượng", hiện được gọi là Giải tích. Điều này nhận được sự ngưỡng mộ sôi nổi của Euler, và ông đã lịch sự giữ lại một thời gian không công bố một số nghiên cứu của riêng mình về chủ đề này, để Lagrange trẻ tuổi có thể hoàn thành các cuộc điều tra *của mình* và yêu cầu phát minh. Lagrange đã làm khá nhiều như Euler đối với việc tạo ra Phép tính biến thiên. Vì nó đến từ Euler nên nó thiếu nền tảng giải tích, và Lagrange này đã cung cấp. Ông đã tách các nguyên tắc của phép tính này ra khỏi các phép tính hình học mà nhờ đó người tiền nhiệm của ông đã suy ra chúng. Euler đã giả sử các giới hạn của tích phân là cố định, tức là các điểm cực trị của đường cong được xác định, nhưng Lagrange đã loại bỏ hạn chế này và cho phép tất cả các tọa độ của đường cong thay đổi cùng một lúc. Euler đã giới thiệu vào năm 1766 có tên "phép tính biến thiên" và đã làm được nhiều điều để cải thiện ngành khoa học này theo những đường lối do Lagrange vạch ra.

Một chủ đề khác thu hút sự chú ý của Lagrange tại Turin là sự lan truyền âm thanh. Trong các bài báo về chủ đề này trên *Miscellanea Taurinensia*, nhà toán học trẻ xuất hiện với tư cách là người chỉ trích Newton, và là người phân xử giữa Euler và D'Alembert. Bằng cách chỉ xem xét các hạt nằm trên một đường thẳng, ông đã đưa bài toán về cùng một phương trình đạo hàm riêng biểu diễn chuyển động của dao động dây. Tích phân tổng quát của tích phân này đã được tìm thấy bởi D'Alembert chứa hai hàm tùy ý, và câu hỏi hiện được đưa ra để thảo luận liệu một hàm tùy ý có thể được không liên tục. D'Alembert duy trì quan điểm phủ định chống lại Euler, Daniel Bernoulli, và cuối cùng là Lagrange,—lập luận rằng để xác định vị trí của một điểm trên dây cung tại một thời điểm t, vị trí ban đầu của hợp âm phải liên tục. Lagrange đã giải quyết câu hỏi bằng câu khẳng định.

Bằng cách liên tục áp dụng trong suốt chín năm, Lagrange, ở tuổi hai mươi sáu, đã đứng trên đỉnh cao danh vọng châu Âu. Nhưng những nghiên cứu căng thẳng của anh ấy đã làm suy yếu nghiêm

trọng một thể chất không bao giờ khỏe mạnh, và mặc dù các bác sĩ của anh ấy đã khiến anh ấy nghỉ ngơi và tập thể dục, hệ thống thần kinh của anh ấy không bao giờ hồi phục hoàn toàn và từ đó trở đi anh ấy dễ bị u sầu.

Năm 1764, Viện hàn lâm Pháp đã đề xuất lý thuyết về sự cân bằng của mặt trăng như một chủ đề của giải thưởng. Nó đòi hỏi một lời giải thích, theo nguyên tắc vạn vật hấp dẫn, tại sao mặt trăng luôn quay cùng một mặt với trái đất, nhưng với những thay đổi nhỏ, nhưng có chút thay đổi. Lagrange đã giành được giải thưởng. Thành công này đã khuyến khích Viện Hàn lâm đề xuất giải thưởng là lý thuyết về bốn vệ tinh của Sao Mộc,—một bài toán về sáu vật thể, khó hơn bài toán trong ba vật thể mà Clairaut, D'Alembert và Euler đã giải trước đó. Lagrange đã vượt qua những khó khăn, nhưng thời gian eo hẹp không cho phép ông khai thác hết chủ đề. 24 năm sau nó được hoàn thành bởi Laplace. Các nghiên cứu thiên văn sau này của Lagrange là về nhiễu loạn sao chổi (1778 và 1783), về bài toán Kepler và về một phương pháp mới để giải bài toán của ba cơ thể.

Nóng lòng làm quen với các nhà toán học hàng đầu, Lagrange đến thăm Paris, nơi ông tận hưởng niềm vui kích thích khi trò chuyện với Clairaut, D'Alembert, Condorcet, Abbé Marie và những người khác. Anh ấy đã lên kế hoạch đến thăm London, nhưng anh ấy bị ốm nặng sau bữa tối ở Paris, và buộc phải quay trở lại Turin. Năm 1766, Euler rời Berlin đến St. Petersburg, và ông chỉ ra Lagrange là người duy nhất có khả năng lấp đầy chỗ này. D'Alembert đồng thời tiến cử anh ta. Frederick Đại đế sau đó đã gửi một thông điệp tới Turin, bày tỏ mong muốn của "vị vua vĩ đại nhất châu Âu" để có "nhà toán học vĩ đại nhất" tại triều đình của mình. Lagrange đã đến Berlin, và ở yên ở đó hai mươi năm. Thấy đồng nghiệp nào cũng có vợ, được vợ họ yên tâm rằng chỉ có hôn nhân là hạnh phúc, anh cưới. Công đoàn không phải là một hạnh phúc. Vợ ông sớm qua đời. Frederick Đại đế rất kính trọng ông và thường trò chuyện với ông về những lợi ích của cuộc sống đều đặn hoàn hảo. Điều này khiến

Lagrange nuôi dưỡng những thói quen thường xuyên. Anh ấy làm việc không lâu hơn mỗi ngày vì kinh nghiệm đã dạy anh ấy rằng anh ấy có thể làm việc mà không bị suy sụp. Các bài báo của anh ấy đã được suy nghĩ cẩn thận trước khi anh ấy bắt đầu viết, và khi anh ấy viết, anh ấy đã làm như vậy mà không cần sửa chữa một lần nào.

Trong hai mươi năm ở Berlin, ông đã viết hồi ký cho các giao dịch của Học viện Berlin, đồng thời viết tác phẩm mang tính thời đại có tên *Mécanique Analytique*. Ông đã làm phong phú thêm môn đại số bằng những nghiên cứu về nghiệm của phương trình. Có hai phương pháp giải phương trình đại số trực tiếp,—phương pháp thế và phương pháp tổ hợp. Phương pháp trước đây được phát triển bởi Ferrari, Vieta, Tchirnhausen, Euler, Bézout và Lagrange; cái sau của Vandermonde và Lagrange. [20] Trong phương pháp của thay thế các dạng ban đầu được biến đổi đến mức việc xác định gốc được thực hiện phụ thuộc vào các chức năng đơn giản hơn (dung môi). Trong phương pháp kết hợp, các đại lượng phụ trợ được thay thế cho một số tổ hợp đơn giản nhất định ("loại") của các nghiệm chưa biết của phương trình và các phương trình phụ trợ (dung môi) thu được cho các đại lượng này với sự trợ giúp của các hệ số của phương trình đã cho. Lagrange truy tìm tất cả các nghiệm đại số đã biết của các phương trình theo nguyên tắc đồng nhất bao gồm việc hình thành và giải các phương trình cấp thấp hơn có nghiệm là các hàm tuyến tính của nghiệm cần thiết và nghiệm của nghiệm đơn vị. Ông đã chỉ ra rằng ngũ phân tử không thể giảm theo cách này, độ phân giải của nó là bậc sáu. Các nghiên cứu của ông về lý thuyết phương trình được tiếp tục sau khi ông rời Berlin. Trong *Résolution des équations numériques* (1798), ông đã đưa ra phương pháp tính gần đúng nghiệm thực của phương trình số bằng phân số liên tục. Trong số những thứ khác, nó cũng chứa một bằng chứng rằng mọi phương trình phải có nghiệm,—một định lý xuất hiện trước đó đã được coi là hiển nhiên. Argand, Gauss và Cauchy đã đưa ra những bằng chứng khác về điều này. Trong ghi chú cho công trình trên, Lagrange sử

dụng định lý Fermat và một số gợi ý của Gauss trong việc thực hiện một nghiệm đại số đầy đủ của bất kỳ phương trình nhị thức nào.

Trong khi ở Berlin, Lagrange đã xuất bản một số bài báo về lý thuyết số. Vào khoảng năm 1769, ông đã đưa ra một nghiệm số nguyên của phương trình bất định cấp hai, tương tự như phương pháp tuần hoàn của Hindu; ông là người đầu tiên chứng minh, vào năm 1771, "Định lý Wilson", được phát biểu bởi một người Anh, John Wilson, và được Waring xuất bản lần đầu trong *Meditationes Algebraic của ông ae* ông đã điều tra vào năm 1775 với những điều kiện nào ±2 and ±5 (−1 and ±3 đã được thảo luận bởi Euler) là dư lượng bậc hai hoặc không dư lượng của số nguyên tố lẻ, q; ông đã chứng minh vào định lý Méziriac vào năm 1770 rằng mọi số nguyên bằng tổng của bốn hoặc một số ít hơn của các bình phương. Ông đã chứng minh định lý Fermat trên $x^n + y^n = z^n$, cho trường hợp $n = 4$, cũng như định lý Fermat rằng, nếu $a^2 + b^2 = c^2$, thì ab không phải là hình vuông.

Trong hồi ký của ông về Kim tự tháp, năm 1773, Lagrange đã sử dụng đáng kể các định thức bậc ba, và chứng minh rằng bình phương của một định thức chính nó là một định thức. Tuy nhiên, ông không bao giờ giải quyết một cách rõ ràng và trực tiếp với các yếu tố quyết định; anh ta chỉ đơn giản là có được những đặc điểm tình cờ mà ngày nay được công nhận là mối quan hệ giữa các yếu tố quyết định.

Lagrange đã viết nhiều về phương trình vi phân. Mặc dù là chủ đề được các nhà toán học vĩ đại nhất (Euler, D'Alembert, Clairaut, Lagrange, Laplace) nghiên cứu, nhưng so với các ngành toán học khác đã chống lại việc áp dụng có hệ thống các phương pháp và nguyên tắc cố định. Lagrange đã thiết lập các tiêu chí cho các nghiệm đơn lẻ (*Calcul des Fonctions*, Bài học 14–17), tuy nhiên, các tiêu chí này đều sai. Ông là người đầu tiên chỉ ra ý nghĩa hình học của các giải pháp như vậy. Ông đã khái quát hóa các nghiên cứu

của Euler về phương trình vi phân tổng hai biến, cấp chín; ông đã đưa ra nghiệm của phương trình đạo hàm riêng cấp một (*Hồi ký Berlin*, 1772 và 1774), đồng thời nói về nghiệm kỳ dị của chúng, mở rộng nghiệm của chúng trong *Hồi ức* năm 1779 và 1785 cho bất kỳ phương trình nào của các biến. Cuộc thảo luận về các phương trình đạo hàm riêng cấp hai, do D'Alembert, Euler và Lagrange thực hiện, đã được nhắc đến trong tài khoản của chúng tôi về D'Alembert.

Khi ở Berlin, Lagrange đã viết "*Mécanique Analytique*", tác phẩm vĩ đại nhất của ông (Paris, 1788). Từ nguyên lý vận tốc ảo, ông đã suy luận ra, với sự trợ giúp của phép tính các biến thể, toàn bộ hệ thống cơ học một cách trang nhã và hài hòa đến mức nó có thể được gọi một cách thích hợp là Ngài William Rowan Hamilton, "một loại thơ khoa học." Đó là một ví dụ hoàn hảo nhất về tính tổng quát phân tích. Số liệu hình học không nơi nào được phép. "On ne trouvera point de figures dans cet ouvrage" (Lời nói đầu). Hai bộ phận của cơ học—tĩnh học và động lực học—nằm trong bốn phần đầu tiên của mỗi phần được thực hiện tương tự nhau và mỗi phần được mở đầu bằng một bản phác thảo lịch sử về các nguyên tắc. Lagrange đã xây dựng nguyên tắc tác dụng tối thiểu. Ở dạng ban đầu, các phương trình chuyển động liên quan đến tọa độ x, y, z, của các hạt khác nhau m hoặc dm của hệ. Nhưng x, y, z, nói chung là không độc lập, và Lagrange đưa vào thay cho chúng bất kỳ biến nào ξ, ψ, ϕ, sao cũng được, xác định vị trí của điểm tại thời điểm đó. Đây có thể được coi là độc lập. Các phương trình chuyển động bây giờ có thể có dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} + \Xi = 0;$$

hoặc khi Ξ, Ψ, Φ,... là các hệ số vi phân riêng đối với ξ, ψ, ϕ,... của một và cùng chức năng V, thì dạng

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\xi'} - \frac{dT}{d\xi} + \frac{dV}{d\xi} = 0.$$

Cái sau là *xuất sắc* dạng Lagrangian của phương trình chuyển động. Với Lagrange bắt nguồn từ nhận xét rằng cơ học có thể được

coi là hình học bốn chiều. Đối với ông, vinh dự được giới thiệu thế năng vào động lực học. [49] Lagrange rất nóng lòng muốn xuất bản *Mécanique Analytique* của mình tại Paris. Tác phẩm đã sẵn sàng để in vào năm 1786, nhưng mãi đến năm 1788, ông mới tìm được nhà xuất bản, và sau đó chỉ với điều kiện là sau vài năm, ông phải mua tất cả các bản chưa bán được. Tác phẩm được chỉnh sửa bởi Legendre.

Sau cái chết của Frederick Đại đế, các nhà khoa học không còn được kính trọng ở Đức nữa, và Lagrange đã nhận lời mời của Louis-XVI. để di cư đến Paris. Nữ hoàng Pháp đối xử với anh ta một cách tôn trọng, và người ta đã chuẩn bị chỗ ở cho anh ta ở Louvre. Nhưng anh ta bị chiếm giữ bởi một cơn u sầu kéo dài đã phá hủy sở thích toán học của anh ta. Trong hai năm, bản in cuốn *Mécanique* của ông, mới xuất bản,—tác phẩm của một phần tư thế kỷ,—chưa mở trên bàn làm việc của ông. Thông qua Lavoisier, ông bắt đầu quan tâm đến hóa học, thứ mà ông thấy "dễ như đại số". Cuộc khủng hoảng thảm khốc của Cách mạng Pháp đã khơi dậy ông hoạt động trở lại. Vào khoảng thời gian này, cô con gái trẻ và thành đạt của nhà thiên văn học Lemonnier đã cảm thương cho Lagrange buồn bã, cô đơn và nhất quyết muốn kết hôn với anh ta. Sự tận tụy của cô dành cho anh tạo nên sợi dây ràng buộc duy nhất với cuộc sống mà khi cái chết cận kề, anh thấy khó có thể cắt đứt.

Ông được bổ nhiệm làm một trong những ủy viên thiết lập trọng lượng và thước đo có các đơn vị được thành lập dựa trên tự nhiên. Lagrange rất ủng hộ phép chia nhỏ số thập phân, ý tưởng chung của nó được lấy từ một tác phẩm của Thomas Williams, London, 1788. Đó là tính cách tiết chế của Lagrange, và sự kính trọng phổ quát dành cho ông như vậy nên ông đã được giữ lại với tư cách là chủ tịch của ủy ban về trọng lượng và đo lường ngay cả sau khi nó đã được *thanh lọc* bởi những người Jacobins bằng cách gạch bỏ tên của Lavoisier, Laplace và những người khác. Lagrange lo lắng về số phận của Lavoisier, và dự định quay trở lại Berlin, nhưng khi *École*

Normale được thành lập vào năm 1795 ở Paris, ông đã được khuyến khích nhận chức giáo sư. Ông vừa có thời gian để giải thích cơ sở của số học và đại số cho các học sinh nhỏ tuổi thì trường học đã đóng cửa. Bổ sung của ông để đại số của Euler đã được chuẩn bị tại thời điểm này. Năm 1797 *École Polytechnique* được thành lập, với Lagrange là một trong những giáo sư. Chiến thắng sớm nhất của tổ chức này là khôi phục Lagrange về giải tích. Hoạt động toán học của anh bùng nổ trở lại. Ông đã đưa ra *Théorie des fonctions analytiques* (1797), *Leçons sur le calcul des fonctions*, một chuyên luận cùng dòng với phần trước (1801), và *Résolution des équations numériques* (1798). Năm 1810, ông bắt đầu sửa đổi kỹ lưỡng *Mécanique analysis* của mình, nhưng ông qua đời trước khi hoàn thành.

Théorie des fonctions, mầm mống của nó được tìm thấy trong một cuốn hồi ký của ông năm 1772, nhằm mục đích đặt các nguyên tắc của phép tính trên một nền tảng vững chắc bằng cách giải tỏa tâm trí khỏi khái niệm khó khăn về giới hạn hoặc vô cùng nhỏ. Phép tính dư của John Landen, tuyên bố một đối tượng tương tự, không được biết đến với anh ta. Lagrange đã cố gắng chứng minh định lý Taylor (lũy thừa của mà ông là người đầu tiên chỉ ra) bằng đại số đơn giản, và sau đó phát triển toàn bộ phép tính từ định lý đó. Các nguyên tắc của phép tính vào thời của ông liên quan đến những khó khăn triết học có tính chất nghiêm trọng. Những điều vô cùng nhỏ của Leibniz không có cơ sở siêu hình thỏa đáng. Trong phép tính vi phân của Euler, chúng được coi là các số không tuyệt đối . Trong tỷ lệ giới hạn của Newton, không thể tìm thấy độ lớn của nó là tỷ lệ, vì tại thời điểm mà chúng nên được bắt và cân bằng, không có cung hay dây cung. Hợp âm và cung không được Newton coi là bằng nhau trước khi biến mất, cũng như sau khi biến mất, nhưng *khi* chúng biến mất. "Phương pháp đó," Lagrange nói, "có một bất tiện lớn là xem xét các đại lượng ở trạng thái mà ở đó chúng dừng lại, có thể nói, là các đại lượng; vì mặc dù chúng ta luôn có thể hình dung rõ ràng về tỷ số của hai đại lượng, miễn là chúng vẫn còn hữu

hạn, thì tỷ số đó không mang lại cho tâm trí một ý tưởng rõ ràng và chính xác nào, ngay khi các số hạng của nó đồng thời trở thành hư vô.” D’Alembert’s phương pháp giới hạn gần giống với phương pháp về tỷ số nguyên tố và cơ bản. D’Alembert đã dạy rằng một biến số thực sự đã đạt đến giới hạn của nó.Khi Lagrange cố gắng giải phóng phép tính khỏi những khó khăn siêu hình của nó, bằng cách viện đến đại số thông thường, ông đã tránh được vòng xoáy Charybdis chỉ để chịu va đập vào những tảng đá của Scylla. do Euler tạo ra dựa trên một quan điểm sai lầm về vô hạn. Không có lý thuyết chính xác nào về chuỗi vô hạn sau đó được thiết lập. Lagrange đã đề xuất để xác định hệ số vi phân của $f(x)$ đối với x là hệ số của h trong khai triển của $f(x+h)$ theo định lý Taylor, và do đó tránh mọi tham chiếu đến giới hạn. Nhưng ông đã sử dụng các chuỗi vô hạn mà không xác định chắc chắn rằng chúng hội tụ, và bằng chứng của ông rằng $f(x+h)$ luôn có thể được khai triển thành một chuỗi lũy thừa tăng dần của h, hoạt động dưới những khiếm khuyết nghiêm trọng. Mặc dù phương pháp phát triển phép tính của Lagrange ban đầu được hoan nghênh nhiệt liệt, nhưng những khiếm khuyết của nó đã gây tử vong, và ngày nay "phương pháp đạo hàm" của ông, như nó được gọi, nói chung đã bị bỏ rơi. Anh ấy đã giới thiệu một ký hiệu của riêng mình, nhưng nó không thuận tiện và đã bị anh ấy loại bỏ trong ấn bản thứ hai của *Mécanique*, trong đó anh ấy đã sử dụng các số vô hạn. Đối tượng chính của *Théorie des fonctions* đã không đạt được, nhưng các kết quả phụ của nó lại có ảnh hưởng sâu rộng. Đó là một phương thức hoàn toàn trừu tượng về các hàm, ngoài hình học hoặc các xem xét cơ học. Trong sự phát triển tiếp theo của giải tích cao hơn, một hàm đã trở thành ý tưởng hàng đầu, và công trình của Lagrange có thể được coi là điểm khởi đầu của lý thuyết hàm do Cauchy, Riemann, Weierstrass, và những người khác phát triển.

Khi xử lý chuỗi vô hạn, Lagrange đã thể hiện trong các bài viết trước đó của mình rằng sự lỏng lẻo phổ biến đối với tất cả các nhà toán học cùng thời với ông, ngoại trừ Nicolaus Bernoulli II. và

D'Alembert. Nhưng những bài báo sau này của ông đánh dấu sự khởi đầu của một thời kỳ nghiêm ngặt hơn. Do đó, trong *Calcul de fonctions*, ông đưa ra định lý của mình về các giới hạn của định lý Taylor. toán học của Lagrange nghiên cứu mở rộng sang các chủ đề chưa được đề cập đến ở đây—chẳng hạn như xác suất, sai phân hữu hạn, phân số liên tục tăng dần , tích phân elip . Ở mọi nơi khả năng khái quát hóa và trừu tượng hóa tuyệt vời của anh ấy đều được thể hiện rõ ràng. Về mặt này, ông không có đối thủ nào sánh kịp, nhưng người cùng thời với ông, Laplace, đã vượt qua ông về sự khôn ngoan thực tế. Lagrange bằng lòng để lại việc áp dụng các kết quả chung của mình cho người khác và một số nghiên cứu quan trọng nhất của Laplace (đặc biệt là những nghiên cứu về vận tốc âm thanh và gia tốc thế tục của mặt trăng) hoàn toàn chứa trong các tác phẩm của Lagrange.

Lagrange là một người đàn ông cực kỳ khiêm tốn, muốn tránh tranh cãi, và thậm chí rụt rè trong cuộc trò chuyện. Anh ấy nói với giọng điệu nghi ngờ, và những từ đầu tiên của anh ấy thường là, "Je ne sais pas." Anh ấy sẽ không bao giờ cho phép chụp chân dung của mình, và những bức duy nhất được bảo mật đã được những người tham dự cuộc họp phác họa mà anh ấy không hề hay biết. của Viện.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) sinh ra tại Beaumont-en-Auge ở Normandy. Người ta biết rất ít về cuộc đời ban đầu của anh ấy. Khi ở đỉnh cao danh vọng, ông không muốn nói về thời niên thiếu của mình, sống trong cảnh nghèo khó. Cha ông là một nông dân nhỏ. Một số người hàng xóm giàu có nhận ra tài năng của cậu bé đã hỗ trợ cậu trong việc học hành. Là một người ngoại quốc, ông theo học trường quân sự ở Beaumont, nơi ông trở thành giáo viên dạy toán khi còn nhỏ. Năm mười tám tuổi, anh đến Paris, mang theo những lá thư giới thiệu cho D'Alembert, lúc đó đang ở đỉnh cao danh vọng. Những bức thư vẫn không được chú ý, nhưng Laplace trẻ tuổi, không nản lòng, đã viết cho nhà hình học vĩ đại một bức thư về các nguyên tắc cơ học, bức thư này đã nhận được phản hồi

nhiệt tình như sau: "Bạn không cần giới thiệu; bạn đã giới thiệu cho mình; sự hỗ trợ của tôi là do bạn." D'Alembert đã đảm bảo cho anh ấy một vị trí tại *École Militaire* của Paris với tư cách là giáo sư toán học. Giờ đây, tương lai của anh ấy đã được đảm bảo, và anh ấy đã tham gia vào những nghiên cứu sâu sắc mang lại cho anh ấy danh hiệu "Newton của nước Pháp." Với khả năng phân tích tuyệt vời, Laplace đã giải quyết các vấn đề đang chờ xử lý trong ứng dụng của định luật hấp dẫn đối với các chuyển động của thiên thể. Trong suốt mười lăm năm tiếp theo của , hầu hết những đóng góp ban đầu của ông cho thiên văn học đã xuất hiện. Sự nghiệp của ông là một trong những ngành thịnh vượng gần như không bị gián đoạn của . Năm 1784, ông kế nhiệm Bézout với tư cách là người kiểm tra pháo binh hoàng gia, và năm sau, ông trở thành thành viên của Viện Hàn lâm Khoa học. Ông được bổ nhiệm làm chủ tịch của Cục Kinh độ; ông đã hỗ trợ trong việc giới thiệu hệ thống thập phân, và dạy, với Lagrange, toán học trong *École Normale*. Khi, trong cuộc Cách mạng, đã có tiếng kêu gọi cải cách mọi thứ, kể cả lịch, Laplace đã đề xuất chấp nhận một kỷ nguyên bắt đầu từ năm 1250, khi mà theo tính toán của ông, trục chính của quỹ đạo trái đất đã vuông góc với đường xích đạo. Năm bắt đầu bằng xuân phân, và kinh tuyến 0 nằm ở phía đông Paris bằng $185,30$ độ phân chia trung điểm của góc phần tư, vì theo kinh tuyến này, thời điểm bắt đầu kỷ nguyên do ông đề xuất rơi vào lúc nửa đêm. Nhưng các nhà cách mạng bác bỏ kế hoạch này và bắt đầu kỷ nguyên mới trùng với thời điểm bắt đầu của Cộng hòa Pháp huy hoàng. [50]

Laplace được ngưỡng mộ trên khắp châu Âu như một nhà khoa học thông minh và sâu sắc nhất, nhưng thật không may cho danh tiếng của mình, ông không chỉ theo đuổi sự vĩ đại trong khoa học mà còn theo đuổi các danh hiệu chính trị. Sự nghiệp chính trị của nhà khoa học lỗi lạc này đã bị vấy bẩn bởi sự phục tùng và mềm dẻo. Sau ngày 18 của Brumaire, ngày mà Napoléon được phong làm hoàng đế, lòng nhiệt thành của Laplace đối với các nguyên tắc cộng hòa đột

nhiên nhường chỗ cho sự tận tụy to lớn đối với hoàng đế. Napoléon đã tưởng thưởng cho sự tận tâm này bằng cách trao cho ông chức vụ bộ trưởng nội vụ, nhưng đã sa thải ông sau sáu tháng vì không đủ năng lực. Napoléon nói, "Laplace ne saisissait aucune question sous son veritable point de vue; il cherchait des subtilités partout, n'avait que des idées problemsatiques, et portait enfin l'esprit des infiniment petits jusque dans l'administration." Mong muốn giữ được lòng trung thành của mình, Napoléon đã nâng ông lên Thượng viện và ban tặng nhiều danh hiệu khác cho ông. Tuy nhiên, ông đã vui vẻ lên tiếng vào năm 1814 trước sự truất ngôi của người bảo trợ của mình và vội vàng cung cấp dịch vụ của mình cho Bourbons, nhờ đó được phong tước vị hầu tước. Tính cách nhỏ nhen này của anh ấy được thể hiện trong các bài viết của anh ấy. Ấn bản đầu tiên của *Système du monde* được dành riêng cho Hội đồng Năm trăm. Đối với tập thứ ba của *Mécanique Céleste* được đặt trước một ghi chú rằng trong số tất cả những sự thật có trong cuốn sách, điều quý giá nhất đối với tác giả là lời tuyên bố mà ông đã đưa ra về lòng biết ơn và sự tận tâm đối với người kiến tạo hòa bình của Châu Âu. Sau sự bộc phát tình cảm này, chúng tôi ngạc nhiên khi thấy trong các ấn bản của *Théorie analytique des probabilités*, xuất hiện sau thời kỳ Phục hồi, rằng sự cống hiến ban đầu cho hoàng đế đã bị dập tắt.

Mặc dù dẻo dai và hèn hạ trong chính trị, phải nói rằng trong tôn giáo và khoa học, Laplace không bao giờ trình bày sai hoặc che giấu niềm tin của chính mình cho dù chúng có thể gây khó chịu cho người khác như thế nào. Trong toán học và thiên văn học, thiên tài của ông tỏa sáng rực rỡ mà ít người xuất sắc. Ông đã cống hiến ba công trình vĩ đại cho thế giới khoa học, đó là *Mécanique Céleste*, *Exposition du système du monde*, và *Théorie analytique des probabilités* . Bên cạnh đó, ông đã đóng góp những hồi ký quan trọng cho Học viện Pháp.

Đầu tiên chúng ta xem xét ngắn gọn các nghiên cứu thiên văn của ông. Năm 1773, ông đưa ra một bài báo trong đó ông chứng

minh rằng chuyển động trung bình hoặc khoảng cách trung bình của các hành tinh là bất biến hoặc chỉ chịu những thay đổi định kỳ nhỏ. Đây là bước đầu tiên và quan trọng nhất trong việc thiết lập sự ổn định của hệ mặt trời. [51] Đối với Newton và cả Euler, dường như đã nghi ngờ liệu các lực có quá nhiều thay đổi như vậy trong vị trí, rất khác nhau về cường độ, giống như những vị trí trong hệ mặt trời, có thể có khả năng duy trì trạng thái cân bằng vĩnh viễn. Newton cho rằng đôi khi phải có một bàn tay mạnh mẽ can thiệp để sửa chữa những sai lệch gây ra bởi tác động lẫn nhau của các vật thể khác nhau. Bài báo này là mở đầu cho một loạt các nghiên cứu sâu sắc của Lagrange và Laplace về giới hạn biến thiên của các phần tử khác nhau của quỹ đạo các hành tinh, trong đó hai nhà toán học vĩ đại này thay phiên nhau vượt qua và bổ sung cho nhau . Bài báo đầu tiên của Laplace thực sự phát triển từ các nghiên cứu về lý thuyết Sao Mộc và Sao Thổ. Hành vi của những hành tinh này đã được nghiên cứu bởi Euler và Lagrange mà không nhận được lời giải thích thỏa đáng. Quan sát cho thấy sự tồn tại của một gia tốc ổn định của các chuyển động trung bình của mặt trăng của chúng ta và của Sao Mộc và một sự giảm đi kỳ lạ không kém của chuyển động trung bình của Sao Thổ. Có vẻ như sao Thổ cuối cùng có thể rời khỏi hệ hành tinh, trong khi sao Mộc sẽ rơi vào trong mặt trời và mặt trăng trên trái đất. Laplace cuối cùng đã thành công trong việc chỉ ra, trong một bài báo năm 1784-1786, rằng những biến thiên này (được gọi là “sự bất bình đẳng lớn”) thuộc về loại nhiễu loạn định kỳ thông thường, phụ thuộc vào định luật hấp dẫn. Nguyên nhân gây ra nhiễu loạn có ảnh hưởng lớn như vậy được tìm thấy trong tính tương xứng của chuyển động trung bình của hai hành tinh.

Trong nghiên cứu về hệ sao Mộc, Laplace đã xác định được khối lượng của các mặt trăng. Ông cũng phát hiện ra một số mối quan hệ đơn giản, rất đáng chú ý giữa chuyển động của các vật thể đó, được gọi là “Định luật Laplace.” Lý thuyết của ông về các vật thể này đã được hoàn thành trong các bài báo năm 1788 và 1789. Những

bài báo này, cũng như các bài báo khác được đề cập ở đây, đã được xuất bản trong *Mémoires présentés par thợ lặn savans*. Năm 1787 trở nên đáng nhớ bởi thông báo của Laplace rằng gia tốc của mặt trăng phụ thuộc vào những thay đổi lâu dài về độ lệch tâm của quỹ đạo trái đất. Điều này đã loại bỏ mọi nghi ngờ tồn tại sau đó về sự ổn định của hệ mặt trời. Giá trị phổ quát của định luật hấp dẫn để giải thích mọi chuyển động trong hệ mặt trời đã được thiết lập. Hệ thống đó, như được biết đến sau đó, cuối cùng được phát hiện là một cỗ máy hoàn chỉnh.

Năm 1796, Laplace xuất bản *Exposition du système du monde*, một chuyên luận phổ biến phi toán học về thiên văn học, kết thúc bằng một bản phác thảo về lịch sử của khoa học. Trong tác phẩm này, lần đầu tiên ông đưa ra giả thuyết về tinh vân nổi tiếng của mình. Một lý thuyết tương tự đã được đề xuất trước đó bởi Kant vào năm 1755, và bởi Thụy Điển; nhưng Laplace dường như không nhận thức được điều này .

Laplace nảy ra ý tưởng viết một tác phẩm chứa đựng một giải pháp phân tích hoàn chỉnh cho vấn đề cơ học do hệ mặt trời đưa ra, mà không cần xuất phát từ bất kỳ quan sát nào ngoại trừ dữ liệu không thể thiếu. Kết quả là *Mécanique Céleste*, là một bài trình bày có hệ thống về tất cả những khám phá của Newton, Clairaut, D'Alembert, Euler, Lagrange và của chính Laplace về cơ học thiên thể. Tập đầu tiên và tập thứ hai của tác phẩm này được xuất bản vào 1799; cái thứ ba xuất hiện vào 1802, cái thứ tư vào 1805. Của tập thứ năm, Quyển XI. và XII. được xuất bản vào 1823; Quyển XIII., XIV., XV. in 1824, và Book XVI. vào 1825. Hai tập đầu tiên chứa lý thuyết chung về chuyển động và hình dạng của các thiên thể. Tập thứ ba và thứ tư đưa ra những lý thuyết đặc biệt về chuyển động của các thiên thể,—đặc biệt là về chuyển động của sao chổi, của mặt trăng của chúng ta và của các vệ tinh khác. Tập thứ năm mở đầu với một lịch sử ngắn gọn về cơ học thiên thể, và sau đó đưa ra các phụ lục về kết quả nghiên cứu sau này của tác giả.

Mécanique Céleste là một kiệt tác và hoàn chỉnh đến mức những người kế tục Laplace có thể bổ sung tương đối ít. Phần chung của tác phẩm đã được dịch sang tiếng Đức bởi Joh. Karl Burkhardt, và xuất hiện ở Berlin, 1800–1802. Nathaniel Bowditch đã xuất bản một ấn bản bằng tiếng Anh, với phần bình luận sâu rộng, tại Boston, 1829–1839. *Mécanique Céleste* không dễ đọc. Những khó khăn, như một quy luật, không nằm ở bản thân chủ đề nhiều như ở việc muốn giải thích bằng lời nói. Một chuỗi lập luận phức tạp thường không nhận được lời giải thích nào. Biot, người đã hỗ trợ Laplace sửa lại tác phẩm cho báo chí , kể rằng ông đã từng yêu cầu Laplace giải thích một số đoạn văn trong cuốn sách được viết cách đây không lâu, và Laplace đã dành một giờ để cố gắng khôi phục lại lý luận đã bị dập tắt một cách bất cẩn với nhận xét, "Il est facile de voir." Mặc dù có những nghiên cứu quan trọng trong tác phẩm, vốn là của chính Laplace, nhưng đương nhiên nó chứa đựng rất nhiều điều được rút ra từ những người tiền nhiệm của ông. Trên thực tế, đó là kết quả có tổ chức của một thế kỷ làm việc kiên nhẫn. Nhưng Laplace thường bỏ qua việc thừa nhận đúng nguồn gốc mà ông rút ra, và để người đọc suy luận rằng các định lý và công thứcæ do người tiền nhiệm thực sự là của riêng ông.

Chúng tôi được biết rằng khi Laplace tặng Napoléon một bản sao của *Mécanique Céleste*, người sau này đã đưa ra nhận xét, "M. Laplace, họ nói với tôi rằng bạn đã viết cuốn sách lớn này về hệ thống của vũ trụ, và thậm chí chưa bao giờ đề cập đến Đấng Tạo Hóa của nó." Người ta cho rằng Laplace đã trả lời thẳng thừng, "Je n'avais pas besoin de cette hypothèse-la". truyền đạt một ý nghĩa hơi khác so với nghĩa đen của nó? Newton đã không thể giải thích bằng định luật hấp dẫn của mình tất cả phát sinh trong cơ học của bầu trời. Do đó, không thể chứng minh rằng hệ mặt trời ổn định và nghi ngờ rằng nó không ổn định trên thực tế, Newton bày tỏ quan điểm rằng thỉnh thoảng cần có sự can thiệp đặc biệt của một bàn tay quyền năng để duy trì trật tự. Giờ đây, Laplace đã có thể chứng

minh bằng định luật hấp dẫn rằng hệ mặt trời ổn định, và theo nghĩa đó có thể nói rằng ông cảm thấy không cần thiết phải viện dẫn đến Đấng Toàn năng.

Bây giờ chúng ta tiến hành nghiên cứu thuộc về toán học thuần túy hơn. Trong số này dễ thấy nhất là về lý thuyết xác suất. Laplace đã làm được nhiều việc để thúc đẩy chủ đề này hơn bất kỳ nhà điều tra nào khác. Ông đã xuất bản một loạt bài báo, kết quả chính của chúng được thu thập trong *Théorie analytique des probabilités* của ông, 1812. Lần xuất bản thứ ba (1820) bao gồm phần giới thiệu và hai cuốn sách. Phần giới thiệu đã được xuất bản riêng dưới tiêu đề *Essai philosophique sur les probabilités*, và là một sự trình bày tuyệt vời và đáng ngưỡng mộ mà không cần sự trợ giúp của công thức phân tíchæ về các nguyên tắc và ứng dụng của khoa học. Cuốn sách đầu tiên chứa lý thuyết về các hàm sinh, trong cuốn sách thứ hai, được áp dụng cho lý thuyết xác suất. Laplace đưa ra trong công trình của mình về xác suất phương pháp gần đúng với các giá trị của tích phân xác định. Giải pháp của phương trình vi phân tuyến tính đã được ông rút gọn thành tích phân xác định. Một trong những phần quan trọng nhất của công việc là ứng dụng xác suất vào phương pháp bình phương tối thiểu, được chứng minh là mang lại kết quả có khả năng xảy ra cao nhất cũng như thuận tiện nhất.

Tuyên bố in đầu tiên về nguyên tắc bình phương nhỏ nhất được Legendre đưa ra vào năm 1806 mà không cần trình diễn. Gauss đã sử dụng nó sớm hơn, nhưng mãi đến năm 1809 nó mới được xuất bản. Suy luận đầu tiên về định luật xác suất sai sót xuất hiện trong bản in là được đưa ra vào năm 1808 bởi Robert Adrain trong *Analyst*, một tạp chí do chính ông xuất bản ở Philadelphia. [2] Chứng minh của định luật này kể từ đó đã được đưa ra bởi Gauss, Ivory, Herschel, Hagen, và những người khác; nhưng tất cả các bằng chứng đều chứa một số điểm khó . Chứng minh của Laplace có lẽ là thỏa đáng nhất.

Công trình của Laplace về xác suất rất khó đọc, đặc biệt là phần về phương pháp bình phương nhỏ nhất. Các quy trình phân tích hoàn toàn không được thiết lập rõ ràng hoặc không có sai sót. “Không ai chắc chắn hơn về việc đưa ra kết quả của các quá trình phân tích một cách chính xác, và không ai từng quan tâm đến việc chỉ ra những cân nhắc nhỏ khác nhau mà tính đúng đắn phụ thuộc vào” (De Morgan).

Trong số các bài báo của Laplace về lực hút của các hình elip, quan trọng nhất là bài xuất bản năm 1785, và phần lớn được in lại trong tập thứ ba của *Mécanique Céleste*. Nó đưa ra cách xử lý toàn diện cho vấn đề tổng quát về lực hút của bất kỳ ellipsoid nào lên một hạt nằm bên ngoài hoặc trên bề mặt của nó. Sóng hài hình cầu, hay cái gọi là “Hệ số Laplace”, tạo thành một công cụ phân tích mạnh mẽ trong lý thuyết về lực hút, điện và từ. Lý thuyết về sóng hài hình cầu cho hai chiều đã được Legendre đưa ra trước đó. Laplace đã không thừa nhận điều này một cách thỏa đáng, và do đó, giữa hai người đàn ông vĩ đại đã tồn tại "một cảm giác hơn cả sự lạnh lùng". Hàm tiềm năng, V, được sử dụng nhiều bởi Laplace, và được ông chỉ ra để thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$. Đây được gọi là phương trình Laplace, và lần đầu tiên được đưa ra bởi ông ở dạng phức tạp hơn mà nó giả sử ở các tọa độ cực. Tuy nhiên, khái niệm thế năng không được Laplace đưa vào phân tích. Vinh dự về thành tích đó thuộc về Lagrange. [49]

Trong số những khám phá nhỏ của Laplace có phương pháp giải phương trình bậc hai, bậc ba và bậc bốn của ông, hồi ký của ông về nghiệm kỳ dị của phương trình vi phân, nghiên cứu về sai phân hữu hạn và trong định thức, cơ sở của định lý khai triển trong định thức đã được Vandermonde đưa ra trước đó cho một trường hợp đặc biệt, xác định tích phân đầy đủ của phương trình vi phân tuyến tính cấp hai. Trong *Mécanique Céleste*, ông đã tổng quát hóa định lý Lagrange về khai triển của các hàm trong chuỗi được gọi là định

lý Laplace.

Các nghiên cứu của Laplace về vật lý khá rộng rãi. Ở đây, chúng tôi đề cập đến việc ông sửa công thức Newton về vận tốc âm thanh trong chất khí bằng cách tính đến những thay đổi của tính đàn hồi do nhiệt nén và lạnh do hiếm; nghiên cứu của ông về lý thuyết thủy triều; thuyết mao dẫn toán học của ông; giải thích của ông về khúc xạ thiên văn; công thứcæ của anh ấy hoặc đo chiều cao bằng phong vũ biểu.

Các tác phẩm của Laplace nổi bật trái ngược hoàn toàn với các tác phẩm của Lagrange ở chỗ thiếu trang nhã và đối xứng. Laplace coi toán học là công cụ để giải các bài toán vật lý. Sau khi đạt được kết quả thực sự, anh ấy dành rất ít thời gian để giải thích các bước khác nhau trong quá trình phân tích của mình hoặc đánh bóng công việc của mình. Những năm cuối đời của ông chủ yếu được dành cho Arcueil khi nghỉ hưu yên bình ở một vùng quê, nơi ông theo đuổi việc học của mình với sức sống mãnh liệt như thường lệ cho đến khi qua đời. Anh ấy rất ngưỡng mộ Euler và thường nói, "Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maaïtre à tous."

Abnit-Théophile Vandermonde (1735–1796) đã học âm nhạc khi còn trẻ ở Paris và ủng hộ lý thuyết rằng tất cả nghệ thuật đều dựa trên một quy luật chung, qua đó bất kỳ ai cũng có thể trở thành nhà soạn nhạc với sự trợ giúp của toán học. Ông là người đầu tiên đưa ra một giải thích logic và liên kết về lý thuyết định thức, và do đó, gần như có thể được coi là người sáng lập ra lý thuyết đó. Ông và Lagrange đã khởi xướng phương pháp tổ hợp trong việc giải phương trình. [20]

Adrien Marie Legendre (1752–1833) được đào tạo tại Collège Mazarin ở Paris, nơi ông bắt đầu nghiên cứu toán học dưới sự hướng dẫn của Abbé Marie. Thiên tài toán học của ông được bảo đảm dành cho ông vị trí giáo sư toán học tại trường quân sự Paris. Trong khi ở đó, ông đã chuẩn bị một bài luận về đường cong được mô tả bởi

các viên đạn ném vào phương tiện cản trở (đường cong đạn đạo), đã giành được giải thưởng do Học viện Royal của Berlin. Năm 1780, ông từ chức để dành nhiều thời gian hơn cho việc nghiên cứu toán học cao hơn. Sau đó, ông được bổ nhiệm làm thành viên của một số ủy ban công. Năm 1795, ông được bầu làm giáo sư tại Trường Sư phạm và sau đó được bổ nhiệm vào một số vị trí nhỏ trong chính phủ. Do tính rụt rè của anh ta và do Laplace không thân thiện với anh ta, nhưng rất ít cơ quan công quyền quan trọng tương xứng với khả năng của anh ta được giao cho anh ta.

Là một nhà phân tích, chỉ đứng sau Laplace và Lagrange, Legendre đã làm phong phú toán học bằng những đóng góp quan trọng, chủ yếu là về tích phân elliptic, lý thuyết số, lực hút của ellipsoid và bình phương nhỏ nhất. Tác phẩm quan trọng nhất của Legendre là *Fonctions elliptiques* của ông, được phát hành thành hai tập vào năm 1825 và 1826. Anh ấy tiếp tục chủ đề mà Euler, Landen, và Lagrange đã để lại nó, và trong bốn mươi năm là người duy nhất nuôi dưỡng nhánh mới này của phân tích, cho đến khi cuối cùng Jacobi và Abel bước vào với những khám phá mới đáng ngưỡng mộ. [52] Legendre đã truyền đạt cho đối tượng mối liên hệ và sự sắp xếp mà thuộc về một ngành khoa học độc lập. Bắt đầu với một tích phân phụ thuộc vào căn bậc hai của một đa thức bậc 4 trong x, ông đã chỉ ra rằng những tích phân như vậy có thể đưa về ba dạng chính tắc, được chỉ định bởi $F(\phi)$, $E(phi)$ và $\Pi(\phi)$, căn được thể hiện dưới dạng $\Delta(\phi) = \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}$. Ông cũng đảm nhận nhiệm vụ phi thường là tính toán các bảng cung của hình elip cho các mức biên độ và độ lệch tâm khác nhau, cung cấp phương tiện tích hợp một số lượng lớn các vi phân.

Một ấn phẩm trước đó chứa đựng một phần các nghiên cứu của ông về hàm elliptic là *Tích phân* của ông gồm ba tập (1811, 1816, 1817), trong đó ông cũng xử lý chi tiết hai loại hàm xác định. tích phân do ông đặt tên là *Eulerian*. Anh lập bảng các giá trị của $\log\Gamma(p)$

cho các giá trị của p trong khoảng từ 1 và 2.

Một trong những chủ đề nghiên cứu sớm nhất là sự hấp dẫn của các nhân vật chính, gợi ý cho Legendre chức năng P_n, được đặt theo tên của ông. Cuốn hồi ký của ông đã được trình bày tại Viện Hàn lâm Khoa học vào năm 1783. Các nghiên cứu của Maclaurin và Lagrange cho rằng điểm bị hút bởi một hình cầu nằm trên bề mặt hoặc bên trong hình cầu, nhưng Legendre đã chỉ ra rằng để xác định lực hút của một hình cầu lên bất kỳ điểm bên ngoài nào, chỉ cần làm cho bề mặt của một hình cầu khác được mô tả trên cùng tiêu điểm đi qua điểm đó. Các hồi ký khác về ellipsoids xuất hiện sau đó.

Hai vị thần hộ mệnh mà Legendre đã hy sinh với niềm vui không ngừng trong sự im lặng của tủ quần áo là hàm elliptic và lý thuyết số. Các nghiên cứu của ông về chủ đề thứ hai, cùng với vô số mảnh vỡ rải rác về lý thuyết số do những người tiền nhiệm của ông trong dòng này, đã được sắp xếp thành một toàn bộ một cách có hệ thống, và được xuất bản thành hai tập bốn lớn, nhan đề *Théorie des nombres*, 1830. Trước khi xuất bản tác phẩm này, Legendre đã có những bài báo sơ bộ vào nhiều thời điểm khác nhau. Đỉnh cao của nó là định lý về sự tương hỗ bậc hai, trước đây được Euler đưa ra một cách mơ hồ mà không có bằng chứng, nhưng đối với lần đầu tiên được Legendre trình bày rõ ràng và chứng minh một phần. [48]

Trong khi đóng vai trò là một trong những ủy viên kết nối Greenwich và Paris về mặt trắc địa, Legendre đã tính toán tất cả các hình tam giác ở Pháp. Điều này tạo cơ hội để thiết lập các công thứcæ và định lý về trắc địa, về cách xử lý tam giác cầu như thể nó là một tam giác phẳng, bằng cách áp dụng một số hiệu chỉnh nhất định cho các góc, và về phương pháp bình phương nhỏ nhất, được ông xuất bản lần đầu tiên mà không cần trình diễn vào năm 1806.

Legendre đã viết một *Eléments de Géométrie*, 1794, rất được ưa chuộng, thường được chấp nhận ở Lục địa và Hoa Kỳ để thay thế cho Euclid. Đối thủ hiện đại vĩ đại này của Euclid đã trải qua nhiều

lần xuất bản; những cái sau chứa các yếu tố của lượng giác và bằng chứng về sự bất hợp lý của π và π^2. Nhiều đã được Legendre chú ý đến chủ đề về các đường thẳng song song. Trong các ấn bản trước của *Éléments*, ông đã trực tiếp kêu gọi các giác quan về tính đúng đắn của "tiên đề song song". Sau đó, ông cố gắng chứng minh "tiên đề" đó, nhưng bằng chứng của ông không thỏa mãn ngay cả bản thân anh ta. Trong Tập XII. về Hồi ức của Viện là một bài báo của Legendre, chứa nỗ lực cuối cùng của ông nhằm tìm ra giải pháp cho vấn đề. Giả sử không gian là vô hạn, ông đã chứng minh một cách thỏa đáng rằng tổng ba góc của một tam giác không thể vượt quá hai góc vuông; và rằng nếu có bất kỳ tam giác nào có tổng các góc là hai góc vuông, thì điều tương tự cũng phải đúng với mọi tam giác. Nhưng ở bước tiếp theo, để chứng minh rằng tổng này không thể nhỏ hơn hai góc vuông, chứng minh của anh ta nhất thiết thất bại. Nếu có thể cho rằng tổng của ba góc luôn bằng hai góc vuông, thì lý thuyết về sự tương đương có thể được suy ra một cách nghiêm ngặt.

Joseph Fourier (1768–1830) sinh ra tại Auxerre, miền trung Nước Pháp. Ông trở thành một đứa trẻ mồ côi vào năm lên tám tuổi. Nhờ ảnh hưởng của bạn bè, ông được nhận vào trường quân sự ở quê quán của ông, sau đó được hướng dẫn bởi Benedictines của Tu viện St.), đơn của anh ấy đã được trả lời như sau: "Fourier, không phải là người cao quý, không thể vào pháo binh, mặc dù anh ấy là một Newton thứ hai." [53] Anh ấy sớm được bổ nhiệm vào trong trường quân sự. Năm 21 tuổi, ông đến Paris để đọc trước Viện Hàn lâm Khoa học một cuốn hồi ký về cách giải phương trình số, mà là một cải tiến của phương pháp Newton của sự gần đúng. Cuộc điều tra này khi còn trẻ, anh ấy không bao giờ quên. Anh ấy đã giảng về tôi t vào trường Bách khoa; ông đã phát triển nó trên bờ sông Nile; nó là một phần của tác phẩm có tựa đề *Phân tích các phương trình xác định* (1831), được in khi cái chết ập đến với ông. Công trình này chứa "Định lý Fourier" về số nghiệm thực giữa hai giới hạn đã chọn của . Budan đã công bố kết quả này sớm vào năm 1807, nhưng có

bằng chứng cho thấy Fourier đã thiết lập nó trước khi Budan công bố. Những kết quả rực rỡ này đã bị lu mờ bởi định lý Sturm, được công bố vào năm 1835.

Fourier đã đóng một vai trò nổi bật tại nhà của mình trong việc thúc đẩy Cách mạng. Dưới thời Cách mạng Pháp, nghệ thuật và khoa học dường như đã có lúc phát triển mạnh mẽ. Việc cải cách các trọng lượng và thước đo đã được lên kế hoạch với ý tưởng hoành tráng. Trường Bình thường được thành lập vào năm 1795, trong đó Fourier lúc đầu là học sinh, sau đó là giảng viên. Thành công rực rỡ của anh ấy đã giúp anh ấy có được một ghế trong Trường Bách khoa, nhiệm vụ mà sau đó anh ấy đã từ bỏ, cùng với Monge và Berthollet, để tháp tùng Napoléon trong chiến dịch tới Ai Cập. Napoléon thành lập Viện Ai Cập, trong đó Fourier trở thành thư ký. Ở Ai Cập, ông không chỉ tham gia vào công việc khoa học mà còn thực hiện các chức năng chính trị quan trọng. Sau khi trở về Pháp, ông đã giữ chức tỉnh Grenoble trong mười bốn năm. Trong thời gian này, ông đã tiến hành các nghiên cứu tỉ mỉ về sự truyền nhiệt trong các vật rắn, được xuất bản năm 1822 trong tác phẩm của ông có tựa đề *La Theorie Analytique de la Chaleur*. Công trình này đánh dấu một kỷ nguyên trong lịch sử của vật lý toán học. "Chuỗi Fourier" cấu thành viên ngọc quý của nó. Bằng nghiên cứu này, một cuộc tranh cãi kéo dài đã được kết thúc và thực tế đã chứng minh rằng bất kỳ hàm tùy ý nào cũng có thể được biểu diễn bằng một chuỗi lượng giác. Thông báo đầu tiên về khám phá vĩ đại này được Fourier đưa ra vào năm 1807, trước Viện hàn lâm Pháp. Chuỗi lượng giác $\sum_{n=0}^{n=\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$ đại diện cho hàm $\phi(x)$ với mọi giá trị của x, nếu các hệ số $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x) \sin nx\, dx$, và b_n bằng một tích phân tương tự. Điểm yếu trong phân tích của Fourier nằm ở chỗ ông không thể chứng minh một cách tổng quát rằng chuỗi lượng giác thực sự hội tụ đến giá trị của hàm số. Năm 1827, Fourier kế nhiệm Laplace làm chủ tịch hội đồng của Trường Bách khoa.

Trước khi tiếp tục với nguồn gốc của hình học hiện đại, chúng ta sẽ nói ngắn gọn về sự ra đời của giải tích cấp cao ở Anh. Điều này đã diễn ra trong quý đầu tiên của thế kỷ này. Người Anh bắt đầu phàn nàn về tiến bộ rất nhỏ mà khoa học đang đạt được ở Anh so với tiến bộ đua xe của nó trên Lục địa. Năm 1813, "Hiệp hội phân tích " được thành lập tại Cambridge. Đây là một câu lạc bộ nhỏ được thành lập bởi George Peacock, John Herschel, Charles Babbage, và một vài sinh viên Cambridge khác, để thúc đẩy, như cách diễn đạt một cách hài hước, các nguyên tắc của "D-ism" thuần túy, nghĩa là, ký hiệu Leibnizian trong phép tính dựa trên của "dot-age" hoặc của ký hiệu Newton. Cuộc đấu tranh này đã kết thúc bằng việc đưa vào Cambridge ký hiệu $\frac{dy}{dx}$, loại trừ ký hiệu từ dòng $\dot{y}$. Đây là một bước tiến vượt bậc, không phải vì bất kỳ ưu thế to lớn nào của Leibnizian so với ký hiệu Newton, mà bởi vì việc chấp nhận ký hiệu cũ đã mở ra cho sinh viên Anh những kho khám phá lục địa khổng lồ. Ngài William Thomson, Tait và một số nhà văn hiện đại khác tìm thấy thường thuận tiện khi sử dụng cả hai ký hiệu. Herschel, Peacock, và Babbage đã dịch, vào năm 1816, từ tiếng Pháp, chuyên luận của Lacroix về phép tính vi phân và tích phân, và đã thêm vào năm 1820 hai tập ví dụ. Lacroix's là một trong những công trình hay nhất và phong phú nhất về giải tích thời bấy giờ. Trong số ba người sáng lập "Hiệp hội giải tích", Peacock sau này làm hầu hết các công việc trong toán học thuần túy. Babbage trở nên nổi tiếng nhờ phát minh ra công cụ tính toán ưu việt hơn Pascal. Nó chưa bao giờ kết thúc, do có sự hiểu lầm với chính phủ và do đó không đảm bảo được tiền. John Herschel, nhà thiên văn học lỗi lạc, đã thể hiện sự tinh thông của mình đối với phép phân tích cao hơn trong các hồi ký gửi cho Hội Hoàng gia về các ứng dụng mới của phép phân tích toán học, và trong các bài viết đóng góp cho cyclopædias về ánh sáng, khí tượng học và lịch sử toán học.

George Peacock (1791–1858) được đào tạo tại Trinity College,

Cambridge, trở thành giáo sư Lowndean ở đó, và sau đó là trưởng khoa Ely. Các ấn phẩm chính của ông là *Đại số*, 1830 và 1842, và *Báo cáo về tiến bộ gần đây trong phân tích*, đây là bản tóm tắt đầu tiên trong một số bản tóm tắt có giá trị về tiến bộ khoa học được in trong tạp chí tập của Hiệp hội Anh. Ông là một trong những người đầu tiên nghiên cứu nghiêm túc các nguyên tắc cơ bản của đại số và hoàn toàn nhận ra tính chất biểu tượng thuần túy của nó. Ông đưa ra, mặc dù có phần không hoàn hảo, "nguyên tắc về sự trường tồn của các dạng tương đương". Nó giả định rằng các quy tắc áp dụng cho các ký hiệu của đại số số học cũng áp dụng được cho đại số ký hiệu. Khoảng thời gian này D. F. Gregory đã viết một bài báo "về bản chất thực sự của đại số ký hiệu," bài báo đưa ra rõ ràng các định luật giao hoán và phân phối. Những định luật này đã được chú ý từ nhiều năm trước bởi những người phát minh ra các phương pháp ký hiệu trong giải tích. Chính Servois là người đã giới thiệu các tên *giao hoán* và *phân phối* vào 1813. Những nghiên cứu của Peacock về nền tảng của đại số đã được De Morgan và Hankel nâng cao đáng kể.

James Ivory (1765–1842) là một nhà toán học người Scotch, người đã trong mười hai năm, bắt đầu từ năm 1804, giữ chức giáo sư toán học tại Đại học Quân sự Hoàng gia ở Marlow (nay là Sandhurst). Về cơ bản, ông là một nhà toán học tự đào tạo và gần như là người duy nhất ở Vương quốc Anh trước khi thành lập Hiệp hội Phân tích thông thạo toán học lục địa. Điều quan trọng là cuốn hồi ký của ông (*Phil. Trans.*, 1809), trong đó bài toán về lực hút của một ellipsoid đồng nhất lên một điểm bên ngoài được rút gọn thành bài toán đơn giản hơn của lực hút của một ellipsoid liên quan lên một điểm tương ứng bên trong nó. Điều này được gọi là "Định lý Ivory." Ông phê phán nghiêm khắc quá mức giải pháp của Laplace về phương pháp bình phương nhỏ nhất, và đưa ra ba cách chứng minh của nguyên tắc mà không cần viện đến xác suất; nhưng còn lâu mới đạt yêu cầu.

Nguồn gốc của Hình học Hiện đại

Bằng các nghiên cứu của Descartes và sự phát minh ra phép tính, phương pháp giải tích hình học đã trở nên nổi bật trong hơn một thế kỷ. Bất chấp những nỗ lực phục hồi các phương pháp tổng hợp của Desargues, Pascal, De Lahire, Newton và Maclaurin, phương pháp phân tích gần như giữ được vị thế tối cao không thể tranh cãi. Nó được dành riêng cho thiên tài Monge để đưa hình học tổng hợp lên hàng đầu và mở ra những con đường tiến bộ mới. *Géométrie description* của ông đánh dấu sự khởi đầu cho một bước phát triển tuyệt vời của hình học hiện đại.

Trong số hai bài toán hàng đầu của hình học mô tả, bài toán—biểu diễn bằng hình vẽ các độ lớn hình học—đã đạt đến mức độ hoàn thiện cao trước thời Monge; cách khác—để giải các bài toán về hình trong không gian bằng phép dựng trong một mặt phẳng—đã nhận được sự chú ý đáng kể trước thời đại của ông. Người tiền nhiệm đáng chú ý nhất của ông trong hình học mô tả là Frézier người Pháp (1682– 1773). Nhưng Monge vẫn tiếp tục tạo ra hình học mô tả như một ngành khoa học *riêng biệt* bằng cách truyền đạt đối với nó tính tổng quát và sang trọng về mặt hình học. Tất cả các vấn đề trước đây được xử lý một cách đặc biệt và không chắc chắn đều được quy về một số nguyên tắc chung. Ông đã giới thiệu giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt thẳng đứng làm trục chiếu. Bằng cách quay một mặt phẳng thành khác xung quanh trục này hoặc đường đất, đã đạt được nhiều lợi thế. [54]

Gaspard Monge (1746–1818) sinh ra ở Beaune. Việc xây dựng một kế hoạch cho thị trấn quê hương của anh ấy đã khiến cậu bé được một đại tá kỹ sư chú ý, người đã sắp xếp cho anh ấy một cuộc hẹn vào trường cao đẳng kỹ sư tại Mézières. Xuất thân thấp kém, anh ta không thể nhận được một ủy ban trong quân đội, nhưng anh ta được phép vào phần phụ của trường, nơi dạy khảo sát và vẽ. Nhận thấy rằng tất cả các hoạt động liên quan đến việc xây dựng

các kế hoạch công sự đều được thực hiện bằng các quy trình số học dài, ông đã thay thế một phương pháp hình học, mà ban đầu chỉ huy thậm chí từ chối nhìn vào, thời gian có thể thực hiện nó quá ngắn; khi một lần được kiểm tra, nó đã được đón nhận một cách thèm thuồng. Monge đã phát triển thêm các phương pháp này và do đó đã tạo ra hình học mô tả của mình. Do sự cạnh tranh giữa các trường quân sự Pháp thời bấy giờ, ông không được phép tiết lộ phương pháp mới của mình cho bất kỳ ai bên ngoài học viện này. Năm 1768, ông được bổ nhiệm làm giáo sư toán học tại Mézières. Năm 1780, khi trò chuyện với hai học trò của mình, S. F. Lacroix và Gayvernon ở Paris, anh ta buộc phải nói, "Tất cả những gì tôi có ở đây được thực hiện bằng phép tính, tôi có thể thực hiện được với thước kẻ và compa, nhưng tôi không được phép tiết lộ những bí mật này cho bạn." Nhưng Lacroix đã tự đặt mình vào kiểm tra xem bí mật đó có thể là gì, phát hiện ra các quy trình và công bố chúng vào năm 1795. Phương pháp này được chính Monge công bố trong cùng năm đó, lần đầu tiên vào năm 1795. hình thức mà những người viết tắt đã ghi lại những bài học của anh ấy ở Trường Sư phạm, nơi anh ấy đã được bầu làm giáo sư, và sau đó một lần nữa, ở dạng đã sửa đổi, trong *Journal des écoles normales*. Phiên bản tiếp theo xảy ra vào năm 1798-1799. Sau thời gian tồn tại phù du chỉ bốn tháng, Trường Bình thường đã bị đóng cửa vào năm 1795. Cùng năm đó, Trường Bách khoa được khai trương, Monge đã tham gia tích cực vào quá trình thành lập. Ông đã dạy hình học mô tả ở đó cho đến khi rời Pháp để đi cùng Napoléon trong chiến dịch Ai Cập. Ông là chủ tịch đầu tiên của Viện Ai Cập. Monge là một đảng viên nhiệt thành của Napoléon và vì lý do đó, đã bị Louis XVIII tước bỏ mọi danh hiệu. Điều này và sự tàn phá của Trường Bách khoa đã ám ảnh tâm trí anh rất nhiều. Anh ấy đã không tồn tại lâu sau sự xúc phạm này.

Nhiều bài báo của Monge không hề bị giới hạn trong hình học mô tả. Những khám phá phân tích của ông hầu như không kém phần

đáng chú ý. Ông đã đưa vào hình học giải tích phương pháp sử dụng phương trình của một đường thẳng. Ông đã có những đóng góp quan trọng cho các bề mặt cấp hai (trước đó được nghiên cứu bởi Wren và Euler) và phát hiện ra giữa lý thuyết bề mặt và tích phân phương trình, một hệ thức ẩn đã đưa ra ánh sáng mới cho cả hai chủ đề. Ông đã đưa ra vi phân của các đường cong, thiết lập một lý thuyết tổng quát về độ cong và áp dụng nó cho ellipsoid. Ông phát hiện ra rằng giá trị của nghiệm không bị suy giảm khi các ảo có liên quan giữa các đại lượng phụ. Monge đã xuất bản những cuốn sách sau: *Statics*, 1786; *Applications de l'algèbre à la géométrie*, 1805; *Ứng dụng de l'analyse à la géométrie*. Hai cái cuối cùng chứa hầu hết các giấy tờ linh tinh của anh ấy.

Monge là một giáo viên truyền cảm hứng, và ông đã tập hợp xung quanh mình một nhóm lớn học sinh, trong số đó có Dupin, Servois, Brianchon, Hachette, Biot và Poncelet.

Charles Dupin (1784–1873), giáo sư cơ học nhiều năm tại Conservatoire des Arts et Métiers ở Paris, xuất bản năm 1813 một tác phẩm quan trọng về *Développements de géométrie*, trong đó giới thiệu quan niệm của các tiếp tuyến liên hợp của một điểm trên một bề mặt và của đường chỉ thị. [53] Nó cũng chứa định lý được gọi là "Định lý Dupin." Các bề mặt bậc hai và hình học mô tả đã được nghiên cứu thành công bởi *Jean Nicolas Pierre Hachette* (1769–1834), người đã trở thành giáo sư hình học mô tả tại Trường Bách khoa sau khi Monge rời khỏi Rome và Ai Cập. Năm 1822, ông xuất bản *Traité de géométrie description*.

Hình học mô tả, phát sinh, như chúng ta đã thấy, trong các trường kỹ thuật ở Pháp, đã được chuyển sang Đức khi thành lập các trường kỹ thuật ở đó. G. Schreiber, giáo sư tại Karlsruhe, là người đầu tiên truyền bá hình học của Monge ở Đức bằng việc xuất bản một tác phẩm về nó vào năm 1828–1829. [54] Trong Hình học mô tả của Hoa Kỳ được được giới thiệu vào năm 1816 tại Học viện Quân sự

ở West Point bởi Claude Crozet, từng là học sinh của Trường Bách khoa ở Paris . Crozet đã viết tác phẩm tiếng Anh đầu tiên về chủ đề này. [2]

Lazare Nicholas Marguerite Carnot (1753–1823) sinh ra tại Nolay ở Burgundy, và được giáo dục tại tỉnh quê hương của ông. Ông nhập ngũ, nhưng vẫn tiếp tục nghiên cứu toán học, và viết một công trình về máy móc vào năm 1784, trong đó có bằng chứng sớm nhất cho thấy động năng bị mất đi khi va chạm của các vật thể. Với sự ra đời của cuộc Cách mạng, ông lao vào chính trị, và khi thống nhất châu Âu, vào năm 1793, ông đã tung ra một triệu binh sĩ chống lại Pháp, nhiệm vụ to lớn là tổ chức mười bốn quân đội để gặp kẻ thù đã được anh ấy đạt được. Ông bị trục xuất vào năm 1796 vì phản đối *đảo chính* của Napoléon. Người tị nạn đã đến Geneva, nơi ông đã phát hành, vào năm 1797, một tác phẩm vẫn thường được trích dẫn, có tựa đề *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal.*. Ông tuyên bố mình là "kẻ thù không thể hòa giải của các vị vua." Sau chiến dịch ở Nga, ông đề nghị chiến đấu cho Pháp, mặc dù không phải cho đế chế. Khi phục hồi, ông đã bị lưu đày. Ông qua đời ở Magdeburg. *Géométrie de position* của ông, 1803, và *Essay on Transversals*, 1806, là những đóng góp quan trọng cho hình học hiện đại. Trong khi Monge say mê chủ yếu với hình học ba chiều, thì Carnot lại giới hạn bản thân mình với hình học hai chiều. Bằng nỗ lực giải thích ý nghĩa của dấu âm trong hình học, ông đã thiết lập một "hình học vị trí', tuy nhiên, khác với "Geometrie der Lage" ngày nay. Ông đã phát minh ra một lớp các định lý tổng quát về tính chất xạ ảnh của các hình, mà từ đó đã được Poncelet, Chasles, và những người khác phát huy rất nhiều.

Jean Victor Poncelet (1788–1867), quê ở Metz, tham gia chiến dịch của Nga, bị bỏ mặc trên cánh đồng đẫm máu Krasnoi, bị bắt làm tù binh về Saratoff. Bị tước đoạt tất cả các cuốn sách ở đó, và chỉ nhớ đến những gì ông đã học ở Lyceum ở Metz và Trường Bách khoa, nơi ông đã nghiên cứu một cách say mê các tác phẩm của

Monge, Carnot và Brianchon, ông bắt đầu nghiên cứu toán học từ các yếu tố của nó. . Anh ấy bắt đầu nghiên cứu ban đầu mà sau đó đã khiến anh ấy trở nên lừng lẫy. Khi ở trong tù, ông đã làm cho toán học những gì Bunyan đã làm cho văn học, — tạo ra một tác phẩm được đọc nhiều, vẫn còn giá trị lớn cho đến thời điểm hiện tại. Ông trở lại Pháp vào năm 1814, và năm 1822 đã xuất bản tác phẩm được đề cập có tựa đề *Traité des Propriétés projectives des figures*. Trong đó, ông đã nghiên cứu các thuộc tính của các hình không bị thay đổi bởi hình chiếu của các hình. Phép chiếu ở đây không bị ảnh hưởng bởi các tia song song có hướng quy định, như với Monge, mà bởi phép chiếu trung tâm. Do đó, phép chiếu phối cảnh, được Desargues, Pascal, Newton và Lambert sử dụng trước ông, đã được ông nâng lên thành một phương pháp hình học hiệu quả. Theo cách tương tự, anh ấy đã xây dựng một số ý tưởng về De Lahire, Servois, và Gergonne thành một phương thức thông thường—phương thức của "các cực đối ứng." Đối với ông, chúng ta mắc phải Định luật đối ngẫu như một hệ quả của các cực đối ứng. Là một nguyên tắc độc lập, đó là do Gergonne. Poncelet đã viết nhiều về cơ học ứng dụng . Năm 1838, Khoa Khoa học được mở rộng do ông được bầu làm chủ tịch khoa cơ học.

Trong khi ở Pháp, trường phái Monge đang tạo ra hình học hiện đại, thì ở Anh, **Robert Simson** (1687–1768) và **Matthew Stewart** (1717–1785). Stewart là học trò của Simson và Maclaurin, và kế nhiệm vị trí này tại Edinburgh. Trong thế kỷ 18, ông và Maclaurin là những nhà toán học lỗi lạc duy nhất ở Vương quốc Anh. Thiên tài của ông đã bị định hướng sai bởi xu hướng thịnh hành lúc bấy giờ ở Anh là bỏ qua những phân tích cao hơn. Trong *Bốn vùng, Vật lý và Toán học*, năm 1761, ông đã áp dụng hình học để giải các bài toán thiên văn khó , mà trên Lục địa đã được tiếp cận bằng phương pháp phân tích với thành công lớn hơn. Ông xuất bản *Định lý tổng quát* vào năm 1746, và vào năm 1763, ông xuất bản *Các mệnh đề hình họcæ more veterum Demonstratæ* Công trình trước đây bao

gồm 69 định lý, trong đó chỉ có 5 định lý đi kèm với chứng minh. Nó cho nhiều kết quả mới thú vị về đường tròn và đường thẳng. Stewart đã mở rộng một số định lý về các đường ngang do Giovanni Ceva (1648–1737), người Ý, người đã xuất bản vào năm 1678 tại Mediolani một công trình chứa định lý mà bây giờ được biết đến với tên ông.

THỜI GIAN GẦN ĐÂY



CHƯA BAO GIỜ toán học được trau dồi một cách nhiệt thành và thành công hơn trong thế kỷ này. Tiến bộ cũng không bị giới hạn trong một hoặc hai quốc gia như trong các giai đoạn trước. Trong khi người Pháp và người Thụy Sĩ, những người duy nhất trong thời kỳ trước đã mang ngọn đuốc của sự tiến bộ, đã tiếp tục phát triển toán học với thành công lớn, thì từ các quốc gia khác, toàn bộ quân đội gồm những người lao động nhiệt tình đã lên hàng đầu. Nước Đức thức tỉnh khỏi cơn mê man của mình bằng cách đưa Gauss, Jacobi, Dirichlet và hàng loạt những người đàn ông gần đây tới; Vương quốc Anh đã sản xuất De Morgan, Boole, Hamilton, bên cạnh những nhà vô địch vẫn còn sống; Nga bước vào đấu trường với Lobatchewsky của cô ấy; Na Uy với Abel; Ý với Cremona; Hungary với hai Bolyais của cô ấy; Hoa Kỳ với Benjamin Peirce.

Năng suất của các nhà văn hiện đại là rất lớn. Giáo sư Cayley, [56] "thật khó để đưa ra ý tưởng về trong phạm vi rộng lớn của toán học hiện đại. Từ 'phạm vi' này không đúng: ý tôi là phạm vi đông đúc với chi tiết đẹp đẽ,—không phải là phạm vi của sự đồng nhất đơn thuần chẳng hạn như một đồng bằng không vật thể, mà là của một vùng đất nước xinh đẹp thoạt tiên được nhìn thấy từ xa, nhưng sẽ chịu được lan man và nghiên cứu đến từng chi tiết của sườn đồi và thung lũng, dòng suối, đá, gỗ và hoa." Nhà toán học rất vui khi nghĩ rằng trong khoa học của mình, cũng như không khoa học nào khác, là những thành tựu của mọi thời đại sở hữu vĩnh viễn; những khám phá mới hiếm khi bác bỏ những nguyên lý cũ hơn; hiếm khi là bất cứ điều gì bị mất hoặc lãng phí.

Nếu được hỏi tiện ích của một số phần mở rộng toán học hiện đại nằm ở chỗ nào, thì phải thừa nhận rằng hiện tại rất khó để biết làm thế nào chúng có thể áp dụng được cho các câu hỏi về đời sống thông

thường hoặc khoa học vật lý. Nhưng việc chúng ta không thể làm được điều này không nên được coi là một lý lẽ chống lại việc theo đuổi những nghiên cứu như vậy. Trước hết, chúng ta không biết ngày hay giờ khi những phát triển trừu tượng này sẽ tìm thấy ứng dụng trong nghệ thuật cơ học, khoa học vật lý hoặc trong các ngành toán học khác. Ví dụ: toàn bộ chủ đề về thống kê đồ họa, rất hữu ích đối với kỹ sư thực hành, được thực hiện dựa trên *Geometrie der Lage* của von Staudt; "Nguyên tắc tác dụng thay đổi" của Hamilton được sử dụng trong thiên văn học; đại lượng phức, tích phân tổng quát, và các định lý tổng quát trong tích phân mang lại lợi ích trong việc nghiên cứu điện và từ. Spottiswoode, [57] "không thể giảm giá, "Tiện ích của những nghiên cứu như vậy trong mọi trường hợp, hoặc thậm chí tưởng tượng trước. Ví dụ, ai có thể cho rằng phép tính dạng hoặc lý thuyết thay thế sẽ làm sáng tỏ nhiều phương trình thông thường; hoặc rằng các hàm Abelian và các siêu elliptic sẽ cho chúng ta biết bất cứ điều gì về tính chất của các đường cong; hay phép tính các phép toán sẽ giúp chúng ta trong theo bất kỳ cách nào đối với hình trái đất?" Lý do thứ hai ủng hộ việc theo đuổi toán học cao cấp, ngay cả khi không có hứa hẹn về ứng dụng thực tế, phải chăng toán học, giống như thơ ca và âm nhạc, xứng đáng được trau dồi vì lợi ích của chính nó.

Đặc điểm tuyệt vời của toán học hiện đại là xu hướng khái quát hóa của nó. Ngày nay, các định lý biệt lập không được coi trọng, "ngoại trừ khi cung cấp các gợi ý về một lĩnh vực tư duy mới không bị nghi ngờ, giống như các thiên thạch tách ra từ một quỹ đạo hành tinh nào đó chưa được khám phá." Trong toán học, cũng như trong tất cả các ngành khoa học thực sự, không có chủ đề nào được coi là một mình, mà luôn liên quan đến hoặc là kết quả tự nhiên của những thứ khác. Sự phát triển của khái niệm về tính liên tục đóng vai trò hàng đầu trong nghiên cứu hiện đại. Trong hình học, nguyên lý về tính liên tục, ý tưởng về sự tương ứng, và lý thuyết về phép chiếu tạo thành những khái niệm cơ bản hiện đại. Tính liên tục

khẳng định chính nó một cách nổi bật nhất trong quan hệ với các điểm tròn tại vô cực trong một mặt phẳng. Trong đại số, ý tưởng hiện đại tìm thấy biểu thức trong lý thuyết về các phép biến đổi tuyến tính và các bất biến, và trong việc thừa nhận giá trị của tính đồng nhất và tính đối xứng .

HÌNH HỌC TỔNG HỢP

Xung đột giữa hình học và giải tích nảy sinh vào cuối thế kỷ trước và đầu thế kỷ hiện tại đã kết thúc. Không bên nào chiến thắng. Sức mạnh lớn nhất được tìm thấy nằm ở chỗ, không phải ở sự đàn áp của một trong hai, mà ở sự cạnh tranh thân thiện giữa hai bên, và ở ảnh hưởng kích thích của bên này đối với bên kia. Lagrange tự hào rằng trong *Mécanique Analytique* của mình, ông đã thành công trong việc tránh tất cả các số liệu; nhưng kể từ thời của ông, cơ học đã nhận được nhiều sự giúp đỡ từ hình học.

Hình học tổng hợp hiện đại được tạo ra bởi một số nhà nghiên cứu cùng một lúc. Nó dường như là kết quả tự nhiên của mong muốn về các phương pháp tổng quát sẽ đóng vai trò như những sợi chỉ của Ariadne để hướng dẫn học sinh vượt qua mê cung của các định lý, hệ quả, porism và các bài toán. Hình học tổng hợp lần đầu tiên được nuôi dưỡng bởi Monge, Carnot và Poncelet ở Pháp; sau đó nó đã đơm hoa kết trái dưới bàn tay của Möbius và Steiner ở Đức và Thụy Sĩ, và cuối cùng được phát triển để đạt mức hoàn thiện cao hơn bởi Chasles ở Pháp, von Staudt ở Đức, và Cremona ở Ý.

Augustus Ferdinand Möbius (1790–1868) là người gốc Schulpforta ở Phổ. Ông học tại Göttingen dưới thời Gauss, cũng như tại Leipzig và Halle. Tại Leipzig, vào 1815, ông trở thành tiến sĩ tư nhân, giáo sư thiên văn học xuất sắc vào năm sau, và năm 1844 là giáo sư bình thường. Vị trí này ông giữ cho đến khi qua đời. Nghiên cứu quan trọng nhất của ông là về hình học. Chúng xuất hiện trên *Crelle's Journal* và trong tác phẩm nổi tiếng của ông có tựa đề *Der*

Barycentrische Calcul, Leipzig, 1827 . Như tên gọi, phép tính này dựa trên các tính chất của trọng tâm. [58] Do đó, điểm S là trọng tâm của các trọng số a, b, c, d lần lượt đặt tại các điểm A, B, C, D được biểu diễn bằng phương trình

$$(a+b+c+d)S = aA + bB + cC + dD.$$

Giải tích của ông là khởi đầu của đại số tứ bội, và chứa mầm mống của hệ thống kỳ diệu Grassmann. Khi chỉ định các đoạn trong suốt tác phẩm này, lần đầu tiên chúng tôi tìm thấy sự nhất quán trong việc phân biệt dương và âm theo thứ tự các chữ cái AB, BA. Tương tự cho tam giác và tứ diện. Nhận xét rằng luôn có thể cho ba điểm A, B, C trọng số α, β, γ bất kỳ điểm thứ tư nào M trong mặt phẳng của chúng sẽ trở thành tâm khối lượng, đã đưa Möbius đến một hệ tọa độ mới trong đó vị trí của một điểm được biểu thị bằng một phương trình và của một đường thẳng theo tọa độ. Bằng thuật toán này, bằng đại số, ông đã tìm ra nhiều định lý hình học chủ yếu biểu thị các tính chất bất biến,—ví dụ, các định lý về quan hệ bất điều hòa. Möbius cũng đã viết về tĩnh học và thiên văn học. Ông đã tổng quát hóa lượng giác cầu bằng cách cho các cạnh hoặc góc của tam giác vượt quá 180°.

Jacob Steiner (1796–1863), "nhà hình học vĩ đại nhất kể từ thời Euclid", sinh ra ở Utzendorf thuộc Bang Bern. Anh ấy đã không học viết cho đến khi anh ấy mười bốn tuổi. Năm mười tám tuổi, anh trở thành học trò của Pestalozzi. Sau đó ông học tại Heidelberg và Berlin. Khi Crelle bắt đầu, vào năm 1826, tạp chí toán học nổi tiếng mang tên ông, Steiner và Abel đã trở thành những cộng tác viên hàng đầu. Năm 1832 Steiner xuất bản cuốn sách *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander* của ông, "trong đó khám phá ra cơ thể tạo ra các hiện tượng đa dạng nhất (*Erscheinungen*) trong thế giới không gian thống nhất với nhau." Nhờ ảnh hưởng của Jacobi và những người khác, bộ môn hình học được thành lập cho ông tại Berlin vào

năm 1834. Ông đã giữ vị trí này cho đến khi qua đời. sau nhiều năm sức khỏe không tốt. Trong *Systematische Entwickelungen* của ông, lần đầu tiên nguyên tắc đối ngẫu được giới thiệu ngay từ đầu. Cuốn sách này và cuốn sách của von Staudt đã đặt nền móng cho hình học tổng hợp ở dạng hiện tại là phần còn lại. Ông không chỉ hoàn thiện tương đối lý thuyết về đường cong và bề mặt cấp hai, mà ông còn có những bước tiến vượt bậc trong lý thuyết của những cấp độ cao hơn. Trong phần còn lại của ông hình học tổng hợp bằng tay đã đạt được tiến bộ phi thường. kết hôn với nhau nhanh đến mức anh ấy thường không có thời gian để ghi lại các cuộc biểu tình của họ. Trong một bài báo trên *Crelle's Journal* trên *Allgemeine Eigenschaften Algebraischer Curven*, ông đưa ra các định lý mà không cần chứng minh đã được Hesse tuyên bố là "giống như các định lý của Fermat, đánh đố thế hệ hiện tại và tương lai." Bằng chứng phân tích về một số trong số chúng đã được đưa ra bởi những người khác, nhưng Cremona cuối cùng đã chứng minh tất cả chúng bằng một phương pháp tổng hợp. Steiner đã khám phá ra một cách tổng hợp hai tính chất nổi bật của một bề mặt bậc ba; viz. rằng nó chứa 27 đường thẳng và một khối ngũ giác có các điểm kép cho các đỉnh của nó và các đường Hessian của bề mặt đã cho cho các cạnh của nó. [55] Thuộc tính đầu tiên là được Cayley và Salmon phát hiện sớm hơn về mặt phân tích ở Anh và cái thứ hai là của Sylvester. Công trình của Steiner về chủ đề này là điểm khởi đầu cho các nghiên cứu quan trọng của H. Schröter, F. August, L. Cremona, và R. Sturm. Steiner đã thực hiện các nghiên cứu bằng các phương pháp tổng hợp về cực đại và cực tiểu, và đã đi đến lời giải cho các bài toán mà vào thời điểm đó đã vượt qua cả lời giải năng lực phân tích của phép tính biến thiên. Ông đã khái quát hóa *hexagrammum mysticum* và cả bài toán của Malfatti. [59] Malfatti, vào năm 1803, đã đề xuất bài toán cắt ba lỗ hình trụ ra khỏi một hình lăng trụ ba mặt sao cho hình trụ và hình lăng trụ có cùng độ cao và thể tích của hình trụ là lớn nhất. Bài toán này được rút gọn thành một bài toán khác,

ngày nay thường được gọi là bài toán Malfatti: nội tiếp ba đường tròn trong một tam giác sao cho mỗi đường tròn sẽ tiếp xúc với hai cạnh của một tam giác và với hai đường tròn còn lại. Malfatti đã đưa ra một giải pháp phân tích, nhưng Steiner đã đưa ra một cách xây dựng mà không cần chứng minh, nhận xét rằng có 32 giải pháp, tổng quát hóa vấn đề bằng cách thay thế ba đường thẳng bằng ba vòng tròn và giải quyết vấn đề tương tự cho không gian ba chiều. Vấn đề chung này đã được giải quyết bằng phương pháp phân tích bởi C. H. Schellbach (1809–1892) và Cayley, và bởi Clebsch với sự hỗ trợ của định lý bổ sung của các hàm elliptic. [60]

Các nghiên cứu của Steiner chỉ giới hạn trong hình học tổng hợp. Ông ghét phân tích kỹ lưỡng như Lagrange ghét hình học. *Gesammelte Werke* của Steiner đã được xuất bản tại Berlin vào năm 1881 và 1882.

Michel Chasles (1793–1880) sinh ra tại Epernon, nhập học Trường Bách khoa Paris năm 1812, sau đó tham gia kinh doanh, công việc mà sau này ông đã từ bỏ để dành toàn bộ thời gian của mình để theo đuổi khoa học. Năm 1841, ông trở thành giáo sư trắc địa và cơ học tại Trường Bách khoa, sau đó, "Professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris." Ông là một nhà văn viết nhiều về các chủ đề hình học Năm 1837, ông xuất bản *Aperçuhistorique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* đáng ngưỡng mộ của mình, bao gồm lịch sử hình học và, như một phụ lục, một chuyên luận "sur deux principes généraux de la Science." *Aperçu historyque* vẫn là một tác phẩm lịch sử tiêu chuẩn; phụ lục chứa lý thuyết chung về Homography (Collineation) và đối ngẫu (Reciprocity). Tên *duality* là do Joseph Diaz Gergonne (1771–1859). Chasles đã giới thiệu thuật ngữ *anharmonic ratio*, tương ứng với *Doppelverhältniss* của Đức và *cross-ratio* của Clifford. Chasles và Steiner đã xây dựng hình học xạ ảnh hoặc tổng hợp hiện đại một cách độc lập. Nhiều hồi ký gốc của Chasles đã được xuất bản sau đó trên *Journal de l'école Polytechnique*. Ông đã đưa ra một

quy giản về lập phương, khác với của Newton ở điểm này, rằng năm đường cong mà từ đó có thể chiếu tất cả các đường cong khác đều đối xứng qua một tâm. Năm 1864, ông bắt đầu xuất bản, trong *Comptes rendus*, các bài báo trong đó ông giải quyết bằng "phương pháp đặc trưng" và "nguyên tắc tương ứng" vô số vấn đề. Ví dụ, ông xác định số giao điểm của hai đường cong trong một mặt phẳng. Phương pháp đặc trưng chứa cơ sở của hình học liệt kê. Ứng dụng của nguyên lý tương ứng đã được mở rộng bởi Cayley, A. Brill, H. G. Zeuthen, H. A. Schwarz, G. H. Halphen (1844–1889), và những người khác. Toàn bộ giá trị của những nguyên tắc này của Chasles đã không được đưa ra cho đến khi xuất hiện vào năm 1879 của *Kalkü l der Abzählenden Geometrie* của Hermann Schubert ở Hamburg. Công trình này bao gồm một cuộc thảo luận tuyệt vời về vấn đề hình học liệt kê, nghĩa là xác định có bao nhiêu hình hình học của định nghĩa đã cho thỏa mãn một số điều kiện đủ. Schubert đã mở rộng hình học liệt kê của mình sang không gian *n* chiều. [55]

Với Chasles, chúng ta có được phần giới thiệu về hình học xạ ảnh của các tính chất phi xạ ảnh của các hình bằng đường tròn hình cầu tưởng tượng ở xa vô tận. [61] Đáng chú ý là lời giải hoàn chỉnh tưởng tượng của ông vào năm 1846 , bằng hình học tổng hợp, của câu hỏi khó về lực hút của một elip đối với một điểm bên ngoài. Điều này đã được Poisson hoàn thành bằng phương pháp phân tích trong năm 1835. Công sức của Chasles và Steiner đã nâng hình học tổng hợp lên một vị trí danh dự và được tôn trọng bên cạnh phân tích.

Karl Georg Christian von Staudt (1798–1867) sinh ra ở Rothenburg trên Tauber, và khi ông qua đời, là giáo sư tại Erlangen. Những tác phẩm vĩ đại của ông là *Geometrie der Lage*, Nürnberg, 1847, và *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 1856–1860. Tác giả đã loại bỏ khỏi công thức đại sốæ và các quan hệ số liệu, đặc biệt là tỷ lệ bất điều hòa của Steiner và Chasles, sau đó tạo ra một hình học vị trí mà tự nó là một ngành khoa học hoàn chỉnh, độc lập với tất cả đo. Ông chỉ ra rằng các tính chất xạ ảnh của các hình không phụ

thuộc vào bất kỳ phép đo nào, và có thể được thiết lập mà không cần đề cập đến chúng. Trong lý thuyết của mình về cái mà ông gọi là “Würfe”, ông thậm chí còn đưa ra định nghĩa hình học của một số trong mối quan hệ của nó với hình học như xác định vị trí của một điểm. *Beiträge* chứa lý thuyết tổng quát và đầy đủ đầu tiên về các điểm, đường thẳng và mặt phẳng tưởng tượng trong hình học xạ ảnh. Biểu diễn của một điểm tưởng tượng được tìm kiếm trong sự kết hợp của một phép quay có hướng xác định, cả trên đường thẳng thực qua điểm. Trong khi hoàn toàn mang tính xạ ảnh, phương pháp của von Staudt liên quan mật thiết đến vấn đề biểu diễn bằng các điểm thực tế và các đường thẳng tưởng tượng của hình học giải tích. Điều này được thực hiện một cách có hệ thống bởi C. F. Tuy nhiên, Maximilien Marie, người đã làm việc cho , trên những dòng hoàn toàn khác. Một nỗ lực độc lập đã được thực hiện gần đây (1893) bởi F. H. Loud of Colorado Cao đẳng. Hình học vị trí của Von Staudt đã bị bỏ qua trong một thời gian dài , chủ yếu, chắc chắn là vì cuốn sách của ông cực kỳ cô đọng. Culmann đã thôi thúc nghiên cứu chủ đề này, ông dựa trên công trình của von Staudt. Người phiên dịch von Staudt cuối cùng đã được tìm thấy ở Theodor Reye ở Strassburg, người đã viết *Geometrie der Lage* vào năm 1868.

Hình học tổng hợp đã được nghiên cứu rất thành công bởi **Luigi Cremona**, giáo sư tại Đại học Rome. Trong *Introduzione ad una teoria geometrya delle curve piane* của mình, ông đã phát triển bằng một phương pháp thống nhất nhiều kết quả mới và chứng minh một cách tổng hợp tất cả các kết quả quan trọng đạt được trước thời điểm đó bằng phân tích. Các bài viết của ông đã được dịch sang tiếng Đức bởi M. Curtze, giáo sư tại nhà thi đấu ở Thorn. Lý thuyết về sự biến đổi của các đường cong và sự tương ứng của các điểm trên các đường cong đã được ông mở rộng sang không gian ba chiều. Các bề mặt quy tắc, các bề mặt bậc hai, đường cong không gian bậc ba và lý thuyết tổng quát về các bề mặt đã nhận được nhiều sự chú ý dưới bàn tay của ông.

Karl Culmann, giáo sư tại Đại học Bách khoa ở Zürich, đã xuất bản một tác phẩm mở ra kỷ nguyên về *Die graphische Statik*, Zürich, 1864, đã thể hiện các số liệu thống kê đồ họa một đối thủ lớn của thống kê phân tích. Trước Culmann, *B. E. Cousinery* đã chuyển sự chú ý của mình sang phép tính đồ thị, nhưng ông đã sử dụng phối cảnh chứ không phải hình học hiện đại. [62] Culmann là người đầu tiên cam kết trình bày phép tính đồ thị dưới dạng một tổng thể đối xứng, giữ cùng một mối quan hệ với hình học mới mà cơ học phân tích làm với phân tích cao hơn. Ông sử dụng lý thuyết cực của các hình đối ứng để biểu thị mối quan hệ giữa lực và các đa giác hình phễu. Anh ta suy ra mối quan hệ này mà không rời khỏi mặt phẳng của hai hình. Nhưng nếu các đa giác được coi là hình chiếu của các đường trong không gian, thì các đường này có thể được coi là các phần tử đối ứng của một "Hệ không." Điều này được thực hiện bởi *Clerk Maxwell* vào năm 1864 và được *Cremona* xây dựng thêm. [63] phép tính đồ thị đã được *O. Mohr* của Dresden áp dụng cho đường đàn hồi cho các nhịp liên tục. Lời giải của các bài toán về ứng suất cực đại trong các cây cầu chịu tải trọng tập trung, với sự trợ giúp của cái mà ông gọi là "đa giác phản lực." Một tác phẩm tiêu chuẩn, *La Statique graphique*, 1874, do Maurice ban hành Levy của Paris.

Hình học mô tả (được Monge rút gọn thành một môn khoa học ở Pháp, và được những người kế nhiệm ông, *Hachette*, xây dựng thêm *Dupin*, *Olivier*, *J. de la Gournerie*) cũng đã sớm được nghiên cứu trong các nước khác. Người Pháp hướng sự chú ý của họ chủ yếu vào lý thuyết bề mặt và độ cong của chúng; người Đức và Thụy Sĩ, thông qua Schreiber, Pohlke, Schlessinger, và đặc biệt là Fiedler, đan xen hình học xạ ảnh và hình học mô tả. Bellavitis ở Ý cũng làm theo cách tương tự. Lý thuyết về sắc thái và bóng tối lần đầu tiên được nghiên cứu bởi các nhà văn Pháp vừa được trích dẫn, và ở Đức được Burmester nghiên cứu thấu đáo nhất. [62]

Trong thế kỷ hiện tại, những khái quát hóa rất đáng chú ý đã được thực hiện, chúng chạm đến tận gốc rễ của hai trong số những

nhánh lâu đời nhất của toán học,—đại số cơ bản và hình học. Trong đại số, các quy luật hoạt động đã được mở rộng; trong hình học, các tiên đề đã được tìm kiếm đến tận cùng của , và người ta đã đi đến kết luận rằng không gian được xác định bởi các tiên đề của Euclid không phải là không gian phi mâu thuẫn khả dĩ duy nhất. Euclid đã chứng minh (I. 27) rằng “nếu một đường thẳng cắt trên hai đường thẳng khác tạo thành các góc đối đỉnh bằng nhau thì hai đường thẳng đó song song với nhau.” Không thể chứng minh điều đó trong mọi trường hợp khác, hai đường thẳng không song song, anh ấy *cho rằng* điều này đúng với cái thường được gọi là “tiên đề” thứ 12, bởi một số “tiên đề thứ 11.” Nhưng cái gọi là tiên đề này còn xa lắm từ tiên đề. Sau nhiều thế kỷ nỗ lực tuyệt vọng nhưng không có kết quả để chứng minh giả định của Euclid, một ý tưởng táo bạo đã nảy ra trong đầu một số nhà toán học rằng một hình học có thể được xây dựng mà không cần sử dụng tiên đề song song. Trong khi Legendre vẫn cố gắng thiết lập tiên đề bằng cách chứng minh cứng nhắc, thì Lobatchewsky đã đưa ra một ấn phẩm giả định rằng mâu thuẫn với tiên đề đó, và đây là bài đầu tiên trong một loạt bài báo nhằm làm sáng tỏ những điều tối nghĩa trong các khái niệm cơ bản, và mở rộng đáng kể lĩnh vực hình học.

Nicholaus Ivanovitch Lobatchewsky (1793–1856) sinh ra tại Makarief, ở Nischni-Nowgorod, Nga, học tại Kasan, và từ 1827 đến 1846 là giáo sư và hiệu trưởng của Đại học Kasan. Quan điểm của ông về nền tảng của hình học lần đầu tiên được công bố trong một bài thuyết trình trước khoa vật lý và toán học tại Kasan, và lần đầu tiên được in trên tờ *Messenger* của Kasan vào năm 1829, sau đó trong *Gelehrte Schriften der Universität Kasan*, 1836–1838, với tiêu đề, “Các yếu tố mới của hình học, với một lý thuyết hoàn chỉnh về các đường song song.” Là trong tiếng Nga, tác phẩm vẫn chưa được người nước ngoài biết đến, nhưng ngay cả ở nhà nó cũng không thu hút được sự chú ý nào. Năm 1840, ông xuất bản một tuyên bố ngắn gọn về các nghiên cứu của mình ở Berlin. Lobatchewsky đã xây

dựng một "hình học tưởng tượng," như ông gọi nó, được Clifford mô tả là "khá đơn giản, chỉ đơn thuần là Euclid mà không có giả định luẩn quẩn." Một phần đáng chú ý của hình học này là ở chỗ, qua một điểm, có thể vẽ vô số đường thẳng trong một mặt phẳng, không có đường thẳng nào cắt một đường thẳng đã cho trên cùng một mặt phẳng .Một hệ thống hình học tương tự đã được suy luận độc lập bởi Bolyais ở Hungary, người đã gọi nó là "hình học tuyệt đối."

Wolfgang Bolyai de Bolya (1775–1856) sinh ra ở Szekler-Land, Transylvania. Sau khi học tại Jena, anh đến Göttingen, nơi anh trở nên thân thiết với Gauss, khi đó mười chín tuổi. Gauss từng nói rằng Bolyai là người duy nhất người hoàn toàn hiểu quan điểm của ông về siêu hình học của toán học. Bolyai trở thành giáo sư tại Đại học Cải cách Maros-Vásárhely, nơi mà trong suốt bốn mươi bảy năm, ông đã dành phần lớn thời gian cho các học trò của mình giáo sư của Transylvania. Các tác phẩm đầu tiên của thiên tài đáng chú ý này là kịch và thơ. Khoác trên mình bộ quần áo của người trồng trọt thời xưa, ông thực sự độc đáo trong cuộc sống riêng tư cũng như trong cách suy nghĩ của mình. Ông cực kỳ khiêm tốn. Không có tượng đài, nói anh ta, nên đứng trên mộ của mình, chỉ một cây táo, để tưởng nhớ ba quả táo; hai quả của Eve và Paris, thứ đã biến địa ngục thành địa ngục, và quả của Newton, đã nâng trái đất lên một lần nữa vào vòng tròn của các thiên thể. [64] Con trai của ông, **Johann Bolyai** (1802–1860), được đào tạo cho quân đội, và tự nhận mình là một nhà toán học sâu sắc, một người chơi vĩ cầm say mê và một vận động viên đấu kiếm cừ khôi. Anh ta từng chấp nhận lời thách đấu của mười ba sĩ quan với điều kiện sau mỗi cuộc đấu tay đôi, anh ta có thể chơi một bản nhạc trên cây vĩ cầm của mình, và anh ta đã đánh bại tất cả.

Công trình toán học chính của Wolfgang Bolyai xuất hiện trong hai tập, 1832–1833, có tựa đề *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos puræ ... introducendi*. Tiếp theo là phần phụ lục do con trai ông Johann soạn trên *Khoa học tuyệt đối về không*

gian. Hai mươi sáu trang của nó đã làm nên tên tuổi của Johann Bolyai bất tử. Ông không xuất bản gì khác, nhưng ông đã để lại một nghìn trang bản thảo mà chưa một nhà toán học có năng lực nào đọc được! Cha của anh ấy dường như là người duy nhất ở Hungary thực sự đánh giá cao công lao của con trai mình. Trong ba mươi lăm năm, phụ lục này, cũng như các nghiên cứu của Lobatchewsky, hầu như bị lãng quên hoàn toàn. Cuối cùng Richard Baltzer của Đại học Giessen, vào năm 1867, đã kêu gọi sự chú ý đến những nghiên cứu tuyệt vời này. *Khoa học tuyệt đối Không gian* của Johann Bolyai và *Nghiên cứu hình học của Lobatchewsky về Thuyết song song* (1840) đã được hiển thị để có thể truy cập dễ dàng Độc giả Mỹ qua bản dịch sang tiếng Anh do George Bruce Halsted của Đại học Texas thực hiện năm 1891.

Các nhà toán học Nga và Hungary không phải là những người duy nhất đề xuất phép đo toàn cảnh. Một bản sao của *Tentamen* đã đến tay Gauss, bạn cùng phòng cũ của anh cả Bolyai tại Göttingen, và Nestor của các nhà toán học người Đức đã rất ngạc nhiên khi phát hiện ra điều này trong đó đã tìm ra những gì bản thân ông đã bắt đầu từ rất lâu trước đó, chỉ để lại nó sau ông trong các bài báo của mình. Ngay từ năm 1792, ông đã bắt đầu nghiên cứu về nhân vật đó. Những lá thư của ông cho thấy rằng vào năm 1799, ông đã cố gắng chứng minh *a priori* thực tế của hệ thống Euclid; nhưng đôi khi trong vòng ba mươi năm sau đó, ông đã đi đến kết luận mà Lobatchewsky và Bolyai đã đạt được. Năm 1829, ông viết thư cho Bessel, nói rằng " niềm tin của ông rằng chúng ta không thể tìm thấy hình học hoàn toàn a priori đã trở thành, nếu có thể, vẫn vững chắc hơn" và rằng "nếu số chỉ đơn thuần là sản phẩm của tâm trí chúng ta, thì không gian cũng có *thực tế bên ngoài* tâm trí của chúng ta mà chúng ta không thể định trước đầy đủ các định luật *a priori*." Thuật ngữ *hình học phi Euclide* là do Gauss đặt ra. Tôi được thông báo rằng *Geronimo Saccheri*, một cha dòng Tên của Milan, vào năm 1733 đã dự đoán học thuyết của Lobatchewsky về

góc song song. Hơn nữa, G. B. Halsted đã chỉ ra rằng vào năm 1766 Lambert đã viết một bài báo "Zur Theorie der Parallellinien," được đăng trên *Leipziger Magazin für reine und angewante Mathematik* , 1786, trong đó: (1) Sự thất bại của tiên đề song song trong mặt cầu mang lại một hình học có tổng các góc > 2 các góc vuông; (2) Để tạo ra một hình học có tổng các góc bằng trực giác < 2 vuông góc chúng ta cần sự trợ giúp của một "hình cầu tưởng tượng" (hình cầu giả); (3) Trong không gian có tổng góc khác 2 góc vuông thì tồn tại số đo tuyệt đối (đơn vị đo độ dài tự nhiên của Bolyai).

Năm 1854, gần hai mươi năm sau, Gauss nghe được từ học trò của mình, *Riemann*, một luận án tuyệt vời đưa cuộc thảo luận tiến thêm một bước nữa bởi phát triển khái niệm về cường độ mở rộng n-ply và quan hệ đo lường trong đó đa tạp có n kích thước có khả năng, dựa trên giả định rằng mọi đường có thể được đo bởi mọi đường khác. Riemann đã áp dụng ý tưởng của mình vào không gian. Ông đã dạy chúng tôi phân biệt giữa "không giới hạn" và "phạm vi vô hạn." Theo với ông, chúng tôi có trong đầu một khái niệm tổng quát hơn về không gian, tức là một khái niệm về không gian phi Euclide; nhưng chúng tôi học được *bằng kinh nghiệm* rằng không gian vật lý của chúng tôi, nếu không chính xác, ít nhất là ở mức độ gần đúng cao, không gian Euclide. Luận án sâu sắc của Riemann mãi đến năm 1867 mới được xuất bản, khi nó xuất hiện trong *Göttingen Abhandlungen*. Trước đó, ý tưởng về n-dimensions đã tự đề xuất dưới nhiều khía cạnh khác nhau đối với Lagrange, Plüker, và H. Grassmann. Về cùng thời điểm với bài báo của Riemann, những bài khác được xuất bản từ các cây bút của *Helmholtz* và *Beltrami*. Những điều này đã góp phần mạnh mẽ vào chiến thắng của logic trước chủ nghĩa kinh nghiệm thái quá. Giai đoạn này đánh dấu sự khởi đầu của các cuộc thảo luận sôi nổi về vấn đề này Một số tác giả—Ví dụ như Bellavitis—đã có thể nhìn thấy trong hình học phi Euclide và không gian n-hông có gì khác ngoài những bức tranh biếm họa khổng lồ hoặc những phát triển bệnh hoạn của

toán học. Bài báo của Helmholtz có nhan đề *Thatsachen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, 1868, chứa đựng nhiều ý tưởng của Riemann.

Eugenio Beltrami, sinh năm 1835 tại Cremona, Ý, hiện là giáo sư tại Rome, đã viết bài báo cổ điển *Saggio di translateazione della geometria non-euclidea* (Giorn. di Matem., 6), đó là phân tích (và, giống như một số bài báo khác, nên được đề cập ở nơi khác nếu chúng tôi tuân thủ sự tách biệt nghiêm ngặt giữa tổng hợp và phân tích). Ông đã đi đến kết luận tuyệt vời và đáng ngạc nhiên rằng các định lý của hình học phi Euclid tìm thấy sự thực hiện của chúng trên các bề mặt có độ cong âm không đổi. Ông cũng nghiên cứu các bề mặt có độ cong dương không đổi, và kết thúc với định lý thú vị rằng không gian có độ cong dương không đổi được chứa trong không gian có độ cong âm không đổi. Những nghiên cứu này của Beltrami, Helmholtz, và Riemann đã đi đến kết luận rằng trên các bề mặt có độ cong không đổi, chúng ta có thể có ba dạng hình học, — phi Euclide trên bề mặt có độ cong âm không đổi, hình cầu trên bề mặt có độ cong dương không đổi và hình học Euclide trên bề mặt có độ cong bằng không. Ba hình học không mâu thuẫn với nhau, mà là thành viên của một hệ thống,—một bộ ba hình học. Ý tưởng về hyperspace đã được Clifford giải thích và phổ biến một cách xuất sắc ở nước Anh.

William Kingdon Clifford (1845–1879) sinh ra tại Exeter, học tại Trinity College, Cambridge, và từ năm 1871 cho đến khi ông qua đời là giáo sư toán ứng dụng tại University College, London. Cái chết sớm của anh ấy đã để lại một số nghiên cứu tuyệt vời mà anh ấy đã tham gia. Trong số này có bài viết *Về phân loại Loci* và *Lý thuyết đồ thị* của anh ấy. Ông đã viết các bài báo về *Về hình thức chính tắc và sự mổ xẻ bề mặt của Riemann*, về *Biquaternions*, và một tác phẩm chưa hoàn chỉnh về *Các phần tử của động*. Lý thuyết về các cực của đường cong và bề mặt được ông và Reye tổng quát hóa. Phân loại quỹ tích của ông, năm 1878, là một nghiên cứu chung

về các đường cong, là phần mở đầu cho nghiên cứu về không gian n-chiều theo hướng chủ yếu là xạ ảnh. Nghiên cứu này đã được tiếp tục chủ yếu bởi G. Veronese xứ Padua, C. Segre of Turin, E. Bertini, F. Aschieri, P. Del Pezzo xứ Napoli.

Các nghiên cứu của Beltrami về hình học phi Euclide đã được nối tiếp, vào năm 1871, bởi các nghiên cứu quan trọng của Felix Klein, dựa trên *Hồi ký thứ sáu về lượng tử của Cayley* , 1859. Câu hỏi liệu có thể biểu diễn các thuộc tính số liệu của các hình sao cho chúng không thay đổi theo phép chiếu (hoặc phép biến đổi tuyến tính) hay không đã được Chasles giải quyết cho các phép chiếu đặc biệt, Poncelet, và E. Laguerre (1834–1886) của Paris, nhưng Cayley vẫn để tướng giải bằng cách xác định khoảng cách giữa hai điểm dưới dạng một hằng số tùy ý nhân với logarit của tỷ số bất điều hòa trong đó đường nối hai điểm được chia cho tứ giác cơ bản. Mở rộng khái niệm này, Klein đã chỉ ra tính độc lập của hình học xạ ảnh khỏi tiên đề song song, và bằng cách chọn đúng định luật đo khoảng cách được suy ra từ hình học xạ ảnh hình cầu, Euclide và giả cầu hình học, được ông đặt tên lần lượt là hình học elliptic, parabol và hyperbolic. Cuộc điều tra mang tính gợi ý này đã được nhiều nhà văn theo dõi, đặc biệt là G. Battaglini ở Napoli, E. d'Ovidio ở Turin, R. de Paolis của Pisa, F. Aschieri, A. Cayley, F. Lindemann của Munich, E. Schering của Göttingen, W. Story of Clark Đại học, H. Stahl of Tübingen, A. Voss of Wü rzburg, Homersham Cox, A. Buchheim. [55] Hình học của n kích thước đã được nghiên cứu cùng một dòng chủ yếu mang tính chất thơ của nhiều nhà văn, trong số đó có thể kể đến Simon Newcomb của the Johns Hopkins University, L. Schläfli of Bern, W. I . Stringham của Đại học California, W. Killing of Münster, T. Craig of Johns Hopkins, R. Lipschitz của Bonn. R. S. Heath và Killing đã nghiên cứu động học và cơ học của một không gian như vậy. Chất rắn thông thường trong không gian n-chiều đã được nghiên cứu bởi Stringham, Ellery W. Davis của Đại học Nebraska, R. Hoppe của Berlin và những người khác. Stringham đã đưa ra những bức tranh

về các phép chiếu lên không gian của các chất rắn thông thường của chúng ta trong bốn chiều, và Schlegel tại Hagen đã xây dựng các mô hình của các phép chiếu như vậy. Đây là trong số những mô hình gây tò mò nhất trong một loạt các mô hình do L. Brill xuất bản ở Darmstadt. Người ta đã chỉ ra rằng nếu chiều thứ tư tồn tại, thì một số chuyển động nhất định có thể diễn ra mà chúng ta cho là không thể. Do đó, Newcomb đã cho thấy khả năng biến một lớp vỏ vật liệu kín từ trong ra ngoài bằng cách uốn đơn giản mà không bị giãn hoặc rách; Klein đã chỉ ra rằng không thể thắt nút; Veronese đã chỉ ra rằng một thi thể có thể được đưa ra khỏi phòng kín mà không làm vỡ tường; C. S. Peirce đã chứng minh rằng một vật thể trong không gian gấp bốn lần hoặc quay quanh hai trục cùng một lúc hoặc không thể quay mà không làm mất đi một trong các kích thước của nó.

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH

Trong chương trước, chúng tôi đã cố gắng đưa ra một cái nhìn thoáng qua về sự tiến bộ nhanh chóng của hình học tổng hợp. Liên quan đến siêu không gian, chúng tôi cũng đã đề cập đến các chuyên luận phân tích. Hình học tổng hợp hiện đại và hình học giải tích hiện đại có nhiều điểm chung, và có thể được nhóm lại với nhau dưới cái tên chung là "hình học xạ ảnh." Mỗi loại có ưu điểm hơn loại kia. Việc liên tục xem trực tiếp các hình tồn tại trong không gian tạo thêm sức hấp dẫn đặc biệt cho việc nghiên cứu cái trước, nhưng cái sau có lợi thế ở điểm này, rằng một thói quen được thiết lập tốt ở một mức độ nhất định có thể vượt qua chính suy nghĩ, và do đó hỗ trợ nghiên cứu ban đầu. Khi ở Đức, Steiner và von Staudt đã phát triển hình học tổng hợp, Plücker đã đặt nền móng cho hình học giải tích hiện đại.

Julius Plücker (1801–1868) sinh ra tại Elberfeld, Phổ. Sau khi học tại Bon, Berlin và Heidelberg, ông đã có một thời gian ngắn ở Paris để tham dự các bài giảng của Monge và các học trò của ông .

Từ năm 1826 đến năm 1836, ông giữ các chức vụ liên tiếp tại Bonn, Berlin và Halle. Sau đó, ông trở thành giáo sư vật lý tại Bonn. Cho đến năm 1846, các nghiên cứu ban đầu của ông là về hình học. Năm 1828 và năm 1831, ông xuất bản *Analytisch-Geometrische Entwicklungen* thành hai tập. Trong đó, ông đã sử dụng ký hiệu viết tắt (được Bobillier sử dụng trước ông theo một cách hạn chế hơn), và tránh quá trình tẻ nhạt của phép loại bỏ đại số bằng phép tính hình học. Trong giây thứ hai thể tích, nguyên tắc đối ngẫu được xây dựng bằng phương pháp phân tích. Với anh ấy, tính đối ngẫu và tính đồng nhất đã tìm thấy biểu thức đã có trong hệ tọa độ của anh ấy. Hệ thống ba tuyến tính đồng nhất hoặc được sử dụng bởi anh ấy cũng giống như co-o thứ tự của Möbius. Để nhận dạng hoạt động phân tích và cấu trúc hình học, Plücker đã tìm kiếm nguồn chứng minh của của mình. *System der Analytischen Geometrie*, 1835, bao gồm sự phân loại đầy đủ các đường cong phẳng bậc ba, dựa trên bản chất của các điểm ở vô cực. *Theorie der Algebraischen Curven*, 1839, bên cạnh việc liệt kê các đường cong bậc 4, quan hệ giải tích giữa các điểm kỳ dị thông thường của các đường cong phẳng được gọi là "Plücker's phương trình," mà nhờ đó ông có thể giải thích "Nghịch lý Poncelet." Việc phát hiện ra những mối quan hệ này , Cayley nói, "điều quan trọng nhất vượt xa mọi so sánh trong toàn bộ chủ đề của hình học hiện đại." Nhưng ở Đức, các nghiên cứu của Plücker không được ưu ái. Phương pháp của ông được tuyên bố là không hiệu quả so với phương pháp tổng hợp của Steiner và Poncelet! Mối quan hệ của anh ấy với Jacobi không hoàn toàn thân thiện. Steiner từng tuyên bố rằng anh ấy sẽ ngừng viết cho *Crelle's Journal* nếu Plücker tiếp tục đóng góp cho nó. [66] Kết quả là rất nhiều Các nghiên cứu của Plücker đã được xuất bản trên các tạp chí nước ngoài và công trình của ông được biết đến ở Pháp và Anh nhiều hơn ở quê hương của ông. Người ta cũng buộc tội Plücker rằng, mặc dù chiếm ghế khoa vật lý, nhưng ông không phải là nhà vật lý. Điều này khiến ông từ bỏ toán học và dành gần hai mươi năm để cống

hiến sức lực của mình đến vật lý. Những khám phá quan trọng về bề mặt sóng, từ tính, phân tích quang phổ của Fresnel đều do ông thực hiện. Nhưng về cuối đời, ông quay lại với tình yêu đầu tiên của mình,—toán học,—và làm phong phú nó bằng những khám phá mới. Bằng cách coi không gian được tạo thành từ các đường thẳng, ông đã tạo ra một "hình học mới của không gian." Coi một đường thẳng là một đường cong bao gồm bốn tham số tùy ý, người ta có toàn bộ hệ thống các đường thẳng trong không gian. Bằng cách kết nối chúng bằng một mối quan hệ duy nhất, ông đã có một "phức hợp" các đường; bằng cách kết nối chúng với một mối quan hệ gấp đôi, ông đã có được một "sự đồng dạng" của các đường. Những nghiên cứu đầu tiên của ông về chủ đề này đã được trình bày trước Hội Hoàng gia vào năm 1865. Các cuộc điều tra sâu hơn của ông sau đó xuất hiện vào năm 1868 trong một tác phẩm di cảo có tựa đề textitNeue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, do Felix Klein biên tập. Làm ơnüphân tích của cker thiếu sự tao nhã được tìm thấy ở Lagrange, Jacobi, Hesse và Clebsch. Trong nhiều năm, ông đã không theo kịp sự phát triển của hình học, vì vậy nhiều cuộc điều tra cuối cùng của ông công trình đã nhận được sự đối xử chung chung hơn từ phía những người khác. Tuy nhiên, công trình này chứa đựng nhiều điều mới mẻ và độc đáo. Lý thuyết phức chất cấp hai, do Plücker bỏ dở, được tiếp tục bởi Felix Klein, người đã mở rộng và bổ sung rất nhiều ý tưởng của chủ nhân mình.

Ludwig Otto Hesse (1811–1874) sinh ra tại Königsberg, và học tại trường đại học ở quê hương ông dưới tên Bessel, Jacobi, Richelot, và F. Neumann. Đã lấy bằng bác sĩ năm 1840, ông trở thành học giả tại Königsberg, và năm 1845 là giáo sư phi thường tại đó. Trong số các học trò của ông lúc bấy giờ có Durège, Carl Neumann, Clebsch, Kirchhoff. Thời kỳ Königsberg là một trong những hoạt động tuyệt vời đối với Hessen. Mỗi khám phá mới đều làm tăng thêm nhiệt huyết của ông để đạt được thành tựu lớn hơn nữa. Thời kỳ đầu tiên

của ông nghiên cứu về các bề mặt bậc hai, và một phần là tổng hợp. Ông đã giải bài toán dựng bất kỳ điểm phần mười nào của một bề mặt như vậy khi có chín điểm. Bài toán tương tự cho một conic đã được Pascal giải bằng quẻ. Một bài toán khó mà các nhà toán học đương thời phải đối mặt là bài toán loại trừ. Plücker đã thấy rằng ưu điểm chính của phương pháp đặc biệt của ông trong hình học giải tích nằm ở việc tránh loại bỏ đại số. Tuy nhiên, Hesse đã chỉ ra cách sử dụng định thức để loại bỏ đại số dễ dàng. Trong các kết quả trước đó của mình, ông đã được dự đoán bởi Sylvester, người đã công bố phương pháp loại bỏ của ông vào năm 1840. Những tiến bộ này trong đại số Hesse đã áp dụng cho nghiên cứu giải tích các đường cong bậc ba. Bằng phép thế tuyến tính, ông đã rút gọn một dạng bậc ba gồm ba biến thành một trong bốn số hạng duy nhất, và dẫn đến một định thức quan trọng liên quan đến hệ số vi phân thứ hai của một dạng bậc ba, được gọi là “Hessian”. “Hessian” đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết bất biến, một chủ đề được Cayley nghiên cứu đầu tiên. Hesse đã chỉ ra rằng định thức của ông cho mỗi đường cong một đường cong khác, sao cho các điểm kép của đường thứ nhất là các điểm trên đường thứ hai, hay “Hessian." Tương tự như vậy đối với các bề mặt (Crelle, 1844). Nhiều các định lý quan trọng nhất trên các đường cong bậc ba là do Hesse. Ông xác định đường cong bậc 14 đi qua 56 điểm tiếp xúc của 28 hai tiếp tuyến của một đường cong bậc 4. Cuốn hồi ký tuyệt vời của ông về chủ đề này (Crelle, 1855) được xuất bản cùng lúc với bài báo của Steiner về cùng chủ đề.

Thu nhập của Hesse tại Königsberg không theo kịp với danh tiếng ngày càng tăng của ông. Ông hầu như không thể nuôi sống bản thân và gia đình. Năm 1855, ông nhận một vị trí béo bở hơn tại Halle, và vào năm 1856 tại Heidelberg. Ông vẫn ở đây cho đến năm 1868, khi ông nhận một vị trí tại một trường kỹ thuật ở Munich. [67] Tại Heidelberg, ông đã sửa đổi và mở rộng các nghiên cứu trước đây của và xuất bản *Vorlesungen của mình vào*

năm 1861 über die Analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Flächen 2. Ordnung. Nhiều công trình tiểu học ngay sau đó. Trong khi ở Heidelberg, ông đã xây dựng một nguyên lý, “Uebertragungsprincip." Theo đó, tương ứng với mọi điểm trong một mặt phẳng là một cặp điểm trên một đường thẳng, và hình học xạ ảnh của mặt phẳng có thể được đưa trở lại hình học của các điểm trên một đường thẳng.

Các nghiên cứu về Plücker và Hesse được tiếp tục ở Anh bởi Cayley, Salmon và Sylvester. Có thể lấy tiền đề ở đây rằng trong số những tác giả đầu tiên về hình học giải tích ở Anh có **James Booth** (1806–1878), người có kết quả chính được thể hiện trong của mình textitLuận về một số phương pháp hình học mới; và **James MacCullagh** (1809–1846), là giáo sư triết học tự nhiên tại Dublin, và đã thực hiện một số khám phá có giá trị về lý thuyết quadric. ảnh hưởng của những người này đối với sự tiến bộ của hình học là không đáng kể, vì việc trao đổi các kết quả khoa học giữa các quốc gia khác nhau vào thời điểm đó chưa hoàn thiện như mong muốn. Để minh họa thêm cho điều này, chúng tôi đề cập rằng Chasles ở Pháp đã xây dựng đối tượng đã được Steiner xử lý trước đó ở Đức và Stei gần 5 năm trước đó đã công bố các nghiên cứu do Cayley, Sylvester và Salmon đưa ra. Cayley và Salmon vào năm 1849 đã xác định các đường thẳng trong một mặt lập phương và nghiên cứu các tính chất chính của nó, trong khi Sylvester vào năm 1851 đã phát hiện ra ngũ diện của một mặt như vậy. Cayley đã mở rộng các phương trình của Plücker thành các đường cong của các điểm kỳ dị cao hơn. Các nghiên cứu của chính Cayley và của M. Nöther của Erlangen, G. H. Halphen (1844–1889) của Trường Bách khoa ở Paris, De La Gournerie của Paris, A . Brill của Tübingen, dẫn đến kết luận rằng mỗi điểm kỳ dị cao hơn của một đường cong tương đương với một số điểm kỳ dị đơn giản nhất định,—nút, đỉnh thông thường , tiếp tuyến đôi, và điểm uốn. Sylvester đã nghiên cứu “Xoắn Descartes,” một đường cong bậc bốn. Salmon đã giúp đỡ rất nhiều

trong việc truyền bá kiến thức về các phương pháp đại số và hình học mới bằng cách xuất bản một loạt sách giáo khoa xuất sắc (*Conic Sections*, *Modern Higher Algebra*, *Higher Plane Curves* , *Hình học của ba chiều*), đã được đặt trong tầm tay độc giả Đức bằng một bản dịch miễn phí, có bổ sung, do Wilhelm Fiedler của Polytechnicum in Zürich thực hiện. Người thợ vĩ đại tiếp theo trong lĩnh vực hình học giải tích là Clebsch.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch (1833–1872) sinh ra tại Königsberg ở Phổ, học tại trường đại học của nơi đó dưới Hessen, Richelot, F. Neumann. Từ 1858 đến 1863, ông giữ chức chủ tịch khoa cơ học lý thuyết tại Đại học Bách khoa ở Carlsruhe. Nghiên cứu về Các công trình của Salmon đã đưa ông đến với đại số và hình học. Năm 1863, ông nhận một vị trí tại Đại học Giessen, nơi ông làm việc cùng với Paul Gordan (nay thuộc Erlangen). Năm 1868, Clebsch chuyển đến Göttingen, và ở đó cho đến khi qua đời. Ông làm việc liên tiếp trong các chủ đề sau: Vật lý toán học, phép tính biến thiên và phương trình đạo hàm riêng cấp một, lý thuyết tổng quát về đường cong và bề mặt, hàm số Abelian và ứng dụng của chúng trong hình học, lý thuyết về bất biến , và "Flächenabbildung." [68] Anh ấy đã chứng minh các định lý về ngũ diện do Sylvester và Steiner phát biểu; anh ấy đã sử dụng "deficiency' một cách có hệ thống ' (*Geschlecht*) như một nguyên tắc cơ bản trong việc phân loại các đường cong đại số. Khái niệm về độ thiếu đã được Abel và Riemann biết đến trước ông. Khi bắt đầu sự nghiệp của mình, Clebsch đã chỉ ra cách các hàm elip có thể được áp dụng một cách thuận lợi cho bài toán Malfatti. Ý tưởng liên quan đến nó, tức là. việc sử dụng của các phép siêu việt cao hơn trong nghiên cứu hình học, đã dẫn dắt ông cho những khám phá vĩ đại nhất của ông. Ông không chỉ áp dụng Abelian đối với hình học, nhưng ngược lại, ông đã đưa hình học vào phục vụ cho các hàm Abelian.

Clebsch đã sử dụng tự do các định thức. Nghiên cứu của ông về các đường cong và bề mặt bắt đầu bằng việc xác định các điểm tiếp

xúc của các đường cắt một bề mặt tại bốn điểm liên tiếp. Salmon đã chứng minh rằng những điểm này nằm trên giao điểm của mặt với mặt dẫn xuất có bậc $11n-24$, nhưng lời giải của ông được đưa ra ở dạng bất tiện. Cuộc điều tra của Clebsch trên đó là một phần phân tích đẹp nhất.

Biểu diễn của một bề mặt trên một bề mặt khác (*Flächenabbildung*), để chúng có sự tương ứng $(1,1)$, đã được nghiên cứu kỹ lưỡng cho lần đầu tiên bởi Clebsch. Biểu diễn một hình cầu trên một mặt phẳng là một bài toán cũ đã thu hút sự chú ý của Ptolemæus, Gerard Mercator, Lambert, Gauss, Lagrange. Tầm quan trọng của nó trong việc xây dựng các bản đồ là hiển nhiên. Gauss là người đầu tiên biểu diễn một bề mặt trên một bề mặt khác với quan điểm dễ dàng đi đến các tính chất của nó. Plücker, Chasles, Cayley, do đó được biểu diễn trên một mặt phẳng hình học của các bề mặt quadric; Clebsch và Cremona, của mặt lập phương. Các bề mặt khác đã được nghiên cứu theo cách tương tự bởi các tác giả gần đây, đặc biệt là M. Nöther of Erlangen, Armenante, Felix Klein, Korndörfer, Caporali, H. G. Zeuthen của Copenhagen. Một câu hỏi cơ bản cho đến nay chỉ nhận được một phần câu trả lời là: Những mặt nào có thể được biểu diễn bằng một tương ứng $(1,1)$ trên một mặt cho trước? Điều này và câu hỏi tương tự cho các đường cong đã được nghiên cứu bởi Clebsch. Sự tương ứng cao hơn giữa các bề mặt đã được Cayley và Nöther nghiên cứu. Lý thuyết về các bề mặt cũng đã được nghiên cứu bởi **Joseph Alfred Serret** (1819–1885), giáo sư tại Sorbonne ở Paris, **Jean Gaston Darboux** của Paris, *John Casey* của Dublin (mất năm 1891), *W. R. W. Roberts* của Dublin, *H. Schröter* (1829–1892) của Breslau. Các bề mặt của bậc 4 đã được nghiên cứu bởi Kummer và , do Hamilton nghiên cứu, là một trường hợp cụ thể của Mặt tứ giác Kummer, với mười sáu điểm chính tắc và mười sáu mặt phẳng tiếp tuyến. [56]

Phép tính vi phân lần đầu tiên được áp dụng để xác định số đo độ cong của các bề mặt theo Lagrange, Euler và Meusnier (1754–1793)

của Paris. Sau đó, theo sau các nghiên cứu của Monge và Dupin, nhưng chúng bị lu mờ bởi công trình của Gauss, người đã xử lý chủ đề khó này theo một cách đã mở ra những viễn cảnh mới cho các nhà hình học. Cách xử lý của ông được thể hiện trong *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (1827) và *Untersuchungen über gegenstände der höheren Geodäsie* năm 1843 và 1846. Ông định nghĩa số đo độ cong tại một điểm là nghịch đảo của tích hai bán kính cong chính tại điểm đó. Từ đó nảy sinh định lý của *Johann August Grunert* (1797–1872; giáo sư tại Greifswald), rằng trung bình cộng của bán kính cong của tất cả các tiết diện thông thường đi qua một điểm là bán kính của một hình cầu có cùng số đo độ cong như có bề mặt tại điểm đó. Suy luận của Gauss về công thức độ cong đã được đơn giản hóa thông qua việc sử dụng các định thức bởi *Heinrich Richard Baltzer* (1818–1887) của Giessen. [69] Gauss đã thu được một định lý thú vị rằng nếu một bề mặt được phát triển (*abgewickelt*) trên một bề mặt khác, số đo độ cong không thay đổi tại mỗi điểm. Câu hỏi liệu hai bề mặt có cùng độ cong tại các điểm tương ứng có thể tháo rời nhau hay không, đã được F. Minding trả lời khẳng định chỉ khi độ cong không đổi. Trường hợp độ cong thay đổi rất khó và đã được nghiên cứu bởi Minding, J. Liouville (1806–1882) của Trường Bách khoa ở Paris, Ossian Bonnet ở Paris (mất năm 1892). Phép đo độ cong của Gauss, được biểu thị dưới dạng hàm của tọa độ đường cong, đã tạo động lực cho việc nghiên cứu các bất biến vi phân, hoặc tham số vi phân, đã được nghiên cứu bởi Jacobi, C. Neumann, Sir James Cockle, Halphen, và được Beltrami, S. Lie, và những người khác xây dựng thành lý thuyết chung. Beltrami cũng chỉ ra mối liên hệ giữa số đo độ cong và các tiên đề hình học.

Nhiều nghiên cứu khác nhau đã được đưa ra dưới sự lãnh đạo của “analysis situs.” Chủ đề này lần đầu tiên được nghiên cứu bởi Leibniz, và sau đó được Gauss xử lý, người có lý thuyết về knots (*Verschlingungen*) đã được J. B sử dụng gần đây. Listing, O. Simony, F. Dingeldey, và những người khác trong các nghiên cứu “topologic

của họ.” Tait đã được Sir William Thomson dẫn dắt đến nghiên cứu về các nút thắt. thuyết xoáy nguyên tử. Trong tay của Riemann, vị trí phân tích đã dành cho đối tượng của nó quyết định về những gì không thay đổi dưới các phép biến đổi do sự kết hợp của vô cùng nhỏ mang lại biến dạng. Để tiếp tục công việc của mình, Walter Dyck ở Munich đã viết trên vị trí phân tích của không gian ba chiều.

Đối với những sách giáo khoa hình học chưa được đề cập, nên tham khảo **Alfred Clebsch's** *Vorlesungen über Geometrie*, do Ferdinand Lindemann biên tập, hiện thuộc Munich; **Frost's** *Solid Geometry*; **Durège's** *Ebene Curven dritter Ordnung*.

ĐẠI SỐ

Sự tiến bộ của đại số trong thời gian gần đây có thể được xem xét dưới ba tiêu đề chính: nghiên cứu các định luật cơ bản và sự ra đời của các đại số mới, sự phát triển của lý thuyết phương trình và sự phát triển của cái được gọi là đại số cao hơn hiện đại.

Chúng ta đã nói về George Peacock và D. F. Gregory liên quan đến các định luật cơ bản của đại số. De Morgan đã làm được nhiều điều trong dòng này.

Augustus De Morgan (1806–1871) sinh ra tại Madura (Madras), và học tại Trinity College, Cambridge. Sự đắn đo của anh ấy về các học thuyết của nhà thờ lâu đời đã ngăn cản anh ấy tiếp tục học lên bằng MA và không được tham gia học bổng. Năm 1828, ông trở thành giáo sư tại Đại học London mới thành lập, và giảng dạy ở đó cho đến năm 1867, ngoại trừ 5 năm, từ 1831-1835. De Morgan là một người có cá tính độc đáo, nam tính và là một giáo viên xuất sắc. Giá trị của công trình ban đầu của ông không nằm ở chỗ làm tăng thêm kho kiến thức toán học của chúng ta mà nằm ở việc đặt tất cả chúng trên một cơ sở logic hoàn toàn. Anh ấy cảm thấy sâu sắc sự thiếu lập luận chặt chẽ trong toán học khi anh ấy nhận được nó. Anh ấy đã từng nói: “Chúng tôi biết rằng các nhà toán học không

quan tâm đến logic nhiều hơn các nhà logic cho toán học. Hai con mắt của khoa học chính xác là toán học và logic học: phái toán học đưa ra con mắt logic học, phái logic học đưa ra con mắt toán học; mỗi người tin rằng nó có thể nhìn rõ hơn bằng một mắt hơn là bằng hai mắt.” De Morgan nhìn thấy bằng cả hai mắt. Ông phân tích logic toán học, và nghiên cứu phân tích logic các định luật, ký hiệu và phép toán; ông đã viết một *Logic hình thức* cũng như một *Đại số kép*, và trao đổi thư từ cả hai với Ngài William Hamilton, nhà siêu hình học, và Ngài William Rowan Hamilton, nhà toán học. Rất ít người đương thời có khả năng nghiên cứu sâu sắc về lịch sử toán học như De Morgan. Không có chủ đề nào quá tầm thường để nhận được sự chú ý của anh ấy. Quyền tác giả của “Cocker’s Arithmetic” và công việc của phép tính bình phương hình tròn đã được nghiên cứu tỉ mỉ như lịch sử phát minh ra phép tính của . Vô số bài viết về lời nói dối của ông nằm rải rác trong các tập của *Penny* và *English Cyclopædias*. *Phép tính vi phân* của ông, 1842, vẫn là một tác phẩm tiêu chuẩn và chứa đựng nhiều điều nguyên bản của tác giả. Đối với *Encyclopae dia Metropolitana*, ông đã viết về phép tính hàm (đưa ra các nguyên tắc suy luận ký hiệu) và về lý thuyết xác suất. Nổi tiếng là *Ngân sách nghịch lý* của ông, năm 1872. Ông đã xuất bản hồi ký “Về nền tảng của đại số” (*Trans. of Cam. Phil. Soc.*, 1841, 1842, 1844, và 1847).

Ở Đức, đại số ký hiệu đã được nghiên cứu bởi Martin Ohm, , người đã viết *System der Mathematik* vào năm 1822. Ý tưởng của Peacock và De Morgan thừa nhận khả năng của đại số khác với đại số thông thường. Những đại số như vậy thực sự không chậm chạp trong việc ra đời, nhưng giống như hình học phi Euclide, một số trong số chúng chậm được công nhận. Điều này đúng với những khám phá của Grassmann, Bellavitis và Peirce, nhưng các bậc bốn của Hamilton gặp phải ngay lập tức được đánh giá cao ở Anh. Những đại số này cung cấp một giải thích hình học của trí tưởng tượng. Vào thời của Descartes, Newton và Euler, chúng ta đã thấy điều tiêu cực và điều

tưởng tượng, $\sqrt{-1}$, được chấp nhận là số, nhưng số sau vẫn được coi là hư cấu đại số. Người đầu tiên đưa ra một bức tranh hình học, tương tự như cách giải thích hình học của âm bản, là *H. Kühn*, một giáo viên ở Danzig, trong một ấn phẩm của 1750–1751. Anh ấy biểu diễn $a\sqrt{-1}$ bằng một đường vuông góc với đường thẳng a và có độ dài bằng a, đồng thời hiểu $\sqrt{-1}$ là tỷ lệ trung bình giữa +1 và −1. Ý tưởng tương tự này đã được phát triển xa hơn, để đưa ra cách diễn giải hình học của $a+\sqrt{-b}$, bởi *Jean-Robert Argand* (1768–?) ở Geneva, trong một *Essai* (1806) đáng chú ý. [70] Các bài viết của Kühn và Argand ít được chú ý, và Gauss vẫn phải phá vỡ sự phản đối cuối cùng đối với sự tưởng tượng. Ông đã giới thiệu i như một đơn vị độc lập phối hợp với 1, và $a+ib$ như một số "phức . " Mối liên hệ giữa phức các số và điểm trên một mặt phẳng, mặc dù là nhân tạo, đã tạo thành một công cụ trợ giúp đắc lực trong việc nghiên cứu sâu hơn về đại số ký hiệu. Trí óc cần một biểu diễn trực quan để hỗ trợ nó. Khái niệm về cái mà ngày nay chúng ta gọi là vectơ đang phát triển đối với các nhà toán học, và phép cộng hình học của các vectơ trong không gian được Hamilton, Grassmann và những người khác phát hiện độc lập với cùng thời điểm.

William Rowan Hamilton (1805–1865) có cha mẹ là người Scotch sinh ra ở Dublin. Việc học sớm của anh ấy, được thực hiện ở nhà, chủ yếu là ngôn ngữ. Ở tuổi mười ba, ông được cho là đã quen thuộc với nhiều ngôn ngữ như những năm ông đã sống. Vào khoảng thời gian này, anh tình cờ đọc được cuốn sách *Số học phổ thông* của Newton. Sau khi đọc nó, ông lần lượt tiếp thu hình học giải tích, giải tích, *Principia* của Newton, *Mécanique Céleste.* của Laplace. Ở tuổi mười tám, ông đã xuất bản một bài báo sửa lỗi trong công việc của Laplace. Năm 1824, ông vào Đại học Trinity, Dublin, và năm 1827, khi vẫn còn là sinh viên chưa tốt nghiệp, ông được bổ nhiệm làm trưởng khoa thiên văn học. Giấy tờ đầu tiên của ông là về quang học. Năm 1832, ông dự đoán hiện tượng khúc xạ hình nón, một khám phá nhờ sự trợ giúp của toán học, ngang hàng với khám

phá về Sao Hải Vương của Le Verrier và Adams. Sau đó, tiếp theo là các bài báo về *Nguyên lý của hành động thay đổi* (1827) và một phương pháp chung của động lực học (1834–1835). Ông cũng viết về nghiệm của phương trình bậc năm, phép đo ảnh ba chiều, hàm dao động, nghiệm số của phương trình vi phân.

Khám phá quan trọng nhất của Hamilton là các bậc bốn của ông, trong mà nghiên cứu của ông về đại số đã đạt đến đỉnh cao. Năm 1835, ông xuất bản trong *Giao dịch của Học viện Hoàng gia Ireland* Lý thuyết về các cặp đại số. Ông coi đại số "không đơn thuần là nghệ thuật, cũng không phải ngôn ngữ, cũng không phải là khoa học cơ bản về số lượng, mà đúng hơn là khoa học về trình tự của sự tiến triển". Do đó, ông định nghĩa đại số là "khoa học về thời gian thuần túy". Đó là chủ đề của nhiều năm suy ngẫm đối với ông để xác định cái mà ông coi là tích của mỗi cặp của một hệ thống các đường thẳng vuông góc. Cuối cùng, vào ngày 16 tháng 10 năm 1843, trong khi đi dạo cùng vợ vào một buổi tối, dọc theo Kênh đào Hoàng gia ở Dublin, việc khám phá ra các bậc bốn đã lóe lên trong đầu ông, và sau đó ông đã khắc bằng dao của mình trên một hòn đá trong Brougham Bridge công thức cơ bản $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Tại cuộc họp chung của Viện hàn lâm Ailen, một tháng sau, ông đã có bài phát biểu đầu tiên về quaternion. Một báo cáo về khám phá này đã được đưa ra vào năm sau trên *Tạp chí Triết học*. Hamilton đã thể hiện khả năng sinh sản tuyệt vời trong quá trình phát triển của chúng. *Bài giảng về các Đệ tứ* của ông, được gửi đến ở Dublin, được in vào năm 1852. *Các phần tử của Đệ tứ* của ông xuất hiện vào năm 1866. Các Đệ tứ được ngưỡng mộ rất nhiều ở Anh ngay từ đầu, nhưng ở Lục địa, họ nhận được ít chú ý. P. G. *Tiểu luận* của Tait đã giúp truyền bá kiến thức về chúng một cách mạnh mẽ ở Anh. Cayley, Clifford và Tait đã phần nào nâng cao chủ đề này nhờ đóng góp ban đầu. Nhưng đã có rất ít tiến bộ trong những năm gần đây, ngoại trừ tiến bộ của Sylvester trong giải pháp của phương trình bậc bốn, cũng như ứng dụng của bậc bốn vào vật lý không được mở rộng như dự đoán. Sự

thay đổi trong ký hiệu được thực hiện ở Pháp bởi Hoüel và Laisant đã bị ở Anh coi là một bước đi sai lầm, nhưng nguyên nhân thực sự của sự thiếu tiến bộ có lẽ sâu xa hơn. Thực sự có một sự nghi ngờ lớn về việc liệu tích bậc bốn có thể khẳng định một vị trí cần thiết và cơ bản trong một hệ thống phân tích véc tơ hay không. Các nhà vật lý khẳng định rằng việc coi bình phương của một vectơ là âm là một sự mất tự nhiên. Để đáp ứng đầy đủ hơn nhu cầu của họ, *J. W. Gibbs* của Đại học Yale và *A. Macfarlane* của Đại học Texas, mỗi người đã đề xuất một đại số vectơ với một ký hiệu mới. Mỗi người đưa ra một định nghĩa của riêng mình cho tích của hai vectơ, nhưng theo cách sao cho bình phương của một vectơ là dương. *Oliver Heaviside* đã sử dụng hệ thống phân tích vectơ thứ ba trong các nghiên cứu về điện của mình.

Hermann Grassmann (1809–1877) sinh ra ở Stettin, theo học một trường thể dục tại quê hương của ông (nơi cha ông là giáo viên dạy toán và vật lý), và học thần học ở Berlin trong ba năm Năm 1834, ông kế nhiệm Steiner làm giáo viên dạy toán tại một trường công nghiệp ở Berlin, nhưng trở lại Stettin vào năm 1836 để đảm nhận nhiệm vụ giáo viên dạy toán, khoa học và tôn giáo ở một trường học ở đó. [71] Cho đến thời điểm này, kiến thức toán học của anh ấy hầu như chỉ giới hạn ở những gì anh ấy học được từ cha mình, người đã viết hai cuốn sách về "Raumlehre" và "Grössenlehre." Nhưng bây giờ anh ấy đã làm quen với các công trình của Lacroix, Lagrange, và Laplace. Anh ấy nhận thấy rằng một số người có thể đạt được kết quả của Laplace theo cách ngắn hơn những ý tưởng mới được nâng cao trong các cuốn sách của cha ông, và ông đã tiến hành xây dựng phương pháp rút gọn này, và áp dụng nó trong nghiên cứu về thủy triều. e do đó đã dẫn đến một phép phân tích hình học mới. Năm 1840, ông đã đạt được tiến bộ đáng kể trong quá trình phát triển nó, nhưng một cuốn sách mới của Schleiermacher lại lôi kéo ông đến với thần học. Năm 1842, ông tiếp tục nghiên cứu toán học và hoàn toàn bị thuyết phục về tầm quan trọng của phép phân tích

mới của mình, ông quyết định cống hiến hết mình cho nó. Giờ đây, tham vọng của anh ấy là giành được một chiếc ghế toán học tại một trường đại học, nhưng anh ấy đã không bao giờ thành công trong việc này. Năm 1844, tác phẩm cổ điển vĩ đại của ông xuất hiện, *Lineale Ausdehnungslehre*, chứa đầy những vấn đề mới và kỳ lạ, và cách trình bày chung chung, trừu tượng và lỗi thời đến mức khó có thể đã có ít ảnh hưởng hơn đối với toán học châu Âu trong hai mươi năm đầu tiên nếu nó được xuất bản ở Trung Quốc. Gauss, Grunert và Möbius liếc qua nó, ca ngợi nó, nhưng phàn nàn về thuật ngữ kỳ lạ và "philosophische Allgemeinheit của nó." Eight nhiều năm sau, Bretschneider của Gotha được cho là người duy nhất đã đọc qua nó. Một bài báo trên *Crelle's Journal*, trong đó Grassmann đã làm lu mờ hình học của thời gian bằng cách xây dựng, với sự trợ giúp của phương pháp của mình, về mặt hình học bất kỳ đại số nào đường cong, một lần nữa vẫn không được chú ý. Chúng ta có cần ngạc nhiên không nếu Grassmann chuyển sự chú ý của mình sang các chủ đề khác, — triết học của Schleiermacher, chính trị, ngữ văn? Tuy nhiên, các bài báo của ông vẫn tiếp tục xuất hiện trên *Crelle's Journal*, và vào năm 1862, phần thứ hai của *Ausdehnungslehre* của ông đã ra đời. Nó nhằm thể hiện tốt hơn phần đầu tiên phạm vi rộng của Ausdehnungslehre, bằng cách xem xét không chỉ các ứng dụng hình học, mà còn bằng cách xử lý các hàm đại số, chuỗi vô hạn và phép tính vi phân và tích phân. Nhưng phần hai không được đánh giá cao hơn phần một. Ở tuổi năm mươi ba, người đàn ông tuyệt vời này, với trái tim nặng trĩu, đã từ bỏ toán học và hướng sức lực của mình vào việc nghiên cứu tiếng Phạn, đạt được những kết quả về ngữ văn được đánh giá cao hơn và cạnh tranh huy hoàng với những kết quả trong toán học.

Điểm chung của Ausdehnungslehre và bậc bốn là phép cộng hình học, hàm của hai vectơ được biểu diễn trong bậc bốn bởi $S\alpha\beta$ and $V\alpha\beta$, và các hàm vectơ tuyến tính. Bậc bốn là đặc biệt đối với Hamilton, trong khi với Grassmann, chúng ta tìm thấy ngoài

đại số vectơ một đại số hình học có ứng dụng rộng rãi và giống như Mö bius's *Barycentrische Tính toán*, trong đó điểm là yếu tố cơ bản. Grassmann đã phát triển ý tưởng về "sản phẩm bên ngoài", "sản phẩm bên trong" và "sản phẩm mở". Cái cuối cùng bây giờ chúng ta gọi là ma trận. Ausdehnungslehre của anh ấy có phần mở rộng rất lớn, không có giới hạn đối với bất kỳ số lượng kích thước cụ thể nào. Chỉ trong những năm gần đây, sự phong phú tuyệt vời trong những khám phá của ông mới bắt đầu được đánh giá cao. Ấn bản thứ hai của *Ausdehnungslehre* năm 1844 được in năm 1877. C. S. Peirce đã trình bày hệ thống của Grassmann trong ký hiệu logic , và E. W. Hyde của Đại học Cincinnati đã viết cuốn sách giáo khoa đầu tiên về phép tính Grassmann bằng tiếng Anh.

Những khám phá ít giá trị hơn, phần nào bao hàm cả những khám phá của Grassmann và Hamilton, được thực hiện bởi *Saint-Venant* (1797–1886), người đã mô tả phép nhân của các vectơ , và việc bổ sung các vectơ và các khu vực được định hướng; của *Cauchy*, mà "clefs algébriques" là các đơn vị chịu phép nhân tổ hợp và được tác giả áp dụng vào lý thuyết loại bỏ theo cách tương tự như đã được thực hiện trước đó của Grassmann; bởi **Justus Bellavitis** (1803–1880), người đã xuất bản vào năm 1835 và 1837 trong *Annali delle Scienze* phép tính équipollences của ông. Bellavitis, giáo sư nhiều năm tại Padua, là một nhà toán học tự học có nhiều quyền lực, người ở tuổi ba mươi tám đã thành lập một văn phòng thành phố ở quê hương Bassano, để ông có thể dành thời gian cho khoa học. [65]

Ấn tượng đầu tiên về những ý tưởng của Grassmann được thể hiện rõ trong các bài viết của **Hermann Hankel** (1839–1873), người đã xuất bản *Vorlesungen über die Complexen Zahlen* của 1867 vào năm 1867. Hankel, khi đó là học giả ở Leipzig, đã trao đổi thư từ với Grassmann. "Các số thay thế" của Hankel tuân theo đối với định luật nhân tổ hợp của ông. Khi xem xét các cơ sở của đại số, Hankel khẳng định nguyên tắc của sự trường tồn của các định luật hình thức trước đây được Peacock phát biểu không đầy đủ. Hankel là

một sinh viên thân thiết của lịch sử toán học, và đã để lại một công trình còn dang dở. Trước khi qua đời, ông là giáo sư tại Tübingen. *Complexen Zahlen* của anh ấy lúc đầu ít được đọc, và chúng ta phải chuyển sang **Victor Schlegel** của Hagen với tư cách là người phiên dịch thành công Grassmann. Schlegel đã từng là đồng nghiệp trẻ của Grassmann tại Marienstifts-Gymnasium ở Stettin. Được Clebsch khuyến khích, Schlegel đã viết một *System der Raumlehre* giải thích các khái niệm và hoạt động cơ bản của Ausdehnungslehre.

Đại số bội được phát triển mạnh mẽ bởi Peirce, lý thuyết của ông không phải là hình học, cũng như của Hamilton và Grassmann. **Benjamin Peirce** (1809–1880) sinh ra tại Salem, Mass., và tốt nghiệp Đại học Harvard, khi còn học đại học đã mang bằng nghiên cứu toán học vượt xa giới hạn của khóa học đại học. [2] Khi Bowditch đang chuẩn bị bản dịch và bình luận của *Mécanique Céleste*, Peirce trẻ tuổi đã giúp đọc các bản in thử. Ông được bổ nhiệm làm giáo sư tại Harvard vào năm 1833, một vị trí mà ông giữ cho đến khi qua đời. Trong một số năm, ông phụ trách *Niên giám hàng hải* và giám đốc của Cơ quan Khảo sát Bờ biển Hoa Kỳ. Ông đã xuất bản một loạt sách giáo khoa đại học về toán học, *Analytical Mechanics*, 1855, và tính toán, cùng với Sears C. Walker của Washington, quỹ đạo của sao Hải Vương. sâu sắc là những nghiên cứu của ông về *Đại số kết hợp tuyến tính*. Bài đầu tiên của , một số bài báo về nó đã được đọc tại cuộc họp đầu tiên của Hiệp hội vì sự tiến bộ của khoa học Hoa Kỳ năm 1864. Các bản sao in thạch bản của một cuốn hồi ký đã được phân phát cho bạn bè vào năm 1870, nhưng dường như quá nhỏ quan tâm đến chủ đề này mà cuốn hồi ký mãi đến năm 1881 mới được in (*Am. Jour. Math.*, Vol. IV., No. 2). Peirce giải các bảng nhân, đầu tiên là đại số *single*, sau đó là đại số *double*, v.v. cho đến bộ sáu, lập tất cả 162 đại số mà ông cho thấy là có thể thực hiện được khi xem xét các ký hiệu A, B, v.v., là các hàm tuyến tính của một số chữ cái hoặc đơn vị xác định i, j, k, l, v.v., với các hệ số là các độ lớn phân tích thông thường, thực hoặc ảo,—các chữ cái i, j, etc., sao cho

mọi tổ hợp nhị phân i^2, ij, ji, etc ., bằng một hàm tuyến tính của các chữ cái, nhưng với giới hạn thỏa mãn luật kết hợp. [56] *Charles S. Peirce*, con trai của Benjamin Peirce, và là một trong những tác giả hàng đầu về logic toán học, đã chỉ ra rằng các đại số này đều là các dạng khiếm khuyết của đại số bậc hai mà trước đó ông đã phát hiện ra bằng phân tích logic và ông đã phát minh ra nó. một ký hiệu đơn giản. Trong số các bậc bốn đại số bậc hai này là một ví dụ đơn giản; nonions là khác. C. S. Peirce đã chỉ ra rằng trong tất cả các đại số kết hợp tuyến tính, chỉ có ba đại số trong đó phép chia là rõ ràng. Đây là đại số đơn thông thường, đại số kép thông thường và bậc bốn, từ đó loại trừ vô hướng tưởng tượng. Ông đã chỉ ra rằng các đại số của cha ông là hoạt động và có tính chất ma trận. Các bài giảng về đại số bội được thực hiện bởi J. J. Sylvester tại Đại học Johns Hopkins , và được xuất bản trên nhiều tạp chí khác nhau. Họ xử lý phần lớn đại số của ma trận. Lý thuyết về ma trận được Cayley phát triển vào đầu năm 1858 trong một cuốn hồi ký quan trọng , theo ý kiến của Sylvester, nó đã mở ra triều đại của Đại số lần thứ hai. Clifford, Sylvester, H. Taber, C. H. Chapman, đã tiến hành các cuộc điều tra xa hơn nữa. Người khởi tạo ma trận thực sự là Hamilton, nhưng lý thuyết của ông, được công bố trên trong *Bài giảng về các bậc bốn* của ông, ít tổng quát hơn so với lý thuyết của Cayley. Cái sau không đề cập đến Hamilton.

Lý thuyết về định thức [73] đã được nghiên cứu bởi Hoëné Wronski ở Ý và J. Binet ở Pháp; nhưng chúng đã bị cản trở bởi , bậc thầy vĩ đại của chủ đề này, Cauchy. Trong một bài báo (*Jour. de l'ecole Polyt.*, IX., 16) Cauchy đã phát triển một số định lý tổng quát . Ông giới thiệu cái tên *determinant*, một thuật ngữ trước đây được Gauss sử dụng trong các hàm được ông xem xét. Năm 1826, Jacobi bắt đầu sử dụng phép tính này và ông đã đưa ra bằng chứng xuất sắc về sức mạnh của nó. Năm 1841, ông đã viết hồi ký mở rộng về định thức trong *Crelle's Journal*, khiến cho lý thuyết này có thể tiếp cận dễ dàng. Ở Anh, nghiên cứu về các phép biến đổi tuyến tính của

lượng tử đã tạo ra một động lực mạnh mẽ. Cayley đã phát triển định thức xiên và Pfaffian, đồng thời giới thiệu việc sử dụng dấu ngoặc đơn định thức, hoặc cặp đường thẳng đứng quen thuộc. tôi hình thức. “Phần tiếp theo” là của Sylvester; “alternants,” do Cauchy khởi tạo, đã được phát triển bởi Jacobi, N. Trudi, H. Nägelbach, và G. Garbieri; “định thức đối xứng trục,” lần đầu tiên được sử dụng bởi Jacobi, đã được nghiên cứu bởi V. A. Lebesgue, Sylvester và Hesse; “các chất tuần hoàn” là do E. Catalan of Liège, W. Spottiswoode (1825- -1883), J. W. L. Glaisher và R. F. Scott; đối với “định thức đối xứng tâm”, mang ơn G. Zehfuss. E. B. Christoffel của Strassburg và G. Frobenius đã phát hiện ra các thuộc tính của “Wronskians, đầu tiên được sử dụng bởi Wronski. V. Nachreiner và S. Günther, cả hai đều ở Munich, đã chỉ ra mối quan hệ giữa định thức và phân số tiếp diễn; Scott sử dụng các số thay thế của Hankel trong chuyên luận. Sách giáo khoa về định thức được viết bởi Spottiswoode (1851), Brioschi (1854), Baltzer (1857), Günther (1875), Dostor (1877), Scott (1880), Muir (1882), Hanus (1886).

Đại số cao hơn hiện đại đặc biệt bận rộn với lý thuyết về các phép biến đổi tuyến tính. Sự phát triển của nó chủ yếu là công việc của Cayley và Sylvester.

Arthur Cayley, sinh ra ở Richmond, Surrey, năm 1821, được đào tạo tại Trinity College, Cambridge. [74] Ông tốt nghiệp Senior Wrangler năm 1842. Sau đó, ông dành một số năm để nghiên cứu và hành nghề luật . Trên nền tảng của chức vụ giáo sư Sadlerian tại Cambridge, anh ấy đã chấp nhận lời đề nghị của chiếc ghế đó, do đó từ bỏ một nghề hứa hẹn giàu có để nhận một khoản lương rất khiêm tốn, nhưng điều đó sẽ cho phép anh ấy dành toàn bộ thời gian cho toán học. Cayley bắt đầu công bố toán học của mình trên *Tạp chí Toán học Cambridge* khi ông vẫn còn là sinh viên đại học. Một số khám phá xuất sắc nhất của ông đã được thực hiện trong thời gian ông hành nghề luật sư. Hầu như không có chủ đề nào trong toán học thuần túy mà thiên tài Cayley không làm phong phú thêm, nhưng

điều quan trọng nhất là việc ông tạo ra một nhánh phân tích mới bằng lý thuyết bất biến của mình. Mầm mống của nguyên lý bất biến được tìm thấy trong các tác phẩm của Lagrange, Gauss, và đặc biệt là của Boole, người đã chỉ ra, vào năm 1841, rằng tính bất biến là một thuộc tính của các biến phân biệt nói chung, và là người đã áp dụng nó vào lý thuyết thay thế trực giao. Cayley tự đặt cho mình bài toán xác định *a priori* hàm nào của các hệ số của một phương trình đã cho có tính chất bất biến này, và bắt đầu tìm thấy vào năm 1845 cái gọi là ' 'siêu quyết định" sở hữu nó. Boole đã thực hiện một số khám phá bổ sung. Sau đó, Sylvester bắt đầu bài báo của mình trên *Tạp chí Toán học Cambridge và Dublin* về Giải tích Biểu thức. Sau đó, những khám phá nối tiếp nhau nhanh chóng. Vào thời điểm đó Cayley và Sylvester đều là cư dân của London, và họ kích thích lẫn nhau bằng cách thường xuyên giao tiếp bằng lời nói. Thường rất khó để xác định số tiền thực sự thuộc về mỗi người.

James Joseph Sylvester sinh ra ở London vào năm 1814, và học tại St. Johns College, Cambridge. Anh ấy ra mắt Wrangler thứ hai vào năm 1837. Nguồn gốc Do Thái của anh ấy khiến anh ấy không có khả năng lấy bằng. Năm 1846, ông trở thành sinh viên của Inner Temple, và được gọi đến quán bar vào năm 1850. Ông trở thành giáo sư triết học tự nhiên tại University College, London; sau đó lần lượt là giáo sư toán học tại Đại học Virginia, tại Học viện Quân sự Hoàng gia ở Woolwich, tại Đại học Johns Hopkins ở Baltimore, và từ năm 1883, là giáo sư hình học tại Oxford. Bài báo in đầu tiên của ông là về lý thuyết quang học của Fresnel, năm 1837. Sau đó, ông tiếp tục nghiên cứu về các bất biến, lý thuyết phương trình, lý thuyết phân hoạch, đại số bội, lý thuyết số và các chủ đề khác được đề cập ở nơi khác. Khoảng năm 1874, ông tham gia vào việc phát triển lý thuyết hình học của các chuyển động liên kết làm việc, bắt nguồn từ khám phá tuyệt vời của A. Peaucellier, Capitaine du Génie à Nice (xuất bản trong *Nouvelles Annales*, 1864 và 1873), và trở thành chủ đề nghiên cứu kỹ lưỡng của A. B. kempe. Đối với Sylvester, người

ta gán cho tuyên bố chung của lý thuyết về những điều trái ngược, khám phá của các phương trình đạo hàm riêng thỏa mãn bởi các bất biến và hiệp biến của lượng tử nhị phân, và chủ đề của hỗn hợp đồng thời. Trong *Tạp chí Toán học Hoa Kỳ* có các hồi ký về lượng tử nhị phân và bậc ba, được xây dựng một phần với sự trợ giúp của *F. Franklin*, hiện là giáo sư tại Đại học Johns Hopkins. Tại Oxford, Sylvester đã mở ra một chủ đề mới, lý thuyết đối ứng, xử lý các hàm của biến phụ thuộc y và hàm của các hệ số vi phân của nó đối với x, vẫn còn không bị thay đổi bởi sự hoán đổi của x và y. Lý thuyết này tổng quát hơn lý thuyết về bất biến vi phân của Halphen (1878), và có được phát triển thêm bởi J. Hammond của Oxford, McMahon của Woolwich, A. R. Forsyth của Cambridge, và những người khác. Sylvester tinh nghịch đưa ra tuyên bố về tên gọi Adam toán học, cho nhiều cái tên mà ông đã đưa vào toán học. Do đó, các thuật ngữ *invariant*, *discriminant*, *Hessian*, *Jacobian*, là của anh ấy.

Lý thuyết vĩ đại về những bất biến, được phát triển chủ yếu ở Anh bởi Cayley và Sylvester, đã được nghiên cứu một cách nghiêm túc ở Đức, Pháp và Ý. Một trong những người đầu tiên trong lĩnh vực này là **Siegfried Heinrich Aronhold** (1819–1884), người đã chứng minh sự tồn tại của các bất biến, S và T, của lập phương ba bậc ba. Hermite đã phát hiện ra các chất cản quang và định lý tương hỗ mang tên ông. Paul Gordan, với sự trợ giúp của các phương pháp tượng trưng , đã chỉ ra rằng số lượng các dạng riêng biệt của một lượng tử nhị phân là hữu hạn. Clebsch đã chứng minh điều này đúng với lượng tử với bất kỳ số lượng biến nào. Một bằng chứng đơn giản hơn rất nhiều về điều này đã được đưa ra vào năm 1891 bởi David Hilbert của Königsberg. Ở Ý, F. Brioschi của Milan và *Faà de Bruno* (1825–1888) đã đóng góp vào lý thuyết về những bất biến, người sau này đã viết một cuốn sách giáo khoa về các dạng nhị phân, được xếp ngang hàng với chuyên luận của Salmon và của Clebsch và Gordan. trên các bất biến là E. B. Christoffel, Wilhelm Fiedler , P. A. McMahon, J. W. L. Glaisher của Cambridge, Emory

McClintock của New York. McMahon đã phát hiện ra rằng lý thuyết bán bất biến là một phần của lý thuyết hàm đối xứng. Đại số cao hơn hiện đại đã vươn tới và liên kết chặt chẽ với một số ngành toán học khác- –geotr y, phép tính biến thiên, cơ học . Clebsch đã mở rộng lý thuyết về các dạng nhị phân cho bộ ba và áp dụng kết quả vào hình học. Clebsch, Klein, Weierstrass, Burckhardt và Bianchi đã sử dụng lý thuyết về bất biến trong các hàm hyperelliptic và Abelian.

Trong lý thuyết phương trình Lagrange, Argand và Gauss đã cung cấp bằng chứng cho định lý quan trọng rằng mọi phương trình đại số đều có nghiệm thực hoặc nghiệm phức. Abel đã chứng minh một cách chặt chẽ rằng phương trình đại số tổng quát bậc năm hoặc bậc cao hơn không thể giải được bằng căn thức (*Crelle*, I., 1826). Wantzel đã đưa ra một sửa đổi chứng minh của Abel. Trước Abel, một bác sĩ người Ý, *Paolo Ruffini* (1765–1822), đã in các bằng chứng về tính không thể giải được, nhưng đã bị người đồng hương của ông là Malfatti chỉ trích. Mặc dù không thuyết phục, nhưng các bài báo của Ruffini rất đáng chú ý như chứa dự đoán của lý thuyết Cauchy của các nhóm. [76] Một nghiệm siêu việt của nhóm ngũ phân liên quan đến tích phân elip được đưa ra bởi Hermite (*Compt. Rend.*, 1858, 1865, 1866). ấn phẩm đầu tiên của e, Kronecker, trong 1858, trong một bức thư gửi cho Hermite, đã đưa ra giải pháp thứ hai thu được dung môi đơn giản bậc sáu. *Jerrard*, trong *Mathematical Researches* (1832–1835) của ông, đã rút gọn ngũ phân thức thành dạng tam thức bằng cách mở rộng phương pháp của Tschirnhausen. Sự cắt giảm quan trọng này đã được thực hiện ngay từ năm 1786 bởi *E. S. Bring*, một người Thụy Điển, và đã giới thiệu trong một ấn phẩm của Đại học Lund. Jerrard, giống như Tschirnhausen, tin rằng phương pháp của ông cung cấp một nghiệm đại số tổng quát cho các phương trình ở bất kỳ mức độ nào. Năm 1836 William R. Hamilton đã báo cáo về tính hợp lệ của phương pháp của Jerrard và cho thấy rằng theo quy trình của ông, ngũ phân vị có thể được biến đổi với bất kỳ một trong bốn dạng tam thức. Hamilton đã xác

định các giới hạn về khả năng áp dụng của nó cho các phương trình cao hơn. Sylvester đã điều tra câu hỏi này, Bậc thấp nhất mà một phương trình có thể có là bao nhiêu để nó có thể thừa nhận bị tước i số hạng liên tiếp nhờ sự trợ giúp của các phương trình không cao hơn bậc i. Anh ta tiến hành điều tra đến tận $i = 8$, và dẫn đến một dãy số mà anh ta đặt tên là "Số Hamilton." Một phép biến đổi có tầm quan trọng ngang bằng đối với Jerrard là phép biến đổi của Sylvester, người đã biểu diễn ngũ phân thành tổng của ba lũy thừa phần năm. Các hiệp phương sai và bất biến của phương trình cao hơn đã được nghiên cứu nhiều trong những năm gần đây.

Chứng minh của Abel rằng các phương trình bậc cao không phải lúc nào cũng có thể giải được bằng phương pháp đại số đã dẫn đến câu hỏi về phương trình nào ở một mức độ nhất định nào có thể được giải bằng căn thức. Những phương trình như vậy là những phương trình được Gauss thảo luận khi xem xét phép chia của đường tròn . Abel đã tiến thêm một bước nữa bằng cách chứng minh rằng một phương trình bất khả quy luôn có thể được giải theo dạng căn thức, nếu trong hai nghiệm của nó, nghiệm này có thể được biểu diễn một cách hợp lý theo nghiệm của nghiệm kia, với điều kiện là bậc của phương trình là số nguyên tố; nếu nó không phải là số nguyên tố thì nghiệm phụ thuộc vào nghiệm của phương trình bậc thấp hơn. Thông qua những cân nhắc về mặt hình học, Hesse đã tìm ra các phương trình giải được bằng đại số, không thuộc các nhóm trước. Chủ đề này đã được phát triển mạnh mẽ ở Paris bởi *Evariste Galois* trẻ tuổi (sinh năm 1811; bị giết trong một cuộc đấu tay đôi, 1832), người đã đưa ra khái niệm về một nhóm thay thế. Đối với ông cũng do một số kết quả có giá trị liên quan đến một tập hợp phương trình khác, thể hiện chúng trong lý thuyết hàm elliptic, nghĩa là phương trình mô đun. Công lao của Galois đã khai sinh ra cho lý thuyết thay thế quan trọng, lý thuyết này đã được phát triển vượt bậc bởi *C. Jordan* ở Paris, *J. A. Serret* (1819–1885) của Sorbonne ở Paris, L. Kronecker (1823–1891) của Berlin, Klein của Göttingen,

M. Nöthe của Erlangen, C. Hermite của Paris, A. Capelli của Napoli, L. Sylow của Friedrichshald, E. Netto của Giessen. Sách của Netto, *Substitutionstheorie*, đã được dịch sang tiếng Anh bởi F. N. Cole của Đại học Michigan, người đã đóng góp cho lý thuyết. Một nhóm đơn giản gồm 504 sự thay thế gồm chín chữ cái, được phát hiện của Cole, đã được E. H. Moore của Đại học Chicago chứng minh thuộc về một hệ thống vô hạn kép gồm các nhóm đơn giản. Lý thuyết thay thế có các ứng dụng quan trọng trong lý thuyết phương trình vi phân. Kronecker đã xuất bản, vào năm 1882, *Grundzüge của ông einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen*.

Kể từ Fourier và Budan, nghiệm của phương trình số đã được *W. G nâng cao. Horner* của Bath, người đã đưa ra một phương pháp xấp xỉ cải tiến (*Giao dịch triết học*, 1819). **Jacques Charles François Sturm** (1803–1855), quê ở Geneva, Thụy Sĩ, và là người kế vị của Poisson trên ghế chủ tịch cơ học tại Sorbonne, xuất bản năm 1829 định lý nổi tiếng của ông xác định số lượng và vị trí các nghiệm của một phương trình bao gồm các giới hạn cho trước. Sturm cho chúng ta biết rằng định lý của anh ấy đã nhìn thẳng vào mặt anh ấy trong lúc đang thực hiện một số nghiên cứu cơ học liên quan đến chuyển động của một con lắc phức hợp. [77] Định lý này và phương pháp của Horner cùng nhau đưa ra những phương tiện chắc chắn và sẵn sàng để tìm ra nghiệm thực của một phương trình số.

Các hàm đối xứng của tổng lũy thừa các nghiệm của một phương trình, được nghiên cứu bởi Newton và Waring, được xem xét bởi gần đây hơn bởi Gauss, Cayley, Sylvester, Brioschi. Cayley đưa ra quy tắc cho “trọng lượng” và “thứ tự” của các hàm đối xứng.

Lý thuyết loại bỏ đã được Sylvester, Cayley, Salmon, Jacobi, Hesse, Cauchy, Brioschi và nâng cao rất nhiều, và Gordan. Sylvester đưa ra phương pháp thẩm tách (*Philosophical Magazine*, 1840), và vào năm 1852 đã thiết lập một định lý liên quan đến biểu thức của một loại bỏ như một yếu tố quyết định. Cayley đưa ra một tuyên bố mới

về phương pháp loại bỏ Bézout và đã thiết lập một lý thuyết loại bỏ chung (1852).

GIẢI TÍCH

Dưới cái đầu này, chúng ta thấy thuận tiện khi xem xét các chủ đề của phép tính vi phân và tích phân, phép tính biến thiên, chuỗi vô hạn, xác suất và phương trình vi phân. Nổi bật trong sự phát triển của những chủ đề này là Cauchy.

Augustin-Louis Cauchy [78] (1789–1857) sinh ra ở Paris và được cha cho đi học sớm. Lagrange và Laplace, người mà người cha thường xuyên tiếp xúc, đã báo trước sự vĩ đại trong tương lai của cậu bé. Tại École Centrale du Panthéon, ông xuất sắc trong các nghiên cứu cổ điển. Năm 1805, ông vào Trường Bách khoa, và hai năm sau là École des Ponts et Chaussées. Cauchy rời Cherbourg vào năm 1810, với tư cách là kỹ sư. *Mécanique Céleste* của Laplace và *Fonctions Analytiques* của Lagrange là những người bạn đồng hành trong cuốn sách của ông ở đó. Những cân nhắc về sức khỏe khiến anh ấy phải trở lại Paris sau ba năm. Đầu hàng trước sự thuyết phục của Lagrange và Laplace, ông từ bỏ kỹ thuật để ủng hộ khoa học thuần túy. Tiếp theo, chúng tôi thấy anh ấy đang giữ chức giáo sư tại Trường Bách khoa. Khi Charles X. bị trục xuất, và việc lên ngôi của Louis Philippe vào năm 1830, Cauchy, cực kỳ tận tâm, nhận thấy mình không thể thực hiện lời thề mà ông ta yêu cầu. Hậu quả là bị tước bỏ chức vụ, ông tự nguyện sống lưu vong. Tại Fribourg ở Thụy Sĩ, Cauchy tiếp tục việc học của mình, và vào năm 1831, ông được vua Piedmont mời làm trưởng khoa vật lý toán học, đặc biệt được tạo ra cho ông tại trường đại học Turin. Năm 1833, ông nghe theo lời kêu gọi của vị vua bị lưu đày, Charles X., đảm nhận việc giáo dục cháu trai, Công tước xứ Bordeaux. Điều này đã mang lại cho Cauchy cơ hội đến thăm nhiều vùng khác nhau của Châu Âu và tìm hiểu xem các tác phẩm của ông được đọc rộng rãi như thế

nào. Charles X. phong cho anh ta danh hiệu Nam tước. Khi trở lại Paris vào năm 1838, một chiếc ghế trong College de France đã được trao cho ông, nhưng lời tuyên thệ yêu cầu đối với ông đã ngăn cản sự chấp nhận của ông. Ông được đề cử là thành viên của Cục Kinh độ, nhưng bị chính quyền tuyên bố là không đủ tư cách. Trong các sự kiện chính trị năm 1848, lời tuyên thệ bị đình chỉ và Cauchy cuối cùng trở thành giáo sư tại Trường Bách khoa. Khi thành lập đế chế thứ hai, lời thề đã được lập lại, nhưng Cauchy và Arago được miễn trừ. Cauchy là một người rất sùng đạo , và trong hai ấn phẩm của ông đã kiên quyết bảo vệ các tu sĩ Dòng Tên.

Cauchy là một nhà toán học giỏi và sâu sắc. Bằng cách nhanh chóng công bố các kết quả của mình và chuẩn bị các sách giáo khoa tiêu chuẩn, ông đã có ảnh hưởng tức thời và có lợi đối với đông đảo các nhà toán học hơn bất kỳ nhà văn đương thời nào. Ông là một trong những người đi đầu trong việc đưa sự chặt chẽ vào phân tích. Các nghiên cứu của ông mở rộng ra lĩnh vực chuỗi, ảo, lý thuyết số, phương trình vi phân, lý thuyết thay thế, lý thuyết hàm, định thức, thiên văn học toán học, ánh sáng, tính đàn hồi, v.v.,—bao trùm gần như toàn bộ lĩnh vực toán học , tinh khiết và áp dụng.

Được Laplace và Poisson khuyến khích, Cauchy đã xuất bản *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* của ông vào năm 1821, một tác phẩm có giá trị lớn. Nếu nó được nghiên cứu cẩn thận hơn bởi những người viết sách giáo khoa ở Anh và Hoa Kỳ, thì nhiều phương pháp phân tích lỏng lẻo và lỏng lẻo hầu như chưa bị loại bỏ khỏi sách giáo khoa tiểu học đã bị loại bỏ hơn nửa thế kỷ trước kia. Cauchy là người đầu tiên công bố một chứng minh chặt chẽ về định lý Taylor. Ông đã cải thiện đáng kể việc giải thích các nguyên tắc cơ bản của phép tính bằng cách xem xét các giới hạn và lý thuyết mới về tính liên tục của các hàm số. Phương pháp của Cauchy và Duhamel đã được Hoüel và những người khác chấp nhận với sự ủng hộ. Ở Anh, De đặc biệt chú ý đến việc trình bày rõ ràng các nguyên tắc cơ bản. Morgan. Các luận thuyết gần đây của Mỹ về phép tính

đưa ra thời gian như một biến số độc lập và các khái niệm đồng minh về vận tốc và gia tốc—do đó hầu như quay trở lại phương pháp thông lượng.

Cauchy đã thực hiện một số nghiên cứu về phép tính biến thiên. Chủ đề này bây giờ về nguyên tắc cơ bản giống như khi nó đến từ tay Lagrange. Các nghiên cứu gần đây liên quan đến sự biến đổi của tích phân kép khi các giới hạn cũng thay đổi và các biến thể của tích phân bội nói chung. Hồi ký được Gauss xuất bản năm 1829, Poisson năm 1831, và Ostrogradsky của St. Petersburg năm 1834, tuy nhiên, không có xác định một cách tổng quát số lượng và dạng của các phương trình phải tồn tại ở các giới hạn trong trường hợp tích phân kép hoặc tích phân ba. Năm 1837 Jacobi đã xuất bản một cuốn hồi ký chỉ ra rằng các tích phân khó được yêu cầu bởi cuộc thảo luận về biến thể thứ hai, nhờ đó có thể xác định chắc chắn sự tồn tại của một cực đại hoặc cực tiểu, được bao gồm trong các tích phân của biến thể đầu tiên, và do đó là không cần thiết. Định lý quan trọng này, được Jacobi trình bày rất ngắn gọn, được V. A làm sáng tỏ và mở rộng. Lebesgue, C. E. Delaunay, Eisenlohr, S. Spitzer, Hesse và Clebsch. Một hồi ký quan trọng của Sarrus về vấn đề xác định các phương trình giới hạn phải được kết hợp với các phương trình bất định để xác định hoàn toàn giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nhiều tích phân, đã được trao giải thưởng của Viện hàn lâm Pháp năm 1845, được ghi nhận danh dự trên một bài báo của Delaunay. Phương pháp của Sarrus đã được Cauchy đơn giản hóa. Năm 1852, G. Mainardi đã cố gắng thể hiện một phương pháp mới để phân biệt cực đại và cực tiểu, và mở rộng định lý Jacobi cho tích phân kép. chỉ mụcCác yếu tố quyết định các số hạng của biến thể thứ 2. Năm 1861 *Isaac Todhunter* (1820–1884) của St. John's College, Cambridge, đã xuất bản công trình có giá trị của ông về *Lịch sử tiến bộ của phép tính biến thiên*, trong đó có các nghiên cứu của riêng ông. Năm 1866, ông công bố một nghiên cứu quan trọng nhất, phát triển lý thuyết nghiệm không liên tục (được thảo luận trong các trường hợp cụ thể

của Legendre), và làm cho chủ đề này điều mà Sarrus đã làm cho tích phân bội.

Sau đây là những tác giả quan trọng hơn của các chuyên luận có hệ thống về phép tính biến phân, và ngày xuất bản: Robert Woodhouse, Thành viên của Cao đẳng Caius, Cambridge, 1810; Richard Abbatt ở Luân Đôn, 1837; John Hewitt Jellett (1817–1888), từng là Hiệu trưởng của Trinity College, Dublin, 1850; G. W. Strauch trong Zürich, 1849; Moigno và Lindelöf, 1861; Lewis Buffett Carll of Flushing ở New York, 1881.

Các bài giảng về tích phân xác định do Dirichlet giảng trong 1858, đã được G. F xây dựng thành một tác phẩm tiêu chuẩn. Mayer. Chủ đề này đã được D. Bierens de Haan của Leiden xử lý thấu đáo nhất trong *Exposé de la théorie des intégrals définies* của ông, Amsterdam, 1862.

Lịch sử của chuỗi vô hạn minh họa một cách sống động tính năng nổi bật của kỷ nguyên mới mà phép phân tích đã bắt đầu trong quý đầu tiên của của thế kỷ này. Newton và Leibniz cảm thấy cần thiết phải tìm hiểu về sự hội tụ của chuỗi vô hạn, nhưng họ không có tiêu chí phù hợp , ngoại trừ phép thử nâng cao của Leibniz cho các chuỗi xen kẽ. Bởi Euler và những người đương thời của ông , cách xử lý *chính thức* của chuỗi đã được mở rộng rất nhiều, trong khi nhu cầu về việc xác định sự hội tụ nói chung đã bị lãng quên. Euler đã đạt được một số kết quả rất hay về chuỗi vô hạn, hiện đã được biết đến, và cũng có một số kết quả rất vô lý, hiện đã bị lãng quên hoàn toàn. Trường Tổ hợp ở Đức, hiện đã đi vào quên lãng một cách xứng đáng. Vào đầu giai đoạn hiện đang được xem xét, các kết quả đáng ngờ hoặc rõ ràng là vô lý thu được từ chuỗi vô hạn đã kích thích những câu hỏi sâu sắc hơn về giá trị hợp lệ ity của các hoạt động với họ. *nội dung thực tế* của chúng được xem xét chính, *hình thức* là thứ yếu. Cuộc điều tra quan trọng và nghiêm ngặt đầu tiên về chuỗi được thực hiện bởi Gauss liên quan đến với chuỗi siêu hình học. Tiêu chí

do ông phát triển giải quyết câu hỏi về sự hội tụ trong mọi trường hợp mà nó dự định đề cập, và do đó mang dấu ấn của tính tổng quát vốn là đặc trưng trong các bài viết của Gauss. Do cách xử lý lạ lùng và sự nghiêm ngặt khác thường, bài báo của Gauss đã thu hút rất ít sự quan tâm của các nhà toán học thời bấy giờ.

May mắn hơn trong việc tiếp cận công chúng là Cauchy, người *Analyse Algébrique* năm 1821 chứa đựng một cách xử lý nghiêm túc đối với loạt bài. Tất cả các chuỗi có tổng không đạt đến một giới hạn cố định khi số lượng các điều khoản tăng lên vô tận được gọi là phân kỳ. Giống như Gauss, ông tiến hành so sánh với các chuỗi hình học, và thấy rằng chuỗi có các số hạng dương có hội tụ hay không, tùy theo căn thứ n của số hạng thứ n, hoặc tỷ lệ của $(n+1)$ số hạng thứ và số hạng thứ n cuối cùng nhỏ hơn hoặc lớn hơn đơn vị. Để đạt được một số trường hợp mà những biểu thức này cuối cùng trở thành thống nhất và thất bại, Cauchy đã thiết lập hai phép thử khác. Ông chỉ ra rằng chuỗi có các số hạng âm hội tụ khi các giá trị tuyệt đối của các số hạng hội tụ, rồi suy ra phép thử Leibniz cho các chuỗi xen kẽ. Tích của hai chuỗi hội tụ không nhất thiết phải hội tụ. Định lý Cauchy rằng tích của hai chuỗi hội tụ tuyệt đối sẽ hội tụ thành tích của các tổng của hai chuỗi đã được chứng minh nửa thế kỷ sau bởi F. Mertens of Graz vẫn đúng nếu, của hai chuỗi hội tụ nhân với nhau thì chỉ có một là hội tụ tuyệt đối.

Người chỉ trích thẳng thắn nhất các phương pháp cũ trong sê-ri là Abel. Bức thư của anh ấy gửi cho người bạn Holmboe (1826) chứa những lời chỉ trích gay gắt. Đó là cách đọc rất thú vị, ngay cả với sinh viên hiện đại. Trong việc chứng minh định lý nhị thức, ông đã thiết lập định lý rằng nếu hai chuỗi và chuỗi tích của chúng đều hội tụ, thì chuỗi tích sẽ hội tụ về phía tích của các tổng của hai chuỗi đã cho. Kết quả đáng chú ý này sẽ loại bỏ toàn bộ vấn đề về phép nhân của chuỗi nếu chúng ta có một tiêu chí thực tế chung về tính hội tụ cho chuỗi bán hội tụ. Vì chúng ta không có tiêu chí như vậy nên các định lý đã được A. Pringsheim ở Munich và A. Voss thiết lập gần

đây của Würburg loại bỏ trong một số trường hợp nhất định sự cần thiết phải áp dụng các phép thử về tính hội tụ cho chuỗi tích bằng cách áp dụng các phép thử cho các biểu thức liên quan dễ dàng hơn. Pringsheim đi đến kết luận thú vị sau: Tích của hai chuỗi bán hội tụ không bao giờ có thể hội tụ tuyệt đối, nhưng một chuỗi nửa hội tụ, hoặc thậm chí là một chuỗi phân kỳ, được nhân với một chuỗi hội tụ tuyệt đối, *có thể* cho ra một tích hội tụ tuyệt đối.

Các nghiên cứu của Abel và Cauchy đã gây ra một sự khuấy động đáng kể. Chúng tôi được biết rằng sau một cuộc họp khoa học trong đó Cauchy đã trình bày những nghiên cứu đầu tiên của mình về sê-ri, Laplace đã vội vã về nhà và ở đó ẩn dật cho đến khi ông xem xét sê-ri trong *Mécanique Céleste* của mình. May mắn thay, mọi người đều được tìm thấy là hội tụ! Tuy nhiên, chúng ta không được kết luận rằng những ý tưởng mới ngay lập tức thay thế những ý tưởng cũ. Ngược lại, những quan điểm mới thường chỉ được chấp nhận sau một cuộc đấu tranh gay gắt và lâu dài. Vào cuối năm 1844, De Morgan đã bắt đầu một bài báo về "chuỗi phân kỳ" theo phong cách này: "Tôi tin rằng nó sẽ nói chung phải thừa nhận rằng tiêu đề của bài báo này mô tả chủ đề duy nhất còn tồn tại, có tính chất cơ bản, trên đó có sự bất đồng nghiêm trọng giữa các nhà toán học về tính đúng hay sai tuyệt đối của các kết quả."

Các nghiên cứu của Josef Ludwig Raabe (*Crelle*, Vol. IX.) lần đầu tiên xuất hiện trong quá trình phát triển của các tiêu chí tế nhị hơn về sự hội tụ và phân kỳ; sau đó làm theo những gì De Morgan đưa ra trong phép tính của ông ấy. De Morgan đã thiết lập các tiêu chí logarit mà J. Bertrand đã khám phá ra một phần độc lập. Hình thức của các tiêu chí này, như được đưa ra bởi Bertrand và Ossian Bonnet, thuận tiện hơn so với De Morgan's. Từ các bài báo được để lại của Abel , có vẻ như ông đã đoán trước được các nhà văn có tên trên trong việc thiết lập các tiêu chí logarit. Ý kiến của Bonnet là tiêu chí logarit không bao giờ sai; nhưng Du Bois-Reymond và Pringsheim từng phát hiện ra các chuỗi hội tụ một cách rõ ràng

trong đó các tiêu chí này không xác định được sự hội tụ. Tiêu chí cho đến nay được ám chỉ đã được Pringsheim gọi là *special* tiêu chí, vì tất cả chúng đều phụ thuộc vào việc so sánh số hạng thứ n của chuỗi với các hàm đặc biệt a^n, n^x, $n(\log n)^x$, v.v. . Trong số những người đầu tiên đề xuất các tiêu chí *chung*, và xem xét chủ đề từ một quan điểm còn rộng hơn, đạt đến đỉnh cao trong một lý thuyết toán học thông thường, là Kummer. Ông đã thiết lập một định lý thu được một bài kiểm tra bao gồm hai phần, phần đầu tiên sau đó được cho là không cần thiết. Việc nghiên cứu các tiêu chí chung được tiếp tục bởi U. Dini of Pisa, Paul Du Bois-Reymond, G. Kohn of Minden, và Pringsheim. Du Bois-Reymond chia tiêu chí thành hai loại: tiêu chí của *loại thứ nhất* và tiêu chí của *loại thứ*, phù hợp lấy số hạng chung thứ n, hoặc tỷ số của số hạng thứ $(n+1)$ và số hạng thứ n, được coi là cơ sở của nghiên cứu. Kummer's là tiêu chí thuộc loại thứ hai. Một tiêu chí thuộc loại đầu tiên, tương tự như tiêu chí này, được phát minh bởi Pringsheim. Từ các tiêu chí chung do Du Bois-Reymond và Pringsheim thiết lập tương ứng, tất cả các tiêu chí đặc biệt có thể được rút ra. Lý thuyết của Pringsheim rất hoàn chỉnh, ngoài còn cung cấp các tiêu chí của loại thứ nhất và loại thứ hai, các tiêu chí hoàn toàn mới của *loại thứ ba*, và cả các tiêu chí tổng quát của loại thứ hai Tuy nhiên, loại này chỉ áp dụng cho các chuỗi không bao giờ các số hạng tăng dần. Loại thứ ba chủ yếu dựa vào việc xem xét giới hạn của hiệu của các số hạng liên tiếp hoặc số nghịch đảo của chúng. Trong tiêu chí tổng quát của loại thứ hai, ông không xem xét tỷ lệ của hai số hạng liên tiếp, mà là tỷ lệ của hai số hạng bất kỳ cách xa nhau, và suy ra, trong số những tiêu chí khác, hai tiêu chí do Kohn và Ermakoff lần lượt đưa ra trước đó.

Những câu hỏi khó nảy sinh khi nghiên cứu về chuỗi Fourier. [79] Cauchy là người đầu tiên cảm thấy cần phải tìm hiểu về sự hội tụ của nó. Nhưng phương thức tiến hành của anh ta bị Dirichlet cho là không đạt yêu cầu. Dirichlet đã thực hiện nghiên cứu kỹ lưỡng đầu tiên về chủ đề này (*Crelle*, Vol. IV.). Chúng đạt đến đỉnh điểm là bất

cứ khi nào hàm số không trở nên vô hạn, không có vô số điểm gián đoạn và không có vô số cực đại và cực tiểu, thì chuỗi Fourier hội tụ về phía giá trị của hàm đó tại mọi vị trí, ngoại trừ điểm không liên tục và tại đó nó hội tụ về phía giá trị trung bình của hai giá trị biên. Tuy nhiên, Schläfli của Bern và Du Bois-Reymond đã bày tỏ nghi ngờ về tính chính xác của giá trị trung bình , không được thành lập tốt. Điều kiện của Dirichlet là đủ, nhưng không cần thiết. Lipschitz, của Bonn, đã chứng minh rằng chuỗi Fourier vẫn biểu diễn hàm số khi số lượng các điểm gián đoạn là vô hạn và đã thiết lập một điều kiện để nó biểu diễn một hàm có vô số cực đại và cực tiểu. Riemann và H. Hankel, nhưng đã được chứng minh là sai bởi Du Bois-Reymond và H. A. Schwarz.

Riemann đã hỏi một hàm số phải có những tính chất gì để có thể tồn tại một chuỗi lượng giác mà bất cứ khi nào nó hội tụ, nó sẽ hội tụ về phía giá trị của hàm số. Ông tìm thấy điều kiện cần và đủ cho việc này. Tuy nhiên, họ không quyết định liệu một chuỗi như vậy có thực sự đại diện cho chức năng hay không. Riemann bác bỏ định nghĩa của Cauchy về tích phân xác định vì tính tùy tiện của nó, đưa ra một định nghĩa mới, và sau đó hỏi khi nào một hàm có tích phân. Các nghiên cứu của ông đã làm sáng tỏ một thực tế là các hàm liên tục không nhất thiết phải luôn có một hệ số vi phân. Nhưng thuộc tính này, được Weierstrass chỉ ra cho thuộc về các lớp hàm lớn, không nhất thiết được tìm thấy để loại trừ chúng khỏi việc được biểu diễn bởi chuỗi Fourier. Sự nghi ngờ về một số kết luận về chuỗi Fourier đã được đưa ra bởi quan sát của Weierstrass rằng tích phân của một chuỗi vô hạn có thể được chứng minh bằng tổng của các tích phân của các số hạng riêng biệt chỉ khi chuỗi hội tụ *đồng đều* trong khu vực được đề cập. Chủ đề về sự hội tụ đều đã được nghiên cứu bởi Philipp Ludwig Seidel (1848) và G. G. Stokes (1847), và đã cho rằng có tầm quan trọng rất lớn trong lý thuyết chức năng của Weierstrass. Nó trở nên cần thiết để chứng minh rằng một chuỗi lượng giác biểu diễn một hàm liên tục hội tụ đều. Điều này

đã được thực hiện bởi Heinrich Eduard Heine (1821–1881), Halle. Sau đó, nghiên cứu về chuỗi Fourier được thực hiện bởi G. Cantor và Du Bois-Reymond.

So với sự phát triển vượt bậc của các ngành toán học khác, lý thuyết xác suất đã có tiến bộ rất không đáng kể kể từ thời của Laplace. Các cải tiến và simplifications trong phương thức trình bày đã được thực hiện bởi A. De Morgan, G. Boole, A. Meyer (do E. Czuber), J. Bertrand. Cách đối xử của Cournot và Westergaard đối với bảo hiểm và lý thuyết về bảng sống là cổ điển. Các ứng dụng của phép tính vào thống kê đã được thực hiện bởi L. A. J. Quetelet (1796–1874), giám đốc đài thiên văn ở Bruxelles; của Lexis; Harald Westergaard, ở Copenhagen; và Düsing.

Đáng lưu ý là các cơ quan có thẩm quyền tốt nhất của thời đại chúng ta đã bác bỏ xác suất nghịch đảo. Nhánh xác suất này đã được tìm ra bởi Thomas Bayes (mất năm 1761) và bởi Laplace (Bk. II., Ch. VI. của *Théorie Analytique* của ông). Bằng nó, một số nhà logic học đã giải thích quy nạp. Ví dụ: nếu một người đàn ông, người chưa bao giờ nghe nói về thủy triều, đi đến bờ biển Đại Tây Dương và chứng kiến m ngày liên tiếp mực nước biển dâng, Quetelet nói, anh ta có quyền kết luận rằng có xác suất bằng $\frac{m+1}{m+2}$ rằng nước biển sẽ dâng vào ngày hôm sau. Đặt $m = 0$, có thể thấy rằng quan điểm này dựa trên giả định không chính đáng rằng xác suất của một sự kiện hoàn toàn chưa biết là $\frac{1}{2}$, hoặc xác suất của tất cả các lý thuyết được đề xuất để điều tra chỉ bằng một nửa là sự thật. W. S. Jevons trong *Principles of Science* của mình đã tìm ra quy nạp dựa trên lý thuyết xác suất nghịch đảo và F. Y. Edgeworth cũng chấp nhận nó trong *Mathematical Psychics* của mình.

Bổ sung đáng chú ý duy nhất gần đây cho xác suất là chủ đề “xác suất địa phương”, được phát triển bởi một số người Anh và một số nhà toán học Mỹ và Pháp. Bài toán sớm nhất về chủ đề này bắt nguồn từ thời của Buffon, nhà tự nhiên học , người đã đề xuất bài

toán, do chính ông và Laplace giải, để xác định xác suất mà một cây kim ngắn, ném ngẫu nhiên trên sàn nhà được xác định bằng các đường thẳng song song cách đều sẽ rơi vào một trong hai đường thẳng đó. Sau đó là bài toán bốn điểm của Sylvester: để tìm xác suất mà bốn điểm, được lấy ngẫu nhiên trong một ranh giới nhất định, sẽ tạo thành một lại tứ giác. Xác suất địa phương đã được nghiên cứu ở Anh bởi A. R. Clarke, H. McColl, S. Watson, J. Wolstenholme, nhưng thành công lớn nhất của *M. W. Crofton* của trường quân sự tại Woolwich. Nó được theo đuổi ở Mỹ bởi E. B. Seitz; ở Pháp của C. Jordan, E. Lemoine, E. Barbier, và những người khác. Thông qua việc xem xét xác suất cục bộ, Crofton đã dẫn đến việc đánh giá một số tích phân xác định.

Phương pháp khoa học đầy đủ đầu tiên về phương trình vi phân được đưa ra bởi Lagrange và Laplace. Nhận xét này đặc biệt đúng với phương trình đạo hàm riêng. Phương trình sau được nghiên cứu trong thời gian gần đây hơn của Monge, Pfaff, Jacobi, Émile Bour (1831–1866) của Paris, A. Weiler, Clebsch, A. N. Korkine của St. Petersburg, G. Boole, A. Meyer, Cauchy, Serret, Sophus Lie, và những người khác. Vào năm 1873, researches của họ, về phương trình đạo hàm riêng cấp một, đã được Paul Mansion, thuộc Đại học Gand, trình bày dưới dạng sách giáo khoa. nghiên cứu của **Johann Friedrich Pfaff** (1795–1825) đã đánh dấu một bước tiến quyết định. là bạn thân của Gauss trẻ tại Göttingen. Sau đó, ông ở cùng với nhà thiên văn học Bode. Sau đó, ông trở thành giáo sư tại Helmstädt, rồi tại Halle. Bằng một phương pháp đặc biệt, Pfaff đã tìm ra tích phân tổng quát của các phương trình đạo hàm riêng cấp một cho bất kỳ số lượng biến nào. Bắt đầu từ lý thuyết của các phương trình vi phân thông thường bậc nhất trong các biến n , trước tiên ông đưa ra tích phân chung của chúng, sau đó xem xét tích phân của các phương trình vi phân đạo hàm riêng như một trường hợp cụ thể của phương trình trước, tuy nhiên, giả sử như đã biết, tích phân tổng quát của phương trình vi phân của bất kỳ thứ tự nào

giữa hai biến. Nghiên cứu của ông đã khiến Jacobi giới thiệu cái tên “Bài toán Pfaffian.” Từ mối liên hệ, được quan sát bởi Hamilton, giữa một hệ phương trình vi phân thường (trong cơ học giải tích) và một phương trình đạo hàm riêng, Jacobi đã rút ra kết luận rằng, trong một loạt các hệ có tích phân liên tiếp P faff yêu cầu, tất cả trừ hệ thống đầu tiên là hoàn toàn không cần thiết. Clebsch đã xem xét vấn đề của Pfaff từ một quan điểm mới và rút gọn nó thành các hệ phương trình đạo hàm riêng tuyến tính đồng thời, có thể thiết lập độc lập với nhau mà không cần bất kỳ tích phân nào. Jacobi đã nâng cao một cách vật chất lý thuyết về phương trình vi phân bậc nhất. Bài toán xác định các hàm chưa biết sao cho một tích phân chứa các hàm này và các hệ số vi phân của chúng, theo một cách thức quy định, đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, trước hết đòi hỏi phải triệt tiêu biến thiên bậc nhất của tích phân. . Điều kiện này dẫn đến các phương trình vi phân, sự tích hợp của chúng xác định các hàm. Để xác định xem giá trị là tối đa hay tối thiểu, biến thể thứ hai phải được kiểm tra. Điều này dẫn đến các phương trình vi phân mới và khó, tích phân của nó, đối với các trường hợp đơn giản hơn, đã được Jacobi suy ra một cách tài tình từ tích phân của các phương trình vi phân của biến thể đầu tiên. Giải pháp của Jacobi đã được Hesse hoàn thiện, trong khi Clebsch mở rộng cho trường hợp tổng quát Kết quả của Jacobi trên biến thể thứ hai. Cauchy đã đưa ra một phương pháp giải phương trình đạo hàm riêng cấp một với số lượng biến bất kỳ, phương pháp này đã được Serret, J. Bertrand, O. Bonnet ở Pháp và Imschenetzky ở Nga. Cơ bản là mệnh đề của Cauchy rằng mọi phương trình vi phân thông thường đều thừa nhận lân cận của bất kỳ điểm không kỳ dị nào của tích phân, điểm này đồng quy trong một đường tròn nhất định hội tụ, và có thể phát triển theo định lý Taylor. Đồng minh với quan điểm được chỉ ra bởi định lý này là quan điểm của Riemann, người coi hàm một biến là được xác định bởi vị trí và bản chất của các điểm kỳ dị của nó, và ai đã áp dụng khái niệm này cho phương trình vi phân tuyến tính cấp

hai, được thỏa mãn bởi chuỗi siêu hình học. Phương trình này cũng được nghiên cứu bởi Gauss và Kummer. Lý thuyết chung của nó, khi không có giới hạn áp đặt lên giá trị của biến, đã được xem xét bởi J. Tannery, ở Paris, người đã sử dụng phương pháp của Fuchs. indexTannery phương trình vi phân tuyến tính và tìm thấy tất cả 24 tích phân Kummer của phương trình này. Nghiên cứu này đã được tiếp tục bởi Édouard Goursat ở Paris.

Một cuốn sách giáo khoa tiêu chuẩn về *Phương trình vi phân*, bao gồm cả vấn đề ban đầu về tích phân, nghiệm đơn lẻ và đặc biệt là về phương pháp ký hiệu, đã được soạn thảo vào năm 1859 bởi **George Boole** (1815–1864), cùng một lúc giáo sư tại Đại học Queen's, Cork, Ireland. Ông là người gốc Lincoln, và là một nhà toán học tự học có quyền lực lớn. Chuyên luận của ông về *Sự khác biệt hữu hạn* (1860) và *Quy luật tư duy* (1854) của ông là những tác phẩm có giá trị cao.

Khả năng sinh sản của các quan niệm của Cauchy và Riemann liên quan đến các phương trình vi phân đã được chứng thực bởi các nghiên cứu mà chúng là nguồn gốc của **Lazarus Fuchs** của Berlin (sinh năm 1835), **Felix Klein** của G öttingen (sinh năm 1849), **Henri Poincaré**của Paris (sinh năm 1854) và những người khác. Nghiên cứu về phương trình vi phân tuyến tính bước sang một thời kỳ mới với ấn phẩm trong hồi ký của Fuchs năm 1866 và 1868. Trước đó, các phương trình tuyến tính với hệ số *hằng* gần như là phương trình duy nhất mà các phương pháp tích phân chung được biết đến. Trong khi lý thuyết tổng quát của các phương trình này gần đây đã được trình bày trong một cuốn sách mới ánh sáng của Hermite, Darboux và Jordan, Fuchs bắt đầu nghiên cứu từ quan điểm tổng quát hơn của các phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không phải là hằng số Ông hướng sự chú ý của mình chủ yếu vào những người có tích phân đều hình tròn. Nếu biến được tạo để mô tả tất cả các đường khả dĩ bao quanh một hoặc nhiều điểm tới hạn của phương trình, thì chúng ta có một phép thế nhất định tương ứng với mỗi đường; tổng hợp của tất cả các thay thế này được gọi

là *group*. Dạng tích phân của những phương trình như vậy đã được Fuchs và G. Frobenius kiểm tra bằng các phương pháp độc lập. Logarit thường xuất hiện trong tích phân của một nhóm, Fuchs và Frobenius đã nghiên cứu các điều kiện theo đó không có logarit nào xuất hiện. Thông qua nghiên cứu về các nhóm, tính khả quy hoặc bất khả quy của vi phân tuyến tính phương trình đã được Frobenius và Leo Königsberg kiểm tra. Chủ đề của phương trình vi phân tuyến tính, không phải tất cả các tích phân đều chính quy, đã bị tấn công bởi G. Frobenius của Berlin, W. Thomé của Greifswald (sinh năm 1841), và Poincaré, nhưng lý thuyết kết quả của tích phân bất quy tắc vẫn chưa hoàn chỉnh.

Lý thuyết về bất biến liên quan đến phương trình vi phân tuyến tính đã được phát triển bởi Halphen và A. R. Forsyth.

Các nghiên cứu đề cập ở trên có mối liên hệ chặt chẽ với lý thuyết chức năng và lý thuyết nhóm. Do đó, đã nỗ lực để xác định bản chất của hàm được xác định bởi một phương trình vi phân từ chính phương trình vi phân đó, chứ không phải từ bất kỳ biểu thức giải tích nào của hàm, thu được trước tiên bằng cách giải phương trình vi phân. Thay vì nghiên cứu các tính chất của tích phân của một phương trình vi phân đối với tất cả các giá trị của biến, ban đầu các nhà nghiên cứu hài lòng với việc nghiên cứu các tính chất trong vùng lân cận của một điểm cho trước. Bản chất của tích phân tại điểm kỳ dị và tại điểm thường là hoàn toàn khác nhau. *Albert Briot* (1817–1882) và *Jean Claude Bouquet* (1819–1885), cả hai đều đến từ Paris, đã nghiên cứu trường hợp khi, ở gần một điểm kỳ dị , phương trình vi phân có dạng $(x-x_0)\dfrac{dy}{dx}=\int(xy)$. Fuchs đã đưa ra sự phát triển theo chuỗi tích phân cho trường hợp cụ thể của phương trình tuyến tính. Poincaré cũng làm như vậy đối với trường hợp khi các phương trình không tuyến tính, cũng như đối với các phương trình đạo hàm riêng cấp một. Cauchy và Madame Kowalevsky đã đưa ra các diễn biến cho các điểm bình thường.

Nỗ lực biểu diễn các tích phân bằng các khai triển luôn hội tụ và không giới hạn ở các điểm cụ thể trong một mặt phẳng đòi hỏi phải đưa ra các phép siêu việt mới, vì các hàm cũ chỉ cho phép tích phân một số lượng nhỏ vi phân phương trình. Poincaré đã thử kế hoạch này với các phương trình tuyến tính, phương trình được biết đến nhiều nhất lúc bấy giờ, đã được Fuchs, Thomé, nghiên cứu lân cận các điểm đã cho, Frobenius, Schwarz, Klein và Halphen. Tự giới hạn những hệ số đại số hữu tỉ, Poincaré có thể tích phân chúng bằng cách sử dụng các hàm do ông đặt tên *Fuchsians*. [81] Ông chia các phương trình này thành "họ". Nếu tích phân của một phương trình như vậy chịu một phép biến đổi nhất định, thì kết quả sẽ là tích phân của một phương trình thuộc cùng một họ. Các siêu việt mới có sự tương đồng lớn với các hàm elip; trong khi vùng của sau có thể được chia thành các hình bình hành, mỗi hình đại diện cho một nhóm, thì vùng thứ nhất có thể được chia thành các đa giác cong, do đó kiến thức về hàm bên trong một đa giác mang theo kiến thức về nó bên trong những người khác. Do đó, Poincaré đạt được cái mà ông gọi là *các nhóm Fuchsian*. Ngoài ra, còn phát hiện ra rằng các hàm Fuchsian có thể được biểu diễn dưới dạng tỷ lệ của hai siêu việt (theta-fuchsian) theo cùng một cách mà các hàm elip có thể được . Nếu, thay vì thay thế tuyến tính bằng các hệ số thực, như được sử dụng trong các nhóm trên, các hệ số ảo được sử dụng, thì sẽ thu được các nhóm không liên tục, mà ông gọi là *Kleinians*. Fuchs và Poincaré đã bắt đầu mở rộng phương trình phi tuyến tính của phương pháp áp dụng cho phương trình tuyến tính.

Chúng ta đã thấy rằng trong số những loại "nhóm" sớm nhất là những nhóm không liên tục hữu hạn (nhóm trong lý thuyết thay thế), mà kể từ thời Galois đã trở thành khái niệm hàng đầu trong lý thuyết về các phương trình đại số; rằng kể từ năm 1876, Felix Klein, H. Poincaré, và những người khác đã áp dụng lý thuyết nhóm không liên tục hữu hạn và vô hạn vào lý thuyết hàm và của vi phân phương trình. Các nhóm liên tục hữu hạn lần đầu tiên được

Sophus Lie, hiện là của Leipzig, làm chủ đề nghiên cứu chung cho vào năm 1873, và được ông áp dụng vào tích phân của các phương trình đạo hàm riêng tuyến tính thông thường .

Nhiều mối quan tâm gắn liền với việc xác định các phương trình vi phân tuyến tính có thể được tích hợp bởi các hàm đơn giản hơn, chẳng hạn như đại số, elliptic hoặc Abelian. Điều này đã được nghiên cứu bởi C. Jordan, P. Appel của Paris (sinh năm 1858) và Poincaré.

Phương thức tích phân được đề cập ở trên, làm cho các tính chất của phương trình được biết đến từ quan điểm của lý thuyết chức năng, không đủ để áp dụng các phương trình vi phân cho các câu hỏi về cơ học. Nếu chúng ta coi là hàm xác định một đường cong phẳng, thì dạng tổng quát của đường cong không xuất hiện từ phương thức khảo sát trên. Tuy nhiên, người ta thường mong muốn xây dựng các đường cong được xác định bởi các phương trình vi phân. Các nghiên cứu về mục đích này đã được thực hiện bởi Briot và Bouquet, và Poincaré. [81]

Chủ đề về nghiệm riêng của phương trình vi phân đã được nâng cao về mặt vật chất kể từ thời Boole của G. Darboux và Cayley. Các bài báo do các nhà toán học này chuẩn bị chỉ ra một khó khăn vẫn chưa được khắc phục: trong khi một nghiệm đơn lẻ, theo quan điểm của phương trình tích phân, phải là một hiện tượng phổ quát, hoặc ít nhất là mặt khác, nó là một hiện tượng rất đặc biệt và ngoại lệ từ quan điểm của phương trình vi phân. [89] Một lý thuyết hình học về các nghiệm kỳ dị giống như lý thuyết được Cayley sử dụng trước đây đã được sử dụng bởi W . W. Johnson của Annapolis.

Một *Chuyên luận nâng cao về phương trình vi phân tuyến tính* (1889) đã được đưa ra bởi Thomas Craig của Đại học Johns Hopkins . Ông đã chọn phương pháp trình bày đại số mà Hermite và Poincaré đã áp dụng, thay vì phương pháp hình học mà Klein và Schwarz ưa thích. Một tác phẩm đáng chú ý, *Traité d'Analyse*, hiện đang

được xuất bản bởi Émile Picard của Paris, mối quan tâm của nó tập trung vào chủ đề phương trình vi phân.

LÝ THUYẾT HÀM

Chúng ta bắt đầu phác họa bước tiến lớn trong lý thuyết hàm bằng cách xem xét lớp đặc biệt gọi là hàm elliptic. Chúng được phát triển phong phú bởi Abel và Jacobi.

Niels Henrick Abel (1802–1829) sinh ra tại Findoë ở Na Uy, và chuẩn bị vào đại học tại trường công giáo ở Christiania. Ông không quan tâm đến toán học cho đến năm 1818, khi B. Holmboe trở thành giảng viên ở đó, và khơi dậy sự quan tâm của Abel bằng cách giao các bài toán ban đầu cho cả lớp. Giống như Jacobi và nhiều thanh niên khác đã trở thành nhà toán học lỗi lạc, Abel đã tìm thấy bài tập đầu tiên về tài năng của mình trong nỗ lực giải bằng đại số phương trình tổng quát bậc 5. Năm 1821, ông vào Đại học Christiania. Các tác phẩm của Euler, Lagrange và Legendre đã được ông nghiên cứu kỹ lưỡng. Ý tưởng về sự nghịch đảo của các hàm elliptic đã có từ thời điểm này. Thành công phi thường của ông trong nghiên cứu toán học đã khiến chính phủ đề nghị cấp một khoản trợ cấp để ông có thể tiếp tục nghiên cứu ở Đức và Pháp. Rời Na Uy vào năm 1825, Abel đến thăm chỉ mụcAbel nhà thiên văn học, Schumacher, ở Hamburg, và dành sáu tháng ở Berlin, nơi ông trở nên thân thiết với **August Leopold Crelle** (1780–1855), và gặp Steiner. Được khuyến khích bởi Abel và Steiner, Crelle bắt đầu viết nhật ký của mình vào năm 1826. Abel bắt đầu hoàn thiện một số tác phẩm của mình để in. Chứng minh của ông về việc không thể giải phương trình tổng quát bậc năm bằng căn thức,—được in lần đầu tiên vào năm 1824 dưới dạng rất ngắn gọn và khó hiểu,—đã được trình bày chi tiết hơn và được xuất bản trong tập đầu tiên . Ông cũng tham gia vào chủ đề về chuỗi vô hạn (đặc biệt là định lý nhị thức , mà ông đã đưa ra trong *Crelle's Journal* một nghiên cứu tổng quát nghiêm ngặt), nghiên

cứu về các hàm số và phép tính tích phân. Những điều tối nghĩa mà anh ta gặp phải ở khắp mọi nơi do các phương pháp phân tích lỏng lẻo phổ biến mà anh ta đã cố gắng làm sáng tỏ. Trong một thời gian ngắn, ông rời Berlin để đến Freiberg, nơi ông ít bị gián đoạn công việc hơn, và chính tại đó, ông đã thực hiện các nghiên cứu về các hàm và hàm Abelian. Tháng 7 năm 1826, Abel rời Đức đến Paris mà không gặp Gauss! Abel đã gửi cho Gauss bằng chứng năm 1824 về việc không thể giải các phương trình bậc cấp thứ năm, mà Gauss không bao giờ chú ý đến. Sự khinh thường này, và một tinh thần kiêu ngạo mà anh ta liên kết với Gauss, đã ngăn cản Abel tốt bụng đến với Göttingen. Anh ta cũng có cảm giác tương tự sau đó với Cauchy. Abel ở lại Paris mười tháng. Ở đó, ông gặp Dirichlet, Legendre, Cauchy, và những người khác; nhưng ít được đánh giá cao. Ông đã xuất bản một số hồi ký quan trọng trong *Crelle's Journal*, nhưng bởi người Pháp tạp chí định kỳ mới này hầu như không tồn tại, và Abel quá khiêm tốn để nói về công việc của mình. , và phục vụ với tư cách là học giả. Crelle cuối cùng đã có được một cuộc hẹn cho anh ấy tại Berlin; nhưng tin tức về nó đã không đến được Na Uy cho đến khi sau cái chết của Abel tại Froland. [82]

Gần như cùng lúc với Abel, Jacobi đã xuất bản các bài báo về các hàm elliptic. Chủ đề yêu thích của Legendre, bấy lâu nay bị bỏ quên, cuối cùng đã được làm phong phú thêm nhờ một số khám phá phi thường. Ưu điểm thu được bằng cách đảo ngược tích phân elliptic loại thứ nhất và coi nó như một hàm theo biên độ của nó (nay được gọi là hàm elliptic) đã được Abel và Jacobi công nhận vài tháng sau đó. Một ý tưởng hiệu quả thứ hai, cũng được cả hai đưa ra một cách độc lập, là sự ra đời của các phép tưởng tượng dẫn đến nhận xét rằng các hàm mới mô phỏng đồng thời các hàm lượng giác và hàm mũ. Vì nó đã chỉ ra rằng trong khi các hàm lượng giác chỉ có chu kỳ thực, và hàm mũ chỉ có chu kỳ ảo, thì hàm elliptic có cả hai loại chu kỳ. Hai khám phá này là nền tảng mà Abel và Jacobi, mỗi người theo cách riêng của mình, đã dựng lên những cấu trúc mới tuyệt đẹp.

Abel đã phát triển các biểu thức kỳ lạ biểu diễn các hàm elip theo chuỗi vô hạn hoặc thương của các tích vô hạn. Những thành tựu của Abel trong các hàm elip cũng tuyệt vời như vậy, nhưng chúng bị lu mờ bởi các nghiên cứu của ông về cái mà ngày nay được gọi là các hàm Abelian. Định lý của Abel về các hàm này là do ông đưa ra dưới nhiều dạng, dạng tổng quát nhất là dạng *Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transentes* (1826) . Lịch sử của cuốn hồi ký này thật thú vị. Vài tháng sau khi đến Paris, Abel đã nộp nó cho Học viện Pháp. Cauchy và Legendre được chỉ định để kiểm tra nó; nhưng không nói gì về nó cho đến sau cái chết của Abel. Trong một tuyên bố ngắn gọn về những khám phá được đề cập, được Abel xuất bản trong *Crelle's Journal*, 1829, có đề cập đến cuốn hồi ký đó. Điều này khiến Jacobi hỏi Legendre chuyện gì đã xảy ra. Legendre nói rằng bản thảo được viết tệ đến mức không thể đọc được, và Abel đã được yêu cầu giao nộp một bản sao tốt hơn, mà anh ấy đã bỏ qua. Cuốn hồi ký vẫn nằm trong tay của Cauchy. Mãi đến năm 1841 nó mới được xuất bản. Do một sơ suất nhỏ, bản thảo đã bị thất lạc trước khi các bản in thử được đọc.

Về hình thức, nội dung của hồi ký thuộc về tích phân. Tích phân Abelian phụ thuộc vào hàm y vô tỉ được liên kết với x bằng một phương trình đại số $F(x,y)=0$. Định lý Abel khẳng định rằng tổng của các tích phân như vậy có thể được biểu diễn bằng một số xác định p của các tích phân tương tự, trong đó p chỉ phụ thuộc vào các tính chất của phương trình $F(x,y)=0$. Sau đó, người ta đã chỉ ra rằng p là phần thiếu của đường cong $F(x,y)=0$. Các định lý cộng của tích phân elliptic có thể suy ra từ định lý Abel. Tích phân siêu elip do Abel giới thiệu và được ông chứng minh là có tính đa chu kỳ, là trường hợp đặc biệt của tích phân Abelian bất cứ khi nào $p=$ or >3. Việc rút gọn Abelian thành tích phân elip đã được nghiên cứu chủ yếu bởi Jacobi, Hermite, Königsberg, Brioschi, Goursat, E. Picard và O. Bolza của Đại học Chicago.

Hai ấn bản về các tác phẩm của Abel đã được xuất bản: ấn bản

đầu tiên của Holmboe năm 1839, và bức thứ hai của Sylow và Lie vào năm 1881.

Định lý Abel được Jacobi phát biểu là khám phá vĩ đại nhất trong thế kỷ của chúng ta về phép tính tích phân. Legendre, người rất ngưỡng mộ thiên tài của Abel, đã gọi nó là " *monumentum aere perennius*." Trong vài năm làm việc được giao cho người trẻ tuổi Nauy, ông thâm nhập vào các lĩnh vực nghiên cứu mới, sự phát triển của lĩnh vực này đã khiến các nhà toán học bận rộn trong hơn nửa thế kỷ.

Một số khám phá của Abel và Jacobi đã được Gauss đoán trước. Trong *Disquisitiones Arithmeticæ*, ông đã quan sát thấy rằng các nguyên tắc mà ông sử dụng trong việc phân chia vòng tròn có thể áp dụng cho nhiều chức năng khác, bên cạnh vòng tròn, và đặc biệt là cho các siêu việt phụ thuộc vào tích phân $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$. Từ Jacobi [83] này kết luận rằng Gauss đã ba mươi năm trước đã xem xét bản chất và tính chất của các hàm elip và đã phát hiện ra tính tuần hoàn kép của chúng. giấy tờ trong các tác phẩm được thu thập của Gauss xác nhận kết luận này.

Carl Gustav Jacob Jacobi [84] (1804–1851) có cha mẹ là người Do Thái sinh ra tại Potsdam. Giống như nhiều nhà toán học khác, ông bắt đầu làm quen với toán học khi đọc Euler. Tại Đại học Berlin, nơi ông theo đuổi nghiên cứu toán học của mình một cách độc lập với các khóa giảng dạy, ông đã lấy bằng Tiến sĩ. vào năm 1825. Sau khi giảng dạy ở Berlin trong hai năm, ông được bầu làm giáo sư đặc biệt tại Königsberg, và hai năm sau là giáo sư phổ thông ở đó. Sau khi xuất bản *Fundamenta Nova*, ông đã dành một số thời gian thời gian du lịch, gặp Gauss ở Göttingen và Legendre, Fourier, Poisson, ở Paris. Năm 1842, ông và đồng nghiệp của mình, Bessel, tham dự các cuộc họp của Hiệp hội Anh, nơi họ làm quen với các nhà toán học Anh.

Các nghiên cứu ban đầu của ông là về phép gần đúng của Gauss

với giá trị của tích phân xác định, phương trình đạo hàm riêng, hệ số của Legendre và dư lượng bậc ba. Anh ấy đã đọc *Exercises* của Legendre, giải thích về tích phân elliptic. Khi trả lại cuốn sách cho thư viện, anh ấy rất chán nản và nói rằng những cuốn sách quan trọng thường khơi dậy trong anh ấy những ý tưởng mới, nhưng lần này anh ấy đã không được dẫn dắt đến một ý tưởng ban đầu nào. Mặc dù lúc đầu còn chậm, nhưng càng về sau, các ý tưởng của anh ấy càng tuôn chảy phong phú hơn. Nhiều khám phá của ông về hàm elip được thực hiện độc lập bởi Abel. Jacobi đã thông báo những nghiên cứu đầu tiên của mình cho *Crelle's Journal*. Năm 1829, ở tuổi hai mươi lăm, ông đã xuất bản *Fundamenta Nova Theoriæ Functionum Ellipticarum*, trong đó chứa ở dạng cô đọng các kết quả chính trong các hàm elliptic. Công việc này ngay lập tức đảm bảo cho anh ta một danh tiếng rộng rãi. Sau đó, ông đã nghiên cứu kỹ hơn về các hàm theta và thuyết trình cho các học sinh của mình về lý thuyết mới về các hàm elip dựa trên các hàm theta. Ông đã phát triển một lý thuyết về phép biến đổi đưa ông đến vô số công thứcæ chứa q, một hàm siêu việt của mô đun, được xác định bởi phương trình $q = e^{-\pi k'/k}$. Ông cũng được dẫn dắt bởi nó để xem xét hai hàm mới H và Θ, tách biệt từng hàm với hai đối số khác nhau là bốn hàm theta (đơn) được chỉ định bởi Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4. [56] Trong một hồi ký ngắn nhưng rất quan trọng vào năm 1832, ông đã chỉ ra rằng đối với tích phân siêu elip của bất kỳ lớp nào, các hàm trực tiếp mà Định lý Abel có tham chiếu không phải là các hàm của biến đơn , chẳng hạn như biến elliptic sn, cn, dn, mà là hàm của các biến p . [56] Do đó, trong trường hợp $p = 2$, mà Jacobi đặc biệt xem xét, nó chỉ ra rằng định lý Abel có tham chiếu đến hai hàm $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, mỗi hàm của hai biến và đưa ra một định lý bổ sung có hiệu lực cho biểu thức của các hàm $\lambda(u+u',v+v')$, $\lambda_1(u+u',v+v')$ theo đại số xét về các hàm $\lambda(u,v)$, $\lambda_1(u,v)$, $\lambda(u',v')$, $\lambda_1(u',v')$. Theo hồi ký của Abel và Jacobi, có thể coi rằng khái niệm về hàm Abelian của các biến p đã được thiết lập và định lý bổ sung cho các hàm này đã được đưa ra.

Các nghiên cứu gần đây liên quan đến hàm số Abelian đã được thực hiện bởi Weierstrass, E. Picard, Madame Kowalevski và Poincaré. Công trình của Jacobi về phương trình vi phân, định thức, động lực học và lý thuyết số được đề cập ở nơi khác.

Năm 1842, Jacobi đến thăm Ý trong vài tháng để phục hồi sức khỏe. Vào thời điểm này, chính phủ Phổ đã cấp cho ông một khoản trợ cấp, và ông chuyển đến Berlin, nơi ông đã trải qua những năm cuối đời.

Các nghiên cứu về các chức năng được đề cập cho đến nay đã được mở rộng rất nhiều. Năm 1858 **Charles Hermite** ở Paris (sinh năm 1822), đã giới thiệu thay cho biến q của Jacobi một biến mới ω được kết nối với nó bằng phương trình $q = e^{i\pi\omega}$, sao cho $\omega = ik'/k$, và dẫn đến việc xem xét các hàm $\phi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$. [56] Henry Smith coi một hàm theta với đối số bằng 0, là một hàm của ω. Ông gọi đây là hàm omega, trong khi ba hàm $\phi(\omega)$, $\psi(\omega)$, $\chi(\omega)$, là các hàm mô-đun của ông . Meissel của Kiel, J. Thomae của Jena, Alfred Enneper của Göttingen (1830–1885). Một công thức tổng quát cho tích của hai hàm theta được đưa ra vào năm 1854 bởi H. Schröter của Breslau (1829–1892) . Các hàm này cũng đã được nghiên cứu bởi Cauchy, Königsberger của Heidelberg (sinh năm 1837), F. S. Richelot xứ Königsberg (1808–1875), Johann Georg Rosenhain của Königsberg (1816–1887), L. Schläfli của Bern (sinh năm 1818). [85]

Phương pháp rút gọn vi phân elliptic của Legendre về dạng chuẩn tắc của Legendre đã dẫn đến nhiều nghiên cứu, trong đó quan trọng nhất là nghiên cứu của Richelot và Weierstrass của Berlin.

Các phép biến đổi đại số của các hàm elliptic liên quan đến mối quan hệ giữa mô đun cũ và mô đun mới mà Jacobi biểu thị bằng một phương trình vi phân bậc ba, và cũng bằng một phương trình đại số, được ông gọi là “phương trình mô đun.” Khái niệm về mô đun. phương trình đã quen thuộc với Abel, nhưng sự phát triển của chủ đề này phụ thuộc vào các nhà điều tra sau này. Những phương trình này

đã trở nên quan trọng trong lý thuyết về phương trình đại số và đã được nghiên cứu bởi Sohnke, E. Mathieu, L. Königsberger, E. Betti of Pisa (đã chết 1892), C. Hermite of Paris, Joubert of Angers, Francesco Brioschi of Milan, Schläfli, H. Schröter, M. Gudermann của Cleve, Gützlaff.

Felix Klein của Göttingen đã thực hiện một nghiên cứu sâu rộng về các hàm mô-đun , xử lý một loại hoạt động nằm giữa giữa hai loại cực trị, được gọi là lý thuyết thay thế và lý thuyết bất biến và hiệp phương sai. Lý thuyết của Klein đã được học trò của ông, Robert Fricke, trình bày dưới dạng sách. Các đặc điểm nổi bật hơn của lý thuyết này lần đầu tiên được xuất bản trong tác phẩm của ông *Ikosaeder*, 1884. Các nghiên cứu của ông bao gồm lý thuyết về các hàm mô đun như một lớp cụ thể của các hàm elip, tuyên bố về một vấn đề tổng quát hơn dựa trên học thuyết về các nhóm hoạt động và sự phát triển hơn nữa của đối tượng liên quan đến một lớp các bề mặt của Riemann.

Các hàm elliptic được Abel biểu diễn dưới dạng thương của các tích vô hạn kép. Tuy nhiên, anh ấy đã không hỏi một cách nghiêm ngặt về tính hội tụ của các sản phẩm. Năm 1845, Cayley đã nghiên cứu các sản phẩm này và tìm thấy cho chúng một lý thuyết hoàn chỉnh, một phần dựa trên cách giải thích hình học, mà ông đã đặt cơ sở cho toàn bộ lý thuyết về các hàm elliptic. Eisenstein đã thảo luận bằng các phương pháp phân tích thuần túy về tích vô hạn kép tổng quát, và đạt được kết quả đã được đơn giản hóa rất nhiều về mặt hình thức bởi lý thuyết về các nhân tố cơ bản, do Weierstrass. Một hàm nhất định liên quan đến tích vô hạn gấp đôi của đã được Weierstrass gọi là hàm sigma, và là cơ sở lý thuyết tuyệt vời của ông về các hàm elliptic . Trình bày có hệ thống đầu tiên về lý thuyết chức năng elip của Weierstrass được xuất bản vào năm 1886 bởi G. H. Halphen trong *Théorie des fonctions elliptiques et des leurs application* của anh ấy. Các ứng dụng của các chức năng này cũng đã được đưa ra bởi A. G. Đồi xanh. Các khái quát hóa tương tự như

của của Weierstrass về các hàm elip đã được thực hiện bởi Felix Klein về các hàm siêu elip.

Các công trình tiêu chuẩn về hàm elliptic đã được xuất bản bởi *Briot and Bouquet* (1859), bởi *Königsberger*, *Cayley*, *Heinrich Durège* của Praha (1821–1893), và những người khác.

Công trình của Jacobi về Abelian và các hàm theta đã được mở rộng rất nhiều bởi **Adolph Göpel** (1812–1847), giáo sư tại trường thể dục gần Potsdam, và **Johann Georg Rosenhain** của Königsberg (1816–1887). Göpel trong của mình *Theoriæ transcentium primi ordinis adumbratio levis* (*Crelle*, 35, 1847) và Rosenhain trong một số hồi ký đã thiết lập mỗi cái một cách độc lập, dựa trên sự tương tự của các hàm theta đơn lẻ, các hàm của hai biến , được gọi là các hàm theta kép, và liên quan đến chúng đã xây dựng lý thuyết về các hàm Abelian hai biến. Các quan hệ theta được thiết lập bởi Göpel và Rosenhain đã không được phát triển thêm trong ba mươi năm, mặc dù thực tế là chuỗi theta kép ngày càng có tầm quan trọng trong giải tích, hình học, và các vấn đề cơ học, đồng thời Hermite và Königsberger đã xem xét chủ đề của Cuối cùng, các nghiên cứu của C. W. Borchardt ở Berlin (1817–1880), xử lý biểu diễn của bề mặt Kummer bằng quan hệ song phương của Göpel giữa bốn hàm theta của hai biến và nghiên cứu của H. H. Weber ở Marburg, F. Prym ở Würzburg, Adolf Krazer và Martin Krause của Dresden đã dẫn đến những quan điểm rộng hơn. Các nghiên cứu về các hàm theta kép do Cayley thực hiện đã được mở rộng tới tăng gấp bốn hàm theta của Thomas Craig thuộc Đại học Johns Hopkins.

Bắt đầu với các tích phân ở dạng tổng quát nhất và xem xét các hàm nghịch đảo tương ứng với các tích phân này (hàm Abelian của các biến p), *Riemann* đã định nghĩa các hàm theta của các biến p dưới dạng tổng của một chuỗi cấp số nhân vô hạn p-tuply, thuật ngữ chung phụ thuộc vào các biến p . Riemann chỉ ra rằng các hàm Abelian được kết nối đại số với các hàm theta của các đối số thích

hợp và trình bày lý thuyết ở dạng rộng nhất. [56] Ông đặt lý thuyết về nhiều hàm theta dựa trên các nguyên tắc chung của lý thuyết chức năng của một biến phức tạp.

Thông qua các nghiên cứu của A. Brill of Tübingen, M. Nöther của Erlangen, và Ferdinand Lindemann của Munich, đã tạo ra liên quan đến định lý Riemann-Roch và lý thuyết về phần dư, đã phát triển vượt ra ngoài lý thuyết của các hàm Abelian một lý thuyết về các hàm đại số và các nhóm điểm trên các đường cong đại số .

Trước khi tiếp tục với lý thuyết tổng quát về các hàm, chúng ta đề cập đến "phép tính của các hàm,' được nghiên cứu chủ yếu bởi C. Babbage, J. F. W. Herschel và De Morgan, không phải như vậy nhiều lý thuyết về chức năng như một lý thuyết về nghiệm của phương trình chức năng bằng các hàm hoặc ký hiệu đã biết.

Lịch sử của lý thuyết tổng quát về hàm số bắt đầu với việc chấp nhận các định nghĩa mới về hàm số. Với Bernoullis và Leibniz, y được gọi là một hàm của x, nếu tồn tại một phương trình giữa các biến này để có thể tính toán y cho bất kỳ giá trị nào giá trị của x nằm ở bất kỳ đâu giữa $-\infty$ và $+\infty$. Việc nghiên cứu lý thuyết Fourier về nhiệt đã đưa Dirichlet đến một định nghĩa mới: y được gọi là một hàm của x, nếu y sở hữu một hoặc nhiều giá trị xác định cho từng giá trị nhất định mà x được giả định là nhận trong một khoảng x_0 to x_1. Trong các chức năng được xác định như vậy, không cần có mối liên hệ phân tích nào giữa y và x, và việc tìm kiếm các điểm gián đoạn có thể xảy ra là điều cần thiết. Cauchy đã tạo ra một cuộc cách mạng lớn trong các ý tưởng về hàm số khi, trong một hàm số được định nghĩa bởi Dirichlet, ông đưa ra các giá trị ảo cho các biến, và khi ông mở rộng khái niệm về một hàm số xác định. tích phân bằng cách để biến chuyển từ giới hạn này sang giới hạn khác bằng một chuỗi các giá trị ảo dọc theo các đường tùy ý. Cauchy đã thiết lập một số định lý cơ bản, và đã tạo động lực lớn đầu tiên cho việc nghiên cứu lý thuyết hàm tổng quát. Nghiên cứu của ông đã được

tiếp tục ở Pháp bởi Puiseux và Liouville. Nhưng còn nhiều cuộc điều tra sâu sắc khác đã được Riemann thực hiện ở Đức.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) sinh ra tại Breselenz ở Hanover. Cha của ông muốn ông theo học thần học, và theo đó ông đã theo học ngữ văn và thần học tại Göttingen. Ông cũng tham dự một số bài giảng về toán học. Niềm đam mê của ông đối với môn khoa học này đến nỗi ông từ bỏ thần học. Sau một thời gian nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của Gauss và Stern, vào năm 1847, ông được mời đến Berlin bởi một thiên hà gồm các nhà toán học, trong đó Dirichlet, Jacobi, Steiner và Eisenstein đã tỏa sáng. Trở lại với Göttingen trong 1850, ông theo học vật lý dưới sự hướng dẫn của Weber và nhận được tiến sĩ vào năm sau. Nhân dịp đó, luận án được trình bày, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse*, rất hào hứng sự ngưỡng mộ của Gauss đối với một mức độ rất khác thường, cũng như bài giảng thử của Riemann, *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Habilitionsschrift của Riemann là biểu diễn của một hàm bằng phương tiện của một chuỗi lượng giác, trong mà ông đã tiến bộ về mặt vật chất vượt xa vị trí của Dirichlet. Trái tim của chúng ta bị thu hút bởi thiên tài có năng khiếu phi thường nhưng nhút nhát này khi chúng ta đọc về sự rụt rè và lo lắng thể hiện khi anh ấy bắt đầu giảng bài tại Göttingen, và niềm vui của anh ấy trước lượng khán giả đông bất ngờ gồm tám sinh viên trong bài giảng đầu tiên của anh ấy trên phương trình vi phân.

Sau đó, ông giảng về các hàm Abelian cho một lớp chỉ có ba — Schering, Bjerknes và Dedekind. Gauss mất năm 1855, và Dirichlet kế vị. Sau cái chết của người sau, vào năm 1859, Riemann được phong làm giáo sư bình thường. Năm 1860, ông đến thăm Paris, nơi ông làm quen với các nhà toán học Pháp. Tình trạng sức khỏe mong manh đã khiến anh ấy phải đến Ý ba lần. Anh ấy chết trong chuyến đi cuối cùng của mình tại Selasca, và được chôn cất tại Biganzolo.

Giống như tất cả các nghiên cứu của Riemann, những nghiên cứu về chức năng rất sâu sắc và có ảnh hưởng sâu rộng. Ông đã đặt nền móng cho lý thuyết tổng quát của về các hàm của biến phức. Lý thuyết về tiềm năng, cho đến thời điểm đó chỉ được sử dụng trong vật lý toán học, đã được ông áp dụng trong toán học thuần túy. Theo đó, ông đã dựa trên lý thuyết hàm của mình dựa trên phương trình đạo hàm riêng, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0$, giá trị này phải đúng với hàm phân tích $w = u + iv$ của $z = x + iy$. Dirichlet đã chứng minh rằng (đối với một mặt phẳng) luôn có một và chỉ một hàm số của x và y, thỏa mãn $\Delta u = 0$, và hàm này cùng với vi phân của nó thương số của hai đơn đặt hàng đầu tiên, dành cho tất cả các giá trị của x và y trong một khu vực nhất định có một giá trị và liên tục, và có giá trị cho các điểm trên ranh giới của khu vực tùy ý. [86] Riemann gọi đây là "Nguyên lý Dirichlet," nhưng định lý tương tự đã được Green phát biểu và được Ngài William Thomson chứng minh bằng phân tích. Sau đó, w được xác định duy nhất cho tất cả các điểm trong một mặt kín, nếu u được cho tùy ý cho tất cả các điểm trên đường cong, trong khi v là đưa ra cho một điểm trong đường cong. Để xử lý trường hợp phức tạp hơn trong đó w có n giá trị cho một giá trị của z, và để quan sát các điều kiện về tính liên tục, Riemann đã phát minh ra các mặt nổi tiếng, được gọi là "các mặt Riemann," bao gồm của n các mặt phẳng hoặc các tấm trùng nhau, sao cho việc di chuyển từ tấm này sang tấm khác được thực hiện tại các điểm nhánh và n tấm đó cùng nhau tạo thành một bề mặt được kết nối nhiều lần, có thể được mổ xẻ bằng cách cắt chéo thành một bề mặt được kết nối đơn lẻ. Do đó, hàm n-valued w trở thành hàm một giá trị. Được hỗ trợ bởi các nghiên cứu của J. Lüroth ở Freiburg và của Clebsch, W. K. Clifford đã đưa bề mặt Riemann cho các hàm đại số về dạng chính tắc, trong đó chỉ hai lá cuối cùng của n được liên thông nhân, rồi biến đổi bề mặt vào bề mặt của vật rắn có lỗ p . A. Hurwitz của Zürich đã thảo luận về câu hỏi, bề mặt của Riemann được xác định bao nhiêu bằng

cách gán số lượng tờ, điểm nhánh và nhánh của nó dòng. [62]

Lý thuyết của Riemann xác định các tiêu chí sẽ xác định một hàm phân tích bằng sự trợ giúp của các điều kiện biên và không liên tục của nó, và do đó xác định một hàm độc lập với biểu thức toán học. Để chỉ ra rằng hai biểu thức khác nhau là giống hệt nhau, không nhất thiết phải biến đổi biểu thức này thành biểu thức kia, nhưng chỉ cần chứng minh sự đồng ý ở một mức độ thấp hơn nhiều, chỉ ở một số điểm quan trọng là đủ.

Lý thuyết của Riemann, dựa trên nguyên lý Dirichlet (Định lý của Thomson), không tránh khỏi những phản đối. Rõ ràng là sự tồn tại của một hàm dẫn xuất không phải là hệ quả của tính liên tục, và rằng một hàm có thể khả tích mà không khả vi. Người ta không biết các phương pháp của phép tính vô hạn và phép tính biến thiên (theo đó nguyên lý Dirichlet được thiết lập) có thể được áp dụng bao xa cho một hàm giải tích chưa biết trong tính tổng quát của nó. Do đó, việc sử dụng các phương pháp này sẽ mang lại cho các chức năng các thuộc tính mà bản thân chúng yêu cầu bằng chứng. Những phản đối thuộc loại này đối với lý thuyết của Riemann đã được Kronecker, Weierstrass và những người khác nêu ra, và người ta nghi ngờ liệu của ông hầu hết các định lý quan trọng đều đã được chứng minh. Do đó, người ta đã cố gắng ghép các suy đoán của Riemann vào các phương pháp có nguồn gốc sâu xa hơn của Weierstrass. Loại thứ hai đã phát triển một lý thuyết chức năng bằng cách bắt đầu, không phải với lý thuyết tiềm năng, mà với các biểu thức và hoạt động phân tích. Cả hai đều áp dụng lý thuyết của họ cho các hàm Abelian, nhưng ở đó công trình của Riemann tổng quát hơn. [86]

Lý thuyết hàm một biến phức đã được nghiên cứu từ thời Riemann chủ yếu bởi **Karl Weierstrass** của Berlin (sinh năm 1815), **Gustaf Mittag-Leffler** của Stockholm (sinh năm 1846), và Poincaré của Paris. Trong số ba loại hàm (viz. hàm thống nhất xuyên suốt, hàm chỉ thống nhất trong không gian lỗ hổng và hàm không đồng nhất)

Weierstrass đã chỉ ra rằng những hàm số hạng nhất có thể được phát triển theo lũy thừa tăng dần của x thành chuỗi hội tụ, có thể được phân tích thành tích của vô số thừa số sơ cấp. Nhân tố chính của của Weierstrass n là tích $\left(1-\frac{x}{a}\right)e^{P(x)}$, $P(x)$ là một đa thức nguyên của bậc nth bậc. Một chức năng của loài n là một, tất cả các yếu tố chính của nó là của loài n. Sự phân loại này đã làm nảy sinh nhiều vấn đề thú vị cũng được Poincaré nghiên cứu.

Loại đầu tiên trong ba loại hàm của một biến phức bao gồm, trong số những loại khác, các hàm có vô số điểm kỳ dị, nhưng không có đường kỳ dị và đồng thời không có điểm kỳ dị cô lập. Đây là các chức năng Fuchsian, tồn tại trong toàn bộ phạm vi. Poincaré lần đầu tiên đưa ra một ví dụ về chức năng như vậy.

Các hàm đồng nhất của hai biến, không bị thay đổi bởi một số thay thế tuyến tính nhất định, được gọi là các hàm hyperfuchsian, đã được nghiên cứu bởi E. Picard của Paris và Poincaré. [81]

Chức năng của lớp thứ hai, chỉ thống nhất trong không gian lỗ hổng, lần đầu tiên được chỉ ra bởi Weierstrass. Các hàm Fuchsian và Kleinian nói chung không tồn tại, ngoại trừ trong phần bên trong của một đường tròn hoặc của một miền có giới hạn khác, và do đó là ví dụ về các hàm của lớp thứ hai. Poincaré đã chỉ ra cách tạo ra các hàm của lớp này, và đã nghiên cứu chúng theo các dòng được đánh dấu bởi Weierstrass. Điều quan trọng là bằng chứng của anh ấy rằng không có cách nào khái quát hóa chúng để loại bỏ các lacunæ.

Các hàm không đồng nhất kém phát triển hơn nhiều so với các lớp trước đó, mặc dù các thuộc tính của chúng trong vùng lân cận của một điểm nhất định đã được nghiên cứu kỹ lưỡng và mặc dù đã được đưa ra nhiều ánh sáng trên chúng bằng cách sử dụng các bề mặt của Riemann. Với quan điểm rút gọn nghiên cứu của họ thành nghiên cứu về các siêu việt đồng nhất, Poincaré đã chứng minh rằng nếu y là bất kỳ hàm phân tích không đồng nhất nào của x, thì người ta luôn có thể tìm được một biến z, sao cho x và y là các hàm đồng

nhất của z.

Weierstrass và Darboux đều có các ví dụ cụ thể về các hàm liên tục không có đạo hàm. Trước đây người ta thường cho rằng mọi hàm số đều có đạo hàm. Ampère là người đầu tiên cố gắng chứng minh một cách phân tích (1806) sự tồn tại của đạo hàm, nhưng chứng minh này không có giá trị. Khi xét các hàm không liên tục, Darboux đã thiết lập một cách chặt chẽ điều kiện cần và đủ để một hàm liên tục hoặc không liên tục có thể tích phân. Ông đưa ra bằng chứng mới về sự cẩn thận cần phải thực hiện trong việc sử dụng chuỗi bằng cách đưa ra ví dụ về chuỗi luôn hội tụ và liên tục, sao cho chuỗi được tạo bởi tích phân của các số hạng luôn hội tụ, nhưng không đại diện cho tích phân. của loạt đầu tiên. [87]

Lý thuyết chung về hàm hai biến đã được Weierstrass và Poincaré nghiên cứu ở một mức độ nào đó.

H. A. Schwarz ở Berlin (sinh năm 1845), một học trò của Weierstrass, đã đưa ra biểu diễn theo (*Abbildung*) của các bề mặt khác nhau trên một hình tròn. Bằng sự trợ giúp của một số phép thế nhất định, một đa giác giới hạn bởi các cung tròn thành một đa giác khác cũng giới hạn bởi các cung tròn, ông đã dẫn đến một phương trình vi phân đáng chú ý $\psi(u',t) = \psi(u,t)$, trong đó $\psi(u,t)$ là biểu thức mà Cayley gọi là "đạo hàm Schwarzian," và điều này đã dẫn Sylvester đến lý thuyết tương hỗ. Sự phát triển của Schwarz trên các mặt cực tiểu, công trình của ông về chuỗi siêu hình học, câu hỏi của ông về sự tồn tại của nghiệm đối với các phương trình đạo hàm riêng quan trọng trong các điều kiện quy định, đã bảo đảm một vị trí nổi bật trong tài liệu toán học.

Lý thuyết hiện đại về hàm một biến thực lần đầu tiên được đưa ra bởi H. Hankel, Dedekind, G. Cantor, Dini, và Heine, và sau đó được Weierstrass tiếp tục, chủ yếu là, Schwarz , Du Bois-Reymond, Thomae, và Darboux. Hankel đã thiết lập nguyên tắc cô đặc các điểm kỳ dị; Dedekind và Cantor đã đưa ra định nghĩa cho

các số vô tỉ; tích phân xác định đã được nghiên cứu bởi Thomae, Du Bois-Reymond, và Darboux dọc theo các dòng được chỉ ra bởi định nghĩa của các tích phân đó do Cauchy, Dirichlet và Riemann đưa ra . Dini đã viết một cuốn sách về chức năng của một biến thực (1878), cuốn sách này đã được dịch sang tiếng Đức, có bổ sung, của J. Lüroth và A. Schepp. Các công trình quan trọng về lý thuyết chức năng là *Cours de M. Hermite*, *Théorie des Fonctions của Tannery d'une variable seule* , *Luận về Lý thuyết Hàm* của *James Harkness* và *Frank Morley*, và *Lý thuyết Hàm của một biến phức* của *A. R. Forsyth*.

LÝ THUYẾT SỐ

"Toán học, nữ hoàng của khoa học, và số học, nữ hoàng của toán học." Đó là câu châm ngôn của Gauss, , người đã được định sẵn để cách mạng hóa lý thuyết số. Khi được hỏi ai là nhà toán học vĩ đại nhất ở Đức, Laplace trả lời, Pfaff. Khi người hỏi nói lẽ ra anh ta phải nghĩ là Gauss, Laplace trả lời: "Pfaff cho đến nay là nhà toán học vĩ đại nhất ở Đức; nhưng Gauss là người vĩ đại nhất ở châu Âu." [83] Gauss là một trong ba bậc thầy vĩ đại nhất của giải tích hiện đại,—Lagrange, Laplace, Gauss. Trong số ba người cùng thời này, ông là người trẻ nhất. Trong khi hai giai đoạn đầu tiên thuộc về thời kỳ trong lịch sử toán học trước giai đoạn hiện đang được xem xét, Gauss là người có các bài viết thực sự được cho là đánh dấu sự khởi đầu của thời đại của chính chúng ta. Ở ông, khả năng sáng tạo dồi dào, được thể hiện bởi các nhà toán học của thời kỳ trước, được kết hợp với sự nghiêm ngặt tuyệt đối trong việc chứng minh, điều thường rất thiếu trong các bài viết của họ, và điều mà người Hy Lạp cổ đại có thể phải ghen tị. Không giống như Laplace, Gauss nỗ lực trong các tác phẩm của mình sau sự hoàn hảo về hình thức. Ông sánh ngang với Lagrange về sự tao nhã và vượt qua người Pháp vĩ đại này về sự chặt chẽ. Thật tuyệt vời là sự phong phú về ý tưởng

của anh ấy; ý nghĩ này nối tiếp ý tưởng khác nhanh đến nỗi anh ấy hầu như không có thời gian để viết ra ngay cả những nét sơ sài nhất. Ở tuổi hai mươi, Gauss đã lật đổ những lý thuyết cũ và phương pháp cũ trong tất cả các ngành toán học cao cấp Ông là người đầu tiên quan sát thấy sự chặt chẽ trong việc xử lý các chuỗi vô hạn, là người đầu tiên nhận thức đầy đủ và nhấn mạnh tầm quan trọng cũng như sử dụng các định thức một cách có hệ thống. và trong số những người tưởng tượng về , người đầu tiên tìm ra phương pháp bình phương nhỏ nhất, là người đầu tiên quan sát thấy tính tuần hoàn kép của các hàm elliptic. với Weber, t he từ kế hai chiều và dụng cụ đo độ lệch. Ông đã xây dựng lại toàn bộ khoa học từ tính.

Carl Friedrich Gauss [47] (1777–1855), con trai của một thợ nề, sinh ra ở Brunswick. Anh ấy thường nói đùa rằng anh ấy có thể tính toán trước khi nói chuyện. Năng khiếu tính toán kỳ diệu của cậu bé đã thu hút sự chú ý của Bartels, sau này là giáo sư toán học tại Dorpat, người đã đưa cậu đến với sự chú ý của Charles William, Công tước xứ Brunswick. Công tước đảm nhận việc giáo dục cậu bé và gửi cậu đến Collegium Carolinum. Sự tiến bộ của anh ấy về ngôn ngữ ở đó khá ngang bằng với tiến bộ về toán học. Năm 1795, ông đến Göttingen, vẫn chưa quyết định nên theo đuổi triết học hay toán học. Abraham Gotthelf Kästner, khi đó là giáo sư toán học ở đó, và hiện được nhớ đến nhiều nhất với *Geschichte der Mathematik* (1796), không phải là một giáo viên truyền cảm hứng. Ở tuổi mười chín, Gauss khám phá ra một phương pháp nội tiếp một đa giác đều mười bảy cạnh trong một đường tròn, và thành công này đã khuyến khích ông theo đuổi toán học. Anh ấy làm việc hoàn toàn độc lập với các giáo viên của mình và khi còn là sinh viên tại Göttingen, anh ấy đã có một số khám phá vĩ đại nhất. Số học cao hơn là nghiên cứu yêu thích của anh ấy. Trong số những người bạn thân thiết của anh ấy có Wolfgang Bolyai. Sau khi hoàn thành theo lộ trình của mình, anh ấy quay trở lại Brunswick. Năm 1798 và 1799, ông sửa sang trường đại học ở Helmstädt để tham khảo thư viện, và ở đó làm quen với

Pfaff, một nhà toán học có nhiều quyền lực. Năm 1807, Hoàng đế Nga đề nghị Gauss một ghế trong Học viện ở St. Petersburg, nhưng theo lời khuyên của nhà thiên văn học Olbers, người muốn đảm bảo ông làm giám đốc của một đài quan sát mới được đề xuất tại Göttingen, ông đã từ chối đề nghị và chấp nhận vị trí tại Göttingen. Gauss phản đối rõ rệt việc ngồi ghế toán học, và thích vị trí nhà thiên văn học hơn để ông có thể dành toàn bộ thời gian cho khoa học. Ông đã dành cả đời mình cho Göđang làm việc liên tục. Năm 1828, ông đến Berlin để tham dự một cuộc họp của các nhà khoa học, nhưng sau đó, ông không bao giờ rời Göttingen nữa, ngoại trừ năm 1854, khi một tuyến đường sắt được mở giữa Göttingen và Hanover. Anh ấy có một ý chí mạnh mẽ, và tính cách của anh ấy thể hiện sự pha trộn kỳ lạ giữa phẩm giá tự giác và sự đơn giản như trẻ con. Anh ấy ít giao tiếp, và đôi khi ủ rũ.

Một kỷ nguyên mới trong lý thuyết số bắt đầu từ việc xuất bản *Disquisitiones Arithmeticæ* Leipzig, 1801. Sự khởi đầu của công việc này bắt đầu từ năm 1795. Một số kết quả của nó đã được Lagrange và Euler đưa ra trước đó , nhưng đã được Gauss tiếp cận một cách độc lập, người đã tìm hiểu sâu về chủ đề này trước khi làm quen với các bài viết của những người tiền nhiệm vĩ đại của mình. *Disquisitiones Arithmeticæ* đã được in khi *Théorie des Nombres* của Legendre xuất hiện. Định luật tương hỗ bậc hai, được đưa ra trong phần thứ tư của công trình của Gauss, một định luật liên quan đến toàn bộ lý thuyết về dư lượng bậc hai, được ông phát hiện bằng phương pháp quy nạp trước khi ông mười tám tuổi và đã được ông chứng minh một năm sau. Sau đó, ông biết rằng Euler đã phát biểu định lý đó một cách không hoàn hảo, và rằng Legendre đã cố gắng chứng minh nó, nhưng gặp phải những khó khăn dường như không thể vượt qua. Trong phần thứ năm, Gauss đã đưa ra bằng chứng thứ hai về "viên ngọc quý" này của số học cao hơn. Năm 1808 diễn ra cuộc biểu tình thứ ba và thứ tư; vào năm 1817, thứ năm và thứ sáu. Không có gì ngạc nhiên khi cá nhân ông cảm thấy gắn bó với

định lý này. Chứng minh cũng được đưa ra bởi Jacobi, Eisenstein, Liouville, Lebesgue, A. Genocchi, Kummer, M. A. Stern, Chr. Zeller, Kronecker, Bouniakowsky, E. Schering, J. Petersen , Voigt, E. Busche, và Th. Pepin. [48] The Giải bài toán biểu diễn các số bằng dạng nhị phân bậc hai là một trong những thành tựu vĩ đại của Gauss. Ông đã tạo ra một thuật toán mới bằng cách giới thiệu lý thuyết về sự đồng dạng. Phần thứ tư của *Disquisitiones Arithmeticæ* xử lý các đồng dạng bậc hai và phần thứ năm, xử lý các dạng bậc hai, cho đến thời Jacobi, đã bị bỏ quên phổ biến, nhưng chúng đã được điểm khởi đầu của một chuỗi dài các nghiên cứu quan trọng. Phần thứ bảy hoặc phần cuối cùng, phát triển lý thuyết về phép chia hình tròn, đã được nhận ngay từ đầu với sự nhiệt tình xứng đáng và kể từ đó đã được xây dựng nhiều lần cho học sinh. Một tác phẩm tiêu chuẩn về *Kreistheilung* được xuất bản năm 1872 bởi Paul Bachmann, sau đó là của Breslau. Gauss đã lên kế hoạch cho phần thứ tám, phần này đã bị bỏ qua để giảm bớt chi phí xuất bản. Các bài báo của ông về lý thuyết số không phải tất cả đều được đưa vào chuyên luận vĩ đại của ông. Một số trong số chúng được xuất bản lần đầu tiên sau khi ông qua đời trong các tuyển tập của ông (1863–1871). Ông đã viết hai cuốn hồi ký về lý thuyết về dư lượng hai phương (1825 và 1831), trong đó chứa một định lý về sự tương hỗ bậc hai.

Gauss đến với thiên văn học nhờ việc phát hiện ra hành tinh Ceres tại Palermo vào năm 1801. Việc ông xác định các thành phần trong quỹ đạo của nó với độ chính xác đủ để cho phép Olbers tái khám phá nó, làm cho tên của Gauss thường được biết đến. Năm 1809, ông xuất bản *Theoria motus corporum coelestium*, trong đó có phần thảo luận về các vấn đề nảy sinh trong việc xác định chuyển động của các hành tinh và sao chổi từ các quan sát được thực hiện trên chúng trong mọi trường hợp. Trong đó có bốn công thức trong lượng giác cầu, ngày nay thường được gọi là "Tương tự Gauss", nhưng đã được Karl Brandon Mollweide ở Leipzig (1774–1825) xuất bản phần

nào trước đó, và trước đó nữa của Jean Baptiste Joseph Delambre (1749–1822). [44] Đài quan sát thiên văn và từ tính đã dành nhiều năm làm việc chăm chỉ. Ông đã thành lập Hiệp hội Từ tính Đức, với mục tiêu đảm bảo các quan sát liên tục vào những thời điểm cố định. Ông đã tham gia quan sát trắc địa, và vào năm 1843 và 1846 đã viết hai cuốn hồi ký *Ueber Gegenstände der höheren Geodesie*. Ông viết về lực hút của các ellipsoid đồng nhất, năm 1813. Trong một hồi ký về lực hút mao dẫn, năm 1833, ông giải một bài toán trong phép tính biến thể liên quan đến sự biến thiên của một tích phân kép nhất định, giới hạn của tích phân cũng có thể thay đổi; đó là ví dụ sớm nhất về giải pháp cho một vấn đề như vậy. Ông đã thảo luận về vấn đề tia sáng đi qua một hệ thấu kính.

Trong số các học trò của Gauss có Christian Heinrich Schumacher, Christian Gerling, Friedrich Nicolai, August Ferdinand Möbius, Georg Wilhelm Struve, Johann Frantz Encke.

Các nghiên cứu của Gauss về lý thuyết số là điểm khởi đầu cho một trường phái các nhà văn, trong số đó sớm nhất là Jacobi. Sau này đã đóng góp cho *Crelle's Journal* một bài báo về dư lượng khối, đưa ra các định lý mà không cần chứng minh. Sau khi xuất bản bài báo của Gauss về dư bậc hai, đưa ra định luật tương hỗ hai phương và cách xử lý của ông đối với số phức, Jacobi đã tìm ra một định luật tương tự cho dư bậc ba. Bằng lý thuyết hàm elip, ông đã dẫn đến những định lý tuyệt vời về cách biểu diễn các số bằng 2, 4, 6 và 8 bình phương. Tiếp theo là các nghiên cứu của Dirichlet, người giải thích của Gauss và là người đóng góp cho các kết quả nhiều định dạng của chính ông.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet [88] (1805–1859) sinh ra ở Düren, tham dự phòng tập thể dục ở Bon, và sau đó là phòng tập thể dục Dòng Tên ở Cologne. Năm 1822, ông là Paris bị thu hút bởi những cái tên như Laplace, Legendre, Fourier, Poisson, Cauchy. Cơ sở vật chất cho giáo dục toán học ở đó tốt hơn nhiều so với

ở Đức , trong đó Gauss là nhân vật vĩ đại duy nhất. Ông đã đọc *Disquisitiones Arithmeticæ* của Paris Gauss, một tác phẩm mà ông không ngừng ngưỡng mộ và nghiên cứu. Phần lớn trong đó đã được Dirichlet đơn giản hóa, và do đó dễ tiếp cận hơn với Hồi ký đầu tiên của ông về tính bất khả thi của một số phương trình vô định bậc 5 đã được trình bày cho Viện Hàn lâm Pháp vào năm 1825. Ông đã chỉ ra rằng phương trình Fermat, $x^n + y^n = z^n$, không thể tồn tại khi $n = 5$. Tuy nhiên, một số phần của phân tích là của Legendre. Euler và Lagrange đã chứng minh điều này khi n is 3 và 4, và Lamé đã chứng minh điều đó khi $n = 7$. Sự quen biết của Dirichlet với Fourier đã khiến ông nghiên cứu về chuỗi Fourier. Ông trở thành học giả ở Breslau vào năm 1827. Năm 1828, ông nhận một vị trí ở Berlin, và cuối cùng kế vị Gauss tại Göttingen vào năm 1855. Các nguyên tắc chung phụ thuộc vào số lượng trung bình của các lớp học dạng bậc hai nhị phân của định thức dương và âm (một chủ đề được Gauss nghiên cứu đầu tiên) được Dirichlet đưa ra trong một cuốn hồi ký, *Ueber die Bestimmung der mittleren Werthe in der Zahlentheorie*, 1849. Gần đây hơn là F . Mertens of Graz đã xác định các giá trị tiệm cận của một số hàm số. Dirichlet đã chú ý đến các số nguyên tố. Gauss và Legendre đã đưa ra các biểu thức biểu thị gần đúng giá trị tiệm cận của số các số nguyên tố thấp hơn một giới hạn nhất định, nhưng nó vẫn tồn tại đối với Riemann trong hồi ký của ông, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, 1859, để đưa ra một khảo sát tần số tiệm cận của các số nguyên tố w hich là nghiêm ngặt. Tiếp cận vấn đề từ một hướng khác, *Patnutij Tchebycheff*, nguyên là giáo sư tại Đại học St. Petersburg (sinh năm 1821), đã thành lập, trong một cuốn hồi ký nổi tiếng, *Sur les Nombres Premiers* , 1850, sự tồn tại của các giới hạn trong đó tổng logarit của các số nguyên tố P, kém hơn một số đã cho x, phải được bao gồm. [89] Bài báo này phụ thuộc vào những cân nhắc rất cơ bản, và , về mặt đó, tương phản mạnh mẽ với Riemann's, liên quan đến các định lý trừu tượng của phép tính tích phân. Các bài

báo về Poincaré, phép rút gọn của Sylvester của các giới hạn của Tchebycheff, có liên quan đến phân bố của các số nguyên tố và các nghiên cứu của J. Hadamard (được trao giải thưởng *Grand prix* năm 1892), là một trong những nghiên cứu mới nhất về lĩnh vực này. Việc liệt kê các số nguyên tố đã được thực hiện vào những thời điểm khác nhau bởi các nhà toán học khác nhau. Năm 1877, Hiệp hội Anh bắt đầu chuẩn bị các bảng nhân tố, dưới sự chỉ đạo của J. W. L. thợ rèn. Việc in ấn, bởi Hiệp hội, các bảng cho thứ sáu triệu đã đánh dấu việc hoàn thành các bảng, mà Đức, Pháp và Anh đã đóng góp vào quá trình chuẩn bị, và điều này cho phép chúng tôi quyết định thành nguyên tố chính. thừa số mọi hợp số nhỏ hơn $9,000,000$.

Cauchy đã có những đóng góp khác cho lý thuyết số. Chẳng hạn, ông đã chỉ ra cách tìm tất cả vô số nghiệm của một phương trình vô nghiệm thuần nhất bậc hai ba biến khi cho một nghiệm. Ông đã thiết lập định lý rằng nếu hai đồng dư có cùng mô đun, thừa nhận một nghiệm chung, thì mô đun là ước của kết quả của chúng. **Joseph Liouville** (1809–1882), giáo sư tại Collège de France, chủ yếu nghiên cứu các câu hỏi về lý thuyết về dạng bậc hai của hai, và của một số lượng lớn hơn biến. **Ferdinand Gotthold Eisenstein** (1823–1852), của Berlin đã thực hiện các nghiên cứu sâu sắc. Các dạng bậc hai bậc ba đã được Gauss nghiên cứu phần nào, nhưng phần mở rộng từ hai đến ba bất định là công việc của Eisenstein, người, trong hồi ký của mình, *Neue Theoreme der höheren Arithmetik*, đã định nghĩa phương trình bậc hai và tổng quát các ký tự của các dạng bậc hai bậc ba của định thức không đồng đều, và, trong trường hợp các dạng xác định, gán trọng số của bất kỳ trật tự hoặc loại nào. Nhưng ông đã không công bố các minh chứng về kết quả của mình. khám phá ra hiệp phương sai đầu tiên từng được xem xét trong giải tích. Ông chỉ ra rằng một loạt các định lý, liên quan đến việc biểu diễn các số bằng tổng các bình phương, sẽ dừng lại khi số bình phương vượt quá 8. Nhiều chứng minh bị Eisenstein bỏ qua đã được cung cấp bởi Henry Smith , là một trong số ít người Anh cống hiến

hết mình cho việc nghiên cứu số học bậc cao.

Henry John Stephen Smith [90] (1826–1883) sinh ra ở London, học tại Rugby và Balliol College, Oxford. Trước năm 1847, ông đã đi du lịch nhiều nơi ở châu Âu vì sức khỏe của mình, và đã có lần tham dự các buổi thuyết trình của Arago ở Paris, nhưng sau năm đó, ông không bao giờ vắng mặt ở Oxford dù chỉ một học kỳ. Năm 1861, ông được bầu làm giáo sư hình học Savilian. Bài báo đầu tiên của ông về lý thuyết số xuất hiện vào năm 1855. Kết quả của mười năm nghiên cứu về mọi thứ được xuất bản về lý thuyết số được chứa trong Báo cáo của ông xuất hiện trong các tập của Hiệp hội Anh từ năm 1859 đến năm 1865. Những báo cáo này là một mô hình của trình bày rõ ràng và chính xác và sự hoàn hảo của hình thức. Chúng chứa nhiều vật chất ban đầu, nhưng kết quả chính của những khám phá của chính ông đã được in trong *Giao dịch triết học* cho năm 1861 và 1867. Chúng xử lý các phương trình và đồng dư tuyến tính bất định, cũng như bậc và dạng của các dạng bậc ba bậc ba. Ông đã thiết lập các nguyên tắc mà phần mở rộng của trường hợp tổng quát của *n* bất định của dạng bậc hai phụ thuộc vào. Ông cũng đóng góp hai hồi ký cho *Proceedings of the Royal Society* năm 1864 và 1868, trong cuốn thứ hai ông nhận xét rằng các định lý của Jacobi, Eisenstein và Liouville, liên quan đến việc biểu diễn các số bằng các ô vuông 4, 6, 8 và các dạng bậc hai đơn giản khác được suy ra bằng một phương pháp thống nhất từ các nguyên tắc được chỉ ra trong bài báo của mình. Các định lý liên quan đến trường hợp 5 hình vuông đã được Eisenstein đưa ra, nhưng Smith đã hoàn thành việc phát biểu chúng và đã thêm các định lý tương ứng cho 7 hình vuông. Lời giải của các trường hợp 2, 4, 6 bình phương có thể thu được bằng các hàm elliptic, nhưng khi số bình phương là số lẻ, nó liên quan đến các quá trình đặc thù của lý thuyết số. Loại định lý này được giới hạn ở 8 squares, và Smith đã hoàn thành nhóm. Không biết gì về các cuộc điều tra của Smith, Viện hàn lâm Pháp đã trao giải thưởng cho việc chứng minh và hoàn thành các định lý của Eisenstein với

giá 5 ô vuông. Điều này Smith đã hoàn thành mười lăm năm trước đó. Ông đã gửi một luận án vào năm 1882, và năm sau, một tháng sau khi ông qua đời, giải thưởng đã được trao cho ông, một giải khác cũng được trao cho H. Minkowsky của Bonn. Lý thuyết về số đã dẫn Smith đến việc nghiên cứu các hàm elliptic. Ông cũng viết về hình học hiện đại. Người kế nhiệm ông tại Oxford là J. J. Sylvester.

Ernst Eduard Kummer (1810–1893), giáo sư tại Đại học Berlin, được đồng nhất chặt chẽ với lý thuyết số. Công trình của Dirichlet về các số phức có dạng $a+ib$, được giới thiệu bởi Gauss, được mở rộng bởi ông, bởi Eisenstein và Dedekind. Thay vì phương trình $x^4-1=0$, nghiệm của nó mang lại đơn vị Gauss, Eisenstein đã sử dụng phương trình $x^3-1=0$ và các số phức $a+b\rho$ (ρ là căn bậc ba của đơn vị), lý thuyết của nó giống với lý thuyết của các số Gauss. Kummer chuyển sang trường hợp tổng quát $x^n-1=0$ và nhận số phức có dạng $\alpha=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\cdots$, trong đó a_i là các số thực nguyên , và A_i căn của phương trình trên. [59] Lý thuyết về ước chung lớn nhất của Euclid không thể áp dụng cho các số phức như vậy và các thừa số nguyên tố của chúng không thể được xác định theo cách giống như các thừa số nguyên tố của các số nguyên chung là xác định. Trong nỗ lực vượt qua khó khăn này, Kummer đã dẫn đến việc đưa ra khái niệm về "số lý tưởng." Những số lý tưởng này đã được áp dụng bởi G. Zolotareff của St. Petersburg để giải một phương trình bài toán của phép tính tích phân, do Abel bỏ dở (*Liouville's Tạp chí*, Sê-ri thứ hai, 1864, Tập IX.) . **Julius Wilhelm Richard Dedekind** của Braunschweig (sinh năm 1831) đã đưa ra trong ấn bản thứ hai của Dirichlet *Vorlesungen über Zahlentheorie* một lý thuyết về số phức, trong đó ông ở một mức độ nào đó đi chệch hướng của Kummer, và tránh sử dụng các số lý tưởng. Dedekind đã lấy gốc của bất kỳ phương trình bất khả quy nào với các hệ số nguyên làm đơn vị cho các số phức của mình. Bị thu hút bởi Kummer's nghiên cứu, học trò của ông, **Leopold Kronecker** (1823–1891) đã thực hiện các nghiên cứu mà ông áp dụng cho các phương trình đại số.

Mặt khác, người ta đã cố gắng sử dụng các kết quả của đại số cao hơn hiện đại trong lý thuyết số. Tiếp nối các nghiên cứu của Hermite, **Paul Bachmann** của Münster đã nghiên cứu công thức số học đưa ra phép đồng vị của một dạng bậc hai bậc ba. [89] Bài toán về sự tương đương của hai dạng bậc hai dương hoặc xác định đã được giải bởi L. Seeber, và dạng tự đồng cấu số học của các dạng như vậy, bởi Eisenstein. Bài toán khó hơn của sự tương đương cho các hình thức ternary không xác định đã được điều tra bởi Edward Selling của Würzburg. Trên các dạng bậc hai của bốn số bất định trở lên vẫn còn rất ít điều được thực hiện. Hermite đã chỉ ra rằng số lượng các lớp không tương đương của dạng bậc hai có hệ số nguyên và phân thức cho trước là hữu hạn, trong khi Zolotareff và A. N. Korkine, cả của St. Petersburg, đã nghiên cứu cực tiểu của các dạng bậc hai dương. Liên quan đến các dạng bậc hai nhị phân, Smith đã thiết lập định lý rằng nếu bất biến chung của hai dạng nguyên hàm chính xác biến mất, thì định thức của một trong hai dạng đó được biểu diễn nguyên thủy bởi bản sao của khác.

Sự trao đổi các định lý giữa số học và đại số được thể hiện trong các nghiên cứu gần đây của J. W. L. Glaisher của Đại học Trinity (sinh năm 1848) và Sylvester. Sylvester đã đưa ra một Lý thuyết cấu tạo về các phân vùng, được bổ sung từ các học trò của ông, F. Franklin và G. S. Ely.

Khái niệm về "số" đã được mở rộng nhiều trong thời đại của chúng ta. Với người Hy Lạp, nó chỉ bao gồm các số nguyên dương bình thường; Diophantus đã thêm phân số hữu tỉ vào miền số. Số âm và số ảo sau đó dần dần được công nhận. Descartes hoàn toàn nắm bắt được khái niệm tiêu cực; Gauss, đó là của trí tưởng tượng. Với Euclid, một tỷ lệ, dù là hữu tỷ hay vô tỷ, đều không phải là một con số. Việc công nhận các tỷ số và các số vô tỷ là các số diễn ra vào thế kỷ 16 và được biểu hiện bởi Newton. Theo phương pháp tỷ lệ, tính liên tục của hệ thống số thực dựa trên tính liên tục của không gian, nhưng trong thời gian gần đây, ba lý thuyết về số vô tỷ đã được

Weierstrass phát triển, J. W. R. Dedekind, G. Cantor và Heine, chứng minh tính liên tục của các số mà không cần mượn từ không gian. Chúng dựa trên định nghĩa về số theo các dãy thông thường, việc sử dụng các chuỗi và giới hạn cũng như một số khái niệm toán học mới.

TOÁN ỨNG DỤNG

Bất chấp những bước phát triển tuyệt vời của cơ học thiên thể mà Laplace đạt được vào cuối thế kỷ thứ mười tám , đã có một khám phá vào ngày đầu tiên của thế kỷ hiện tại đưa ra một vấn đề dường như nằm ngoài khả năng của phân tích đó. Chúng tôi đề cập đến việc Piazzi phát hiện ra Ceres ở Ý, điều này được biết đến ở Đức ngay sau khi nhà triết học Hegel đã xuất bản một luận án chứng minh *a priori* rằng một khám phá như vậy không thể được thực hiện. Từ các vị trí của hành tinh mà Piazzi quan sát được, quỹ đạo của nó không thể được tính toán thỏa đáng bằng các phương pháp cũ, và thiên tài Gauss đã nghĩ ra một phương pháp tính quỹ đạo elip miễn phí từ giả định về độ lệch tâm và độ nghiêng nhỏ. Phương pháp của Gauss được phát triển thêm trong *Theoria Motus* của ông. Hành tinh mới đã được Olbers, một nhà thiên văn học , khám phá lại nhờ dữ liệu của Gauss, người đã thúc đẩy khoa học không chỉ bằng các nghiên cứu thiên văn của mình, mà còn bằng sự sáng suốt và định hướng theo đuổi thiên văn của thiên tài Bessel.

Friedrich Wilhelm Bessel [91] (1784–1846) là người gốc Minden ở Westphalia. Yêu thích các số liệu và không thích ngữ pháp tiếng Latinh đã khiến anh ta lựa chọn một nghề buôn bán. Năm mười lăm tuổi, anh trở thành nhân viên tập sự ở Bremen, và trong gần bảy năm, anh dành cả ngày để nắm vững các chi tiết trong công việc kinh doanh của mình, và một phần thời gian ban đêm để nghiên cứu. Với hy vọng một ngày nào đó sẽ trở thành siêu xe trong các chuyến thám hiểm buôn bán, anh ấy bắt đầu quan tâm đến việc

quan sát trên biển. Với một kính lục phân do anh ấy chế tạo và một chiếc đồng hồ thông thường, anh ấy đã xác định được vĩ độ của Bremen. Thành công của anh ấy trong việc này đã truyền cảm hứng cho anh ấy nghiên cứu thiên văn. Hết tác phẩm này đến tác phẩm khác được ông hoàn thiện mà không cần sự trợ giúp, trong những giờ chợp mắt. Từ những quan sát cũ, ông đã tính toán quỹ đạo của sao chổi Halley. Bessel tự giới thiệu mình với Olbers, và đã gửi cho anh ta phép tính, Olbers ngay lập tức gửi đi để xuất bản. Được khuyến khích bởi Olbers, Bessel quay lưng lại với viễn cảnh sung túc, chọn sự nghèo khó và các vì sao, và trở thành trợ lý cho J. H. Đài thiên văn của Schröter tại Lilienthal. Bốn năm sau, ông được chọn làm giám sát việc xây dựng đài thiên văn mới tại Königsberg. [92] Do không có lực lượng giảng dạy toán học phù hợp, Bessel buộc phải giảng dạy về toán học để chuẩn bị cho sinh viên về thiên văn học . Ông đã thôi làm công việc này vào năm 1825 khi Jacobi đến. Chúng tôi sẽ không kể lại những công lao mà nhờ đó Bessel đã giành được danh hiệu người sáng lập ngành thiên văn học và trắc địa thực tế hiện đại. Với tư cách là một người quan sát, ông vượt xa Gauss, nhưng với tư cách là một nhà toán học, ông đã kính cẩn cúi đầu trước thiên tài vĩ đại cùng thời với mình. Trong số các bài báo của Bessel, bài báo được quan tâm nhiều nhất về toán học là "*Untersuchung des Theils der Planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne ensteht*" (1824), trong đó ông giới thiệu một loại hàm siêu việt, $J_n(x)$, được sử dụng nhiều trong toán học ứng dụng, và được gọi là "Hàm Bessel". thuộc tính chính của và constr bảng ucted để đánh giá của họ. Gần đây, người ta quan sát thấy rằng các hàm Bessel xuất hiện sớm hơn nhiều trong tài liệu toán học. [98] Các hàm bậc 0 như vậy xuất hiện trong các bài báo của Daniel Bernoulli (1732) và Euler về dao động của dây nặng lơ lửng từ một đầu. Tất cả các hàm của Bessel loại một và cấp tích phân xuất hiện trong một bài báo của Euler (1764) về dao động của một màng đàn hồi bị kéo căng. Vào năm 1878, Lord Rayleigh đã chứng minh rằng các hàm của Bessel

chỉ đơn thuần là các trường hợp cụ thể của các hàm của Laplace. J. W. L. Glaisher minh họa bằng các hàm của Bessel khẳng định của ông rằng các nhánh toán học phát triển từ các câu hỏi vật lý như một quy luật "thiếu dòng chảy dễ dàng hoặc tính đồng nhất của hình thức vốn là đặc trưng của một lý thuyết toán học được gọi đúng như vậy." Các hàm này đã được nghiên cứu bởi C. Th. Anger of Danzig, O. Schlömilch of Dresden, R. Lipschitz *ở* Bonn (sinh năm 1832), Carl Neumann *ở* Leipzig (sinh năm 1832), Eugen Lommel *ở* Leipzig, I. Todhunter of St. John's College, Cambridge.

Nổi bật trong số những người kế tục Laplace là: *Siméon Denis Poisson* (1781–1840), người đã viết một tác phẩm kinh điển vào năm 1808 *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes*. *Giovanni Antonio Amadeo Plana* (1781–1864) của Turin, cháu trai của Lagrange, người đã xuất bản vào năm 1811 *Memoria sulla teoria dell'attrazione degli sferoidi ellitici*, và đóng góp vào lý thuyết về mặt trăng. **Peter Andreas Hansen** (1795–1874) của Gotha, từng là thợ đồng hồ *ở* Tondern, sau đó là trợ lý của Schumacher tại Altona, và cuối cùng là giám đốc đài thiên văn *ở* Gotha, đã viết về nhiều chủ đề thiên văn, nhưng chủ yếu dựa trên lý thuyết mặt trăng, mà ông đã trình bày chi tiết trong tác phẩm *Fundamenta nova Investigationes orbitæ veræ quam Luna perlustrat* (1838), và trong các nghiên cứu tiếp theo về các bảng mặt trăng mở rộng. **George Biddel Airy** (1801–1892), nhà thiên văn học hoàng gia tại Greenwich, xuất bản năm 1826 *Các chuyên đề toán học về các lý thuyết về Mặt trăng và Hành tinh*. Những nghiên cứu này kể từ đó đã được ông mở rộng rất nhiều. **August Ferdinand Möbius** (1790–1868) *ở* Leipzig đã viết, vào năm 1842, *Elemente der Mechanik des Himmels*. **Urbain Jean Joseph Le Verrier** (1811–1877) *ở* Paris đã viết *Recherches Astronomiques*, cấu thành một phần công phu mới của cơ học thiên thể, và nổi tiếng với khám phá lý thuyết về Sao Hải Vương. **John Couch Adams** (1819–1892) của Cambridge đã chia cho Le Verrier niềm vinh dự về khám phá

toán học của Neptune, và đã chỉ ra rằng lời giải thích của Laplace vào năm 1853 gia tốc thế tục của chuyển động trung bình của mặt trăng chỉ chiếm một nửa gia tốc quan sát được. **Charles Eugène Delaunay** (sinh năm 1816, và chết đuối ngoài khơi Cherbourg năm 1872), giáo sư cơ học tại Sorbonne ở Paris, đã giải thích phần lớn gia tốc còn lại của mặt trăng, không được giải thích bởi lý thuyết của Laplace như đã sửa của Adams, bằng cách truy tìm ảnh hưởng của ma sát thủy triều, một lý thuyết trước đây được đề xuất độc lập bởi Kant, Robert Mayer, và William Ferrel của Kentucky. **George Howard Darwin** của Cambridge (sinh năm 1845) đã thực hiện một số cuộc điều tra rất đáng chú ý vào năm 1879 về lực ma sát thủy triều, thứ đã lần theo dấu vết rất chắc chắn về lịch sử của mặt trăng từ nguồn gốc của nó. Kể từ đó, ông cũng đã nghiên cứu tác động của ma sát thủy triều đối với các thiên thể khác trong hệ mặt trời. James Nolan của Victoria đã chỉ trích một số phần trong nghiên cứu của ông. **Simon Newcomb** (sinh năm 1835), giám đốc của *Niên giám hàng hải* tại Washington, và là giáo sư toán học tại Đại học Johns Hopkins Đại học, đã điều tra các lỗi trong bảng mặt trăng của Hansen. Trong mười hai năm qua, công việc chính của *U. S. Văn phòng Nautical Almanac* đã thu thập và thảo luận dữ liệu cho các bảng mới về các hành tinh sẽ thay thế các bảng của Le Verrier. *G. W. Hill* của văn phòng đó đã đóng góp một bài báo tao nhã về một số chữ viết tắt có thể có trong tính toán chu kỳ dài chuyển động của mặt trăng do tác động trực tiếp chuyển động của các hành tinh, và đã đưa ra quyết định tỉ mỉ nhất từ trước đến nay về sự bất bình đẳng trong chuyển động của mặt trăng do hình trái đất. Ông cũng đã tính toán một số bất đẳng thức mặt trăng do tác động của sao Mộc.

Cuộc thảo luận toán học về các vành đai của Sao Thổ được đưa ra đầu tiên bởi Laplace, người đã chứng minh rằng một vành đai rắn đồng nhất không thể ở trạng thái cân bằng, và vào năm 1851 bởi B. Pierce, người đã chứng minh tính không rắn của mình bằng cách

chỉ ra rằng ngay cả một vành đặc không đều cũng không thể ở trạng thái cân bằng xung quanh Sao Thổ. Cơ chế hoạt động của những chiếc nhẫn này đã được James Clerk Maxwell nghiên cứu trong một bài tiểu luận mà giải thưởng Adams đã được trao. Ông kết luận rằng chúng bao gồm một tập hợp các hạt không liên kết với nhau.

Bài toán ba vật thể đã được xử lý theo nhiều cách khác nhau kể từ thời Lagrange, nhưng chưa có quyết định nào tiến tới một giải pháp đại số đầy đủ hơn, và vấn đề về cơ bản đứng ở nơi nó được để lại bởi anh ta. Ông đã rút gọn các phương trình vi phân xuống bậc bảy. Điều này đã được Jacobi hoàn thành một cách tao nhã theo một cách khác vào năm 1843. *R. Radau* (*Comptes Rendus*, LXVII., 1868, p . 841) và *Allégret* (*Journal de Mathématiques*, 1875, p. 277) cho thấy rằng việc rút gọn có thể được thực hiện trên các phương trình ở dạng ban đầu. Các biến đổi và thảo luận đáng chú ý của vấn đề đã được đưa ra bởi J. L. F. Bertrand, của Émile Bour (1831–1866) của Trường Bách khoa ở Paris, của Mathieu, Hesse, J. A. Serret. H. Bruns of Leipzig đã chỉ ra rằng không có tiến triển nào trong vấn đề tích phân đại số có thể mong đợi ba hoặc trong số n vật thể, và chúng ta phải tìm đến lý thuyết hàm hiện đại để có lời giải hoàn chỉnh (*Acta Math.*, XI., tr. 43). [93]

Trong số các sách giáo khoa có giá trị về thiên văn học toán học, xếp hạng các tác phẩm sau: *Sổ tay về Thiên văn học Hình cầu và Thực tiễn* của *Chauvenet* (1863), *Thiên văn học Hình cầu và Thực tế* của *Robert Main* của Cambridge, *Thiên văn học lý thuyết* của *James C. Watson* của Ann Arbor (1868), *Traité élémentaire de Mécannique Céleste* của *H . Resal* của Trường Bách khoa ở Paris, *Cours d'Astronomie de l'Éole Polytechnique* của *Faye*, *Traité de Mécanique Céleste* của *Tisserand*, *Lehrbuch der Bahnbestimmung* của *T. Oppolzer*, *Mathematische Theorien der Planetenbewegung* của *O. Dziobek* , được dịch sang tiếng Anh bởi M. W. Harrington và W. J. Hussey.

Trong thế kỷ hiện tại, chúng ta đã nhận ra những lợi ích thường phát sinh từ cách xử lý hình học các bài toán cơ học. Gửi tới Poinsot, Chasles và Möbius, chúng tôi có được những bước phát triển quan trọng nhất trong cơ học hình học. **Louis Poinsot** (1777–1859), tốt nghiệp Trường Bách khoa ở Paris, và trong nhiều năm là thành viên của hội đồng cấp cao về hướng dẫn công cộng, đã xuất bản tác phẩm *Éléments de Statique* năm 1804. Tác phẩm này đáng chú ý không chỉ vì là giới thiệu sớm nhất về cơ học tổng hợp, mà còn là lần đầu tiên chứa đựng ý tưởng về các cặp, được Poinsot áp dụng trong một ấn phẩm năm 1834 cho lý thuyết quay. biểu diễn bằng một ellipsoid lăn trên một mặt phẳng cố định nào đó. Cấu trúc này đã được mở rộng bởi Sylvester sao cho để đo tốc độ quay của ellipsoid trên mặt phẳng.

Sir Robert Stawell Ball, trước đây là , nhà thiên văn học hoàng gia Ireland, hiện là Giáo sư Thiên văn học và Hình học Lowndean tại Cambridge, một loại bài toán động lực học cụ thể gần đây đã được xử lý bằng phương pháp hình học. Phương pháp của ông được đưa ra trong tác phẩm có tựa đề *Lý thuyết về những chiếc vít*, Dublin, 1876, và trong những bài báo tiếp theo về . Hình học hiện đại được vẽ ở đây, như đã được thực hiện bởi Clifford trong chủ đề liên quan của Biquaternions. Arthur Buchheim của Manchester (1859–1888), đã chỉ ra rằng Ausdehnungslehre của Grassmann cung cấp tất cả vật liệu cần thiết cho một phép tính đơn giản của các vít trong không gian elip. Horace Lamb đã áp dụng lý thuyết về đinh vít cho câu hỏi về chuyển động ổn định của bất kỳ chất rắn nào trong chất lỏng.

Những tiến bộ trong cơ học lý thuyết, dựa trên sự tích hợp và sự biến đổi dưới dạng các phương trình động lực học, đã được thực hiện kể từ Lagrange bởi Poisson, William Rowan Hamilton, Jacobi, Madame Kowalevski, và những người khác. Lagrange đã thiết lập "dạng Lagrange" của các phương trình chuyển động. Ông đã đưa ra một lý thuyết về sự biến thiên của các hằng số tùy ý, tuy nhiên, hóa ra lại kém hiệu quả hơn so với lý thuyết do Poisson đưa ra. [99] lý

thuyết về sự biến thiên của các hằng số tùy ý và phương pháp tích phân do đó cung cấp đã đánh dấu bước tiến đầu tiên kể từ Lagrange. Sau đó là các nghiên cứu của Ngài William Rowan Hamilton. Ông phát hiện ra rằng tích phân của các phương trình vi phân động được kết nối với tích phân của một phương trình đạo hàm riêng nhất định của bậc nhất và bậc hai độ, phát triển từ nỗ lực suy luận, bằng lý thuyết sóng gợn, dẫn đến quang học hình học trước đây dựa trên các quan niệm của lý thuyết phát xạ. *Giao dịch triết học* năm 1833 và 1834 chứa các bài báo của Hamilton, trong đó xuất hiện những ứng dụng đầu tiên đối với cơ học của nguyên lý biến thiên tác dụng và đặc tính hàm, do ông thành lập vài năm trước. Đối tượng mà Hamilton đề xuất cho chính ông được biểu thị bằng tiêu đề của bài báo đầu tiên của ông, tức là việc khám phá ra một hàm mà nhờ đó tất cả các phương trình tích phân có thể được biểu diễn trên thực tế. Hình thức mới mà anh ta thu được cho phương trình chuyển động là kết quả không kém phần quan trọng so với hình thức từng là đối tượng được tuyên bố của cuốn hồi ký. Phương pháp tích phân của Hamilton đã được Jacobi giải phóng khỏi một phức tạp không cần thiết, và sau đó được ông áp dụng để xác định đường trắc địa trên ellipsoid tổng quát. Với sự trợ giúp của elliptic tọa độ Jacobi đã tích hợp phương trình đạo hàm riêng và biểu diễn phương trình của trắc địa dưới dạng quan hệ giữa hai tích phân Abelian. Jacobi đã áp dụng cho phương trình vi phân của động lực học lý thuyết về cấp số nhân cuối cùng. Các phương trình vi phân của động lực học chỉ là một trong các loại phương trình vi phân được Jacobi xem xét. Các nghiên cứu động dọc theo dòng của Lagrange, Hamilton và Jacobi được thực hiện bởi Liouville, A. Desboves, Serret, J. C. F. Sturm, Ostrogradsky, J. Bertrand, Donkin, Brioschi, dẫn đến sự phát triển của lý thuyết hệ tích phân chính tắc.

Một bổ sung quan trọng cho lý thuyết về chuyển động của một vật rắn quanh một điểm cố định đã được thực hiện bởi Bà **Sophie de Kowalevski** [96] (1853–1891), người đã phát hiện ra một trường

hợp mới trong đó phương trình vi phân của chuyển động có thể được tích hợp. Bằng cách sử dụng các hàm theta của hai biến độc lập, cô ấy đã cung cấp một ví dụ đáng chú ý về cách lý thuyết hiện đại về hàm có thể trở nên hữu ích trong các bài toán cơ học. Bà là người gốc Moscow, từng theo học Weierstrass, lấy bằng tiến sĩ tại Göttingen, và từ năm 1884 cho đến khi qua đời là giáo sư toán học cao cấp tại Đại học Stockholm. Công trình nghiên cứu nói trên đã nhận được giải thưởng Bordin của Học viện Pháp năm 1888, được nhân đôi vì giá trị đặc biệt của bài báo.

Có ba dạng thịnh hành để biểu diễn động năng của một hệ động lực: Lagrange, Hamilton và một dạng biến đổi của phương trình Lagrange trong đó các vận tốc nhất định bị bỏ qua. Động năng được biểu thị ở dạng thứ nhất dưới dạng hàm bậc hai thuần nhất của vận tốc, là những biến thiên theo thời gian của tọa độ của hệ thống; ở dạng thứ hai, như một hàm bậc hai thuần nhất của động lượng của hệ thống; dạng thứ ba, được Edward John Routh của Cambridge xây dựng gần đây, liên quan đến lý thuyết "bỏ qua các tọa độ" của ông và của A. B. Basset, có tầm quan trọng trong các bài toán thủy động lực học liên quan đến chuyển động của chất rắn đục lỗ trong chất lỏng và trong các ngành vật lý khác.

Trong thời gian gần đây, tầm quan trọng thực tế to lớn đã được gắn liền với nguyên tắc tương tự cơ học. Bằng nó, một có thể xác định từ hoạt động của một mô hình hoạt động của máy được chế tạo ở quy mô lớn hơn. Nguyên lý lần đầu tiên được phát biểu bởi Newton (*Principia*, Bk. II., Sec. VIII., Prop. 32), và được Bertrand rút ra từ nguyên lý của vận tốc ảo. Một hệ quả tất yếu của nó, được áp dụng trong ngành đóng tàu, có tên là định luật William Froude, nhưng cũng được ban hành bởi Reech.

Các vấn đề hiện tại của động lực học khác về cơ bản so với các vấn đề của thế kỷ trước. Việc giải thích chuyển động quỹ đạo và trục của các thiên thể bằng định luật vạn vật hấp dẫn là bài toán lớn đã

được Clairaut, Euler, D'Alembert, Lagrange và Laplace giải quyết. Nó không liên quan đến việc xem xét lực cản ma sát. Trong thời điểm hiện tại, sự trợ giúp của động lực học đã được khoa học vật lý viện dẫn. Các vấn đề phát sinh ở đó thường phức tạp do sự hiện diện của ma sát. Không giống như các vấn đề thiên văn của một thế kỷ trước, chúng đề cập đến các hiện tượng vật chất và chuyển động thường bị che giấu khỏi sự quan sát trực tiếp. Người tiên phong vĩ đại trong những vấn đề như vậy là Lord Kelvin. Khi còn là sinh viên đại học tại Cambridge, trong những ngày nghỉ ở bên bờ biển, anh ấy đã tham gia vào các nghiên cứu thuộc loại này bằng cách tìm ra lý thuyết về con quay, mà trước đây chỉ được giải thích một phần bởi Jellet trong *Luận thuyết về lý thuyết of Friction* (1872), và của Archibald Smith.

Trong số các tác phẩm tiêu chuẩn về cơ khí có **Jacobi's** *Vorlesungen über Dynamik*, do Clebsch biên tập, 1866; **Kirchhoff's** *Vorlesungen über mathematische Physik*, 1876; **Benjamin Peirce's** *Cơ học phân tích*, 1855; **Somoff's** *Theoretische Mechanik*, 1879; **Tait và Steele's** *Dynamics of a Particle*, 1856; **Minchin's** *Luận về tĩnh*; **Routh's** *Dynamics of a System of Rigid Body*; **Sturm's** *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique*.

Các phương trình tạo nên nền tảng của lý thuyết về chuyển động của chất lỏng đã được trình bày đầy đủ vào thời Lagrange, nhưng các nghiệm thực sự được tìm ra thì rất ít và chủ yếu thuộc loại không quay. Một phương pháp hiệu quả để giải quyết các vấn đề trong chuyển động của chất lỏng là phương pháp sử dụng hình ảnh, được giới thiệu vào năm 1843 bởi George Gabriel Stokes của Đại học Pembroke, Cambridge. Nó ít được chú ý cho đến khi Ngài William Thomson phát hiện ra về hình ảnh điện, nhờ đó lý thuyết đã được mở rộng bởi Stokes, Hicks và Lewis. Năm 1849, Thomson đưa ra định lý cực đại và cực tiểu đặc trưng cho thủy động lực học, định lý này sau đó được mở rộng cho các bài toán động lực học nói chung.

Vào năm 1856, Helmholtz đã tạo ra một kỷ nguyên mới trong quá trình phát triển thủy động lực học, người đã tìm ra các đặc tính đáng chú ý của chuyển động quay trong một chất lỏng đồng nhất, không nén được, không có độ nhớt. Ông đã chỉ ra rằng các sợi xoáy trong một môi trường như vậy có thể có bất kỳ số lượng nút thắt và xoắn nào, nhưng là vô tận hoặc các đầu nằm trên bề mặt tự do của môi trường; chúng không thể chia cắt được. Những kết quả này gợi ý cho Ngài William Thomson khả năng xây dựng trên chúng một hình thức mới của thuyết nguyên tử, theo đó mọi nguyên tử là một vòng xoáy trong ether không ma sát, và như vậy phải tuyệt đối vĩnh cửu về nội dung và thời lượng. Lý thuyết nguyên tử xoáy được thảo luận bởi J. J. Thomson của Cambridge (sinh năm 1856) trong chuyên luận cổ điển của ông về *Chuyển động của các vành xoáy*, đã được trao Giải thưởng Adams vào năm 1882. Các bài báo về chuyển động xoáy cũng đã được xuất bản bởi Horace Lamb, Thomas Craig, Henry A. Rowland và Charles Chree.

Chủ đề về máy bay phản lực đã được nghiên cứu bởi Helmholtz, Kirchhoff, Plateau và Rayleigh; chuyển động của chất lỏng trong chất lỏng của Stokes, Sir W. Thomson, Köpcke, Greenhill, and Lamb; the lý thuyết về chất lỏng nhớt của Navier, Poisson, Saint-Venant, Stokes, O. E. Meyer, Stefano, Maxwell, Lipschitz, Craig, Helmholtz và A . B. Basset. Chất lỏng nhớt gây ra những khó khăn lớn cho , bởi vì các phương trình chuyển động không có cùng mức độ chắc chắn như trong chất lỏng hoàn hảo, do thiếu lý thuyết về ma sát và khó liên kết áp lực xiên trên một khu vực nhỏ với sự khác biệt của vận tốc.

Sóng trong chất lỏng là một chủ đề yêu thích của các nhà toán học người Anh . Những câu hỏi ban đầu về Poisson và Cauchy được hướng đến việc nghiên cứu các sóng được tạo ra bởi các nguyên nhân nhiễu loạn tác động tùy ý lên một phần nhỏ chất lỏng. Vận tốc của sóng dài được cho xấp xỉ bởi Lagrange năm 1786 trong trường hợp kênh tiết diện hình chữ nhật, bởi Green năm 1839 cho kênh tiết

diện tam giác, và bởi P. Kelland cho kênh có bất kỳ phần thống nhất nào. Ngài George B. Airy, trong chuyên luận của ông về *Tides và Sóng*, chỉ bị loại bỏ gần đúng, và đưa ra phương trình chính xác mà lý thuyết về sóng dài trong một kênh có tiết diện hình chữ nhật đều phụ thuộc vào. undee thảo luận về chủ đề này đầy đủ hơn và đưa ra các giải pháp chính xác và đầy đủ cho một số trường hợp nhất định. Ứng dụng quan trọng nhất của lý thuyết sóng dài là giải thích hiện tượng thủy triều ở sông và cửa sông.

Cách xử lý toán học của sóng đơn lần đầu tiên được S. Earnshaw đưa ra vào năm 1845, sau đó là Stokes; nhưng lý thuyết gần đúng đầu tiên được đưa ra bởi J. Boussinesq vào năm 1871, người đã thu được một phương trình dạng của chúng và một giá trị cho vận tốc phù hợp với thực nghiệm. Các phương pháp gần đúng khác được đưa ra bởi Rayleigh và J. McCowan. Liên quan đến với sóng nước sâu, Osborne Reynolds đã đưa ra lời giải thích động học cho 1877 về thực tế là một nhóm sóng như vậy tiến lên với tốc độ chỉ bằng một nửa tốc độ của sóng riêng lẻ.

Lời giải cho bài toán chuyển động tổng quát của một ellipsoid trong một chất lỏng là nhờ các công trình liên tiếp của Green (1833), Clebsch (1856), và Bjerknes (1873). Chuyển động tự do của chất rắn trong chất lỏng đã được nghiên cứu bởi W. Thomson, Kirchhoff, và Horace Lamb. Bằng những nỗ lực này, chuyển động của một chất rắn trong chất lỏng đã được hiểu khá rõ, nhưng trường hợp hai chất rắn trong chất lỏng vẫn chưa được phát triển thật đầy đủ. Vấn đề đã bị tấn công bởi W. M. hic.

Việc xác định chu kỳ dao động của một khối cầu lỏng đang quay có ý nghĩa quan trọng đối với câu hỏi về nguồn gốc của mặt trăng. G. H. Các cuộc điều tra của Darwin sau đó, được xem xét dưới ánh sáng của các nghiên cứu của Riemann và Poincaré, dường như bác bỏ giả thuyết của Laplace rằng mặt trăng tách khỏi trái đất như một vành đai, vì vận tốc góc quá lớn để ổn định; Darwin không tìm

thấy sự bất ổn.

Lời giải thích về tĩnh mạch bị co lại là một điểm gây tranh cãi nhiều , nhưng đã được làm sáng tỏ hơn nhiều nhờ ứng dụng nguyên lý động lượng, do Froude và Rayleigh khởi xướng. Rayleigh cũng xem xét sự phản xạ của sóng, không phải ở bề mặt phân cách của hai môi trường đồng nhất, nơi quá trình chuyển đổi xảy ra đột ngột, mà ở giới hạn của hai môi trường giữa mà quá trình chuyển đổi là dần dần.

Nghiên cứu nghiêm túc đầu tiên về sự lưu thông của gió trên bề mặt trái đất được thực hiện vào đầu quý thứ hai của thế kỷ này bởi *H. W. Dové William C. Redfield* và *James P. Espy*, tiếp theo là nghiên cứu của *W. Reid*, *Piddington*, và *Elias Loomis*. Nhưng **William Ferrel** (1817- -1891). Ông sinh ra ở Fulton County, Pa., và lớn lên trong một trang trại. Mặc dù hoàn cảnh xung quanh không mấy thuận lợi, nhưng khao khát kiến thức cháy bỏng đã thôi thúc cậu bé thông thạo hết ngành này đến ngành khác. Ông theo học Marshall, Pa., và tốt nghiệp trường Cao đẳng Bethany năm 1844. Trong khi giảng dạy ở trường, ông bắt đầu quan tâm đến khí tượng học và chủ đề thủy triều. Năm 1856, ông viết một bài viết về "gió và dòng chảy của đại dương." Năm sau, anh ấy bắt đầu kết nối với *Nautical Almanac*. Một bài báo toán học tiếp theo vào năm 1858 về "chuyển động của chất lỏng và chất rắn so với bề mặt trái đất." Sau đó, chủ đề này được mở rộng để bao hàm lý thuyết toán học về lốc xoáy, vòi rồng, vòi rồng, v.v. Năm 1885, bài báo toán học của ông *Những tiến bộ gần đây trong Khí tượng học*. Theo ý kiến của một nhà khí tượng học hàng đầu châu Âu (*Julius Hann* của Vienna), Ferrel đã "đóng góp nhiều hơn cho sự phát triển của ngành vật lý khí quyển hơn bất kỳ nhà vật lý hay nhà khí tượng học còn sống nào khác."

Ferrel dạy rằng không khí chảy theo hình xoắn ốc lớn về phía các cực, cả ở tầng trên của khí quyển và trên bề mặt trái đất bên ngoài

vĩ độ 30 độ; trong khi dòng hồi lưu thổi gần như vuông góc với các đường xoắn ốc ở trên, ở tầng giữa cũng như trên bề mặt trái đất, trong vùng bao gồm các vĩ tuyến 30° N. và 30° S. Ý tưởng về ba dòng điện chồng chất thổi theo hình xoắn ốc lần đầu tiên được đề xuất bởi James Thomson, nhưng đã được xuất bản trong bản tóm tắt sơ sài.

Quan điểm của Ferrel đã thúc đẩy mạnh mẽ nghiên cứu lý thuyết ở Mỹ, Áo và Đức. Một số phản đối chống lại lập luận của ông đã bị loại bỏ, hoặc đã được trả lời bởi W. M. Davis của Harvard. Phân tích toán học của F. Waldo ở Washington và của những người khác, đã xác nhận thêm tính chính xác của lý thuyết. Sự vận chuyển của bụi Krakatoa và các quan sát được thực hiện trên các đám mây chỉ ra sự tồn tại của một dòng chảy phía đông trên đường xích đạo, và Pernter đã suy luận toán học từ lý thuyết của Ferrel về sự tồn tại của một dòng chảy như vậy.

Một lý thuyết khác về sự hoàn lưu chung của bầu khí quyển do Werner Siemens ở Berlin đề xuất, trong đó cố gắng áp dụng nhiệt động lực học cho các dòng điệnërial. Điểm mới quan trọng của quan điểm đã được giới thiệu gần đây bởi Helmholtz, người đã kết luận rằng khi hai luồng không khí thổi chồng lên nhau theo các hướng khác nhau, thì một hệ sóng không khí phải phát sinh giống như cách sóng hình thành trên biển . Ông và A. Oberbeck đã chỉ ra rằng khi sóng trên biển đạt được độ dài từ 16 đến 33 feet, sóng không khí phải đạt được độ dài từ 10 đến 20 dặm, và độ sâu tỷ lệ thuận. Do đó, các địa tầng chồng chất sẽ trộn lẫn kỹ hơn và năng lượng của chúng sẽ bị tiêu tán một phần. Từ các phương trình thủy động lực học của chuyển động quay, Helmholtz đã thiết lập lý do tại sao vận tốc quan sát được từ các vùng xích đạo là mu ch ít hơn ở vĩ độ, chẳng hạn như 20° hoặc 30°, so với khi các chuyển động không được kiểm soát.

Khoảng năm 1860 âm học bắt đầu được nghiên cứu với nhiệt tình mới. Lý thuyết toán học về ống và dây dao động đã được Daniel Bernoulli, D'Alembert, Euler và Lagrange xây dựng vào thế kỷ thứ

mười tám. Trong phần đầu tiên của thế kỷ hiện tại Laplace đã hiệu chỉnh lý thuyết của Newton trên vận tốc âm thanh trong chất khí, Poisson đưa ra một cuộc thảo luận toán học về dao động xoắn; Poisson, Sophie Germain và Wheatstone đã nghiên cứu các số liệu của Chladni; Thomas Young và anh em Weber đã phát triển thuyết sóng của âm thanh. **Ngài J. F. W. Herschel** đã viết về lý thuyết toán học của âm thanh cho cuốn *Encyclopædia Metropolitana*, 1845. Việc tạo ra kỷ nguyên là những nghiên cứu thực nghiệm và toán học của Helmholtz. Trong tay của ông và của Rayleigh, chuỗi Fourier đã nhận được sự chú ý đáng kể của . Helmholtz đã đưa ra lý thuyết toán học về phách, âm khác biệt và âm tổng. **Lord Rayleigh** (John William Strutt) của Cambridge (sinh năm 1842) đã thực hiện nghiên cứu toán học sâu rộng về âm học như một phần của lý thuyết về rung động nói chung. Có thể đề cập cụ thể đến cuộc thảo luận của ông về nhiễu loạn do chướng ngại vật hình cầu tạo ra trên sóng âm thanh và về các hiện tượng, chẳng hạn như ngọn lửa nhạy cảm, liên quan đến sự không ổn định của các tia chất lỏng. Năm 1877 và 1878 ông xuất bản hai tập chuyên luận về *Lý thuyết âm thanh*. Các nghiên cứu toán học khác về chủ đề này đã được thực hiện ở Anh bởi Donkin và Stokes.

Lý thuyết đàn hồi [42] thuộc về thế kỷ này. Trước 1800, không có nỗ lực nào được thực hiện để lập các phương trình tổng quát cho chuyển động hoặc trạng thái cân bằng của một vật rắn đàn hồi. Các vấn đề cụ thể đã được giải quyết bằng các giả thuyết đặc biệt. Do đó, James Bernoulli đã coi các lớp đàn hồi; Daniel Bernoulli và Euler nghiên cứu thanh rung; Lagrange và Euler, trạng thái cân bằng của lò xo và cột. Các nghiên cứu sớm nhất của thế kỷ này, bởi Thomas Young ("Mô đun của co giãn") ở Anh, J. Binet ở Pháp và G. A. A. Plana ở Ý, chủ yếu bận rộn trong việc mở rộng và điều chỉnh các lao động trước đó. Từ năm 1830 đến 1840, phác thảo rộng rãi của lý thuyết đàn hồi hiện đại đã được thiết lập. Điều này hầu như chỉ được thực hiện bởi người Pháp nhà văn,—Louis-Marie-

Henri Navier (1785–1836), Poisson, Cauchy, Mademoiselle Sophie Germain (1776–1831), Félix Savart (1791–1841).

Siméon Denis Poisson [94] (1781–1840) sinh ra tại Pithiviers. Cậu bé được giao cho một y tá, và cậu thường kể rằng một ngày nọ, khi cha cậu (một người lính bình thường) đến gặp cậu, cô y tá đã ra ngoài và để cậu bị treo lơ lửng bằng một sợi dây mảnh vào một chiếc đinh trên tường. để bảo vệ anh ta khỏi chết dưới răng của những con vật ăn thịt và ô uế lang thang trên sàn nhà. Poisson từng nói thêm rằng những nỗ lực thể dục của anh ấy khi bị đình chỉ đã khiến anh ấy lắc lư qua lại, và do đó sớm làm quen với con lắc, việc nghiên cứu về nó đã chiếm nhiều thời gian của anh ấy trong cuộc đời trưởng thành của mình. Cha anh đã định cho anh theo nghề y, nhưng điều này khiến anh ghê tởm đến mức anh được phép vào trường Bách khoa năm mười bảy tuổi. Tài năng của anh ấy đã thu hút sự quan tâm của Lagrange và Laplace. Năm mười tám tuổi, ông đã viết một cuốn hồi ký về sự khác biệt hữu hạn được in theo đề nghị của Legendre. Ông nhanh chóng trở thành giảng viên tại trường, và tiếp tục giữ nhiều chức vụ khoa học và chức danh giáo sư trong suốt cuộc đời. Ông đã chuẩn bị khoảng 400 ấn phẩm, chủ yếu về toán học ứng dụng. *Traité de Mécanique*, 2 vols., 1811 và 1833 của ông, từ lâu đã là một tác phẩm tiêu chuẩn. Ông đã viết về lý thuyết toán học về nhiệt, tác động mao dẫn, xác suất phán đoán, lý thuyết toán học về điện và từ, thiên văn vật lý, lực hút của các ellipsoid, tích phân xác định, chuỗi và lý thuyết đàn hồi. Ông được coi là một trong những nhà phân tích hàng đầu trong thời đại của mình.

Công trình về tính đàn hồi của ông hầu như không xuất sắc bằng công trình của Cauchy, và chỉ đứng sau công trình của Saint-Venant. Hầu như không có vấn đề nào về độ đàn hồi mà anh ấy không đóng góp, trong khi nhiều câu hỏi của anh ấy là mới. Sự cân bằng và chuyển động của một tấm tròn lần đầu tiên được ông xử lý thành công. Thay vì các tích phân xác định của các tác giả trước đó, ông đã sử dụng các tổng hữu hạn. Các điều kiện đường viền của Poisson

cho các tấm đàn hồi đã bị phản đối bởi Gustav Kirchhoff của Berlin, người đã thiết lập các điều kiện mới. Nhưng Thomson và Tait trong *Luận về triết học tự nhiên* của họ đã giải thích sự khác biệt giữa các điều kiện biên của Poisson và Kirchhoff, đồng thời thiết lập sự hòa giải giữa chúng.

Cauchy đã có những đóng góp quan trọng cho lý thuyết đàn hồi. Nhờ ông mà chúng ta có được nguồn gốc của lý thuyết về ứng suất, và sự chuyển đổi từ việc xem xét lực tác dụng lên một phân tử do các lân cận của nó tác dụng sang việc xem xét ứng suất lên một mặt phẳng nhỏ tại một điểm. Ông đã đoán trước Green và Stokes khi đưa ra các phương trình đẳng hướng với hai hằng số. Lý thuyết đàn hồi được Gabrio Piola người Ý trình bày theo các nguyên tắc của *Mécanique Analytique* của Lagrange, nhưng tính ưu việt của phương pháp này so với phương pháp của Poisson và Cauchy là không rõ ràng. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến ứng suất lần đầu tiên được nghiên cứu bằng thực nghiệm bởi Wilhelm Weber của Göttingen, và sau đó được nghiên cứu bằng toán học bởi Duhamel, người, giả sử Lý thuyết đàn hồi của Poisson, đã kiểm tra sự thay đổi hình thức mà công thứcæ trải qua khi chúng ta cho phép thay đổi nhiệt độ. Weber cũng là người đầu tiên thử nghiệm biến dạng sau đàn hồi. Các thí nghiệm quan trọng khác đã được thực hiện bởi các nhà khoa học khác nhau, trong đó tiết lộ phạm vi hiện tượng rộng hơn và đòi hỏi một lý thuyết toàn diện hơn. Set đã được Gerstner (1756–1832) và Eaton Hodgkinson nghiên cứu, trong khi nhà vật lý sau này ở Anh và Vicat (1786–1861) ở Pháp đã thử nghiệm rộng rãi về độ bền tuyệt đối. Vicat đã mạnh dạn công kích các lý thuyết toán học về độ uốn vì chúng không tính đến lực cắt và yếu tố thời gian. lý thuyết về uốn đã sớm được đề xuất của Saint-Venant. Poncelet đã nâng cao lý thuyết về khả năng phục hồi và sự gắn kết.

Gabriel Lamé [94] (1795–1870) sinh ra tại Tours và tốt nghiệp tại trường bách khoa. Ông được gọi đến Nga cùng với Clapeyron và những người khác để giám sát việc xây dựng cầu đường. Khi trở về,

năm 1832, ông được bầu làm giáo sư vật lý tại Trường Bách khoa. Sau đó, ông giữ nhiều chức vụ kỹ sư và giáo sư ở Paris. Là kỹ sư, ông đã tham gia tích cực vào việc xây dựng các tuyến đường sắt đầu tiên ở Pháp. Lamé cống hiến tài năng toán học tuyệt vời của mình chủ yếu cho vật lý toán học. Trong bốn tác phẩm: *Leçons sur les fonctions inverses des transcantes et les Surface isothermes*; *Sur les coordonnée curvilignes et leurs đa dạng ứng dụng*; *Sur la lý thuyết phân tích de la chaleur*; *Sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides* (1852), và trong nhiều hồi ký khác nhau, ông thể hiện khả năng phân tích tốt; nhưng một số nhu cầu chạm vào cơ thể đôi khi làm giảm giá trị của những đóng góp của anh ấy đối với tính đàn hồi và các môn thể chất khác. Khi xem xét nhiệt độ bên trong của một ellipsoid trong những điều kiện nhất định, ông đã sử dụng các hàm tương tự như hàm Laplace, và được biết đến với cái tên "Hàm Lamé." Một bài toán về tính đàn hồi được gọi là by Lamé name, viz. để nghiên cứu các điều kiện cân bằng của một đường bao đàn hồi hình cầu chịu sự phân bố tải trọng cho trước trên các bề mặt hình cầu bao quanh và việc xác định các chuyển dịch kết quả là bài toán tổng quát duy nhất về tính đàn hồi có thể nói là được giải hoàn toàn. Ông xứng đáng nhận được nhiều công lao vì đã tìm ra và biến đổi các phương trình đàn hồi tổng quát, cũng như ứng dụng của ông cho hiện tượng khúc xạ kép. Các màng hình chữ nhật và hình tam giác được ông chỉ ra là có liên quan đến các câu hỏi trong lý thuyết số. Lĩnh vực đàn hồi ảnh được đưa vào bởi LaméF. E. Neumann, thư ký Maxwell. Stokes, Wertheim, R. Clausius, Jellett, đã đưa ra ánh sáng mới cho chủ đề của "rari-constancy" và "multi-constancy" mà từ lâu đã chia những người đàn hồi thành hai phe đối lập. Tính đẳng hướng đơn hằng của Navier và Poisson đã bị Cauchy đặt câu hỏi về , và giờ đây Green và Stokes.

Barré de Saint-Venant (1797–1886), ingénieur des ponts et chaussées, đã biến công việc để đời của mình là đưa lý thuyết về tính đàn hồi về giá trị thực tế. Lời buộc tội của các kỹ sư thực hành,

như Vicat, chống lại các nhà lý thuyết đã khiến Saint-Venant phải đặt lý thuyết vào đúng vị trí của nó như một kim chỉ nam cho người thực hành. Nhiều lỗi do những người tiền nhiệm của ông đã mắc phải đã được loại bỏ. Ông đã sửa chữa lý thuyết uốn bằng cách xem xét trượt, lý thuyết về các thanh đàn hồi có độ cong kép bằng cách giới thiệu mô men thứ ba và lý thuyết xoắn bằng cách phát hiện ra sự biến dạng của tiết diện phẳng nguyên thủy. Kết quả của anh ấy về lực xoắn có rất nhiều trong các hình minh họa đồ họa đẹp mắt. Trong trường hợp một thanh, trên các mặt bên của nó không có lực tác dụng, ông đã chỉ ra rằng các vấn đề về uốn và xoắn có thể được giải quyết, nếu các lực ở hai đầu được phân bố trên các mặt cuối theo một quy luật xác định. Clebsch, trong *Lehrbuch der Elasticität*, 1862, đã chỉ ra rằng vấn đề này có thể đảo ngược đối với trường hợp lực phụ không có lực cuối. Clebsch [68] đã mở rộng nghiên cứu sang các thanh rất mỏng và các tấm rất mỏng. Saint-Venant đã xem xét các vấn đề phát sinh trong thiết kế khoa học của pháo tự chế và giải pháp của ông về chúng khác biệt đáng kể so với giải pháp của Lamé, đó là phổ biến bởi Rankine, và được sử dụng nhiều bởi các nhà thiết kế súng. Trong bản dịch của Saint-Venant sang tiếng Pháp của *Elasticität* của Clebsch, ông đã phát triển rộng rãi ký hiệu hậu tố kép cho lực căng và ứng suất. Mặc dù thường có lợi, *Karl Pearson*, giáo sư tại University College, London, gần đây đã kiểm tra về mặt toán học các giới hạn cho phép của việc áp dụng lý thuyết uốn thông thường của một chùm tia .

Lý thuyết toán học về tính đàn hồi vẫn còn trong tình trạng bất ổn. Các nhà khoa học không chỉ vẫn bị chia thành hai trường phái “rari-constant” và “multi-constancy”, mà còn tồn tại sự khác biệt quan điểm đối với các câu hỏi quan trọng khác. Trong số rất nhiều tác giả hiện đại về tính đàn hồi có thể kể đến Émile Mathieu (1835–1891), giáo sư tại Besançon, Maurice Levy của Paris, Charles Chree, tổng giám đốc của Đài thiên văn Kew, A. B. Basset, Ngài William Thomson (Lord Kelvin) của Glasgow, J. Boussinesq của

Paris và những người khác. Ngài William Thomson đã áp dụng các định luật đàn hồi của chất rắn để nghiên cứu tính đàn hồi của trái đất, đây là một yếu tố quan trọng trong lý thuyết về thủy triều đại dương. Nếu trái đất là chất rắn, thì tính đàn hồi của nó phối hợp với lực hấp dẫn để chống lại sự biến dạng do lực hút của mặt trời và mặt trăng. Laplace đã chỉ ra trái đất sẽ hành xử như thế nào nếu nó chỉ chống lại sự biến dạng bởi lực hấp dẫn. Lamé đã nghiên cứu xem một quả cầu rắn sẽ thay đổi như thế nào nếu tính đàn hồi của nó chỉ phát huy tác dụng. Ngài William Thomson đã kết hợp hai kết quả và so sánh chúng với biến dạng thực tế. Thomson, và sau đó là G. H. Darwin, đã tính toán rằng lực cản của trái đất đối với biến dạng thủy triều lớn gần bằng sức cản của nó đối với thép. Kết luận này gần đây đã được xác nhận bởi Simon Newcomb, từ nghiên cứu về những thay đổi định kỳ quan sát được theo vĩ độ. Đối với một trái đất cứng lý tưởng, chu kỳ sẽ là 360 ngày, nhưng nếu cứng như thép, thì sẽ là 441, chu kỳ quan sát được là 430 ngày.

Trong số các sách giáo khoa về tính đàn hồi có thể kể đến các tác phẩm của Lamé, Clebsch, Winkler, Beer, Mathieu, W. J. Ibbetson và F. Neumann, biên tập bởi O. E. Mayer.

Ý kiến của Riemann rằng *khoa học* vật lý chỉ tồn tại kể từ khi phát minh ra các phương trình vi phân tìm thấy sự chứng thực ngay cả trong bản phác thảo ngắn gọn và rời rạc này về sự tiến bộ của vật lý toán học. Thuyết sóng nhấp nhô của ánh sáng, tiên tiến đầu tiên của Huygens, nhờ vào sức mạnh của toán học: bằng phân tích toán học, các giả định của nó đã được tìm ra cho đến cuối cùng **Thomas Young** [95] (1773–1829) là người đầu tiên giải thích nguyên lý giao thoa, cả ánh sáng và âm thanh, và là người đầu tiên đưa ra ý tưởng này của các dao động ngang trong sóng ánh sáng. Những lời giải thích của Young, không được ông kiểm chứng bằng các tính toán số mở rộng, đã thu hút rất ít sự chú ý, và mãi cho đến khi **Augustin Fresnel** (1788–1827) áp dụng phân tích toán học cho ở mức độ lớn hơn Young đã làm, rằng lý thuyết sóng nhấp nhô bắt đầu có sức

thuyết phục. Một số giả định toán học của Fresnel không thỏa đáng; do đó, Laplace, Poisson, và những người khác thuộc về trường , ban đầu là disda được thiết lập để xem xét lý thuyết. Bởi sự phản đối của họ Fresnel đã được thúc đẩy để nỗ lực nhiều hơn. Arago là chuyển đổi tuyệt vời đầu tiên do Fresnel thực hiện. Khi sự phân cực và khúc xạ kép được giải thích bởi Young và Fresnel, thì Laplace cuối cùng đã thắng. Poisson đã rút ra từ công thức Fresnelæ suy luận có vẻ nghịch lý rằng một đĩa tròn nhỏ, được chiếu sáng bởi một điểm sáng, phải đổ bóng với một điểm sáng ở trung tâm. Nhưng điều này đã được tìm thấy là phù hợp với thực tế. Lý thuyết này được đưa ra bởi một nhà toán học vĩ đại khác, Hamilton, người đã từ công thứcæ dự đoán khúc xạ hình nón của mình, được kiểm chứng bằng thực nghiệm bởi Lloyd. Tuy nhiên, những dự đoán này không chứng minh rằng công thức Fresnelæ là đúng, vì những lời tiên tri này có thể đã được thực hiện bởi các dạng khác của lý thuyết sóng. Lý thuyết này được đặt trên cơ sở động lực vững chắc hơn bởi các bài viết của Cauchy, Biot, Green, C. Neumann, Kirchhoff, McCullagh, Stokes, Saint-Venant, Sarrau, Lorenz và Ngài William Thomson.

Trong lý thuyết sóng , như Green và những người khác đã dạy, ether phát quang là một chất rắn đàn hồi không thể nén được, vì lý do khiến chất lỏng không thể truyền các dao động ngang. Nhưng, theo Green, một chất rắn đàn hồi như vậy sẽ truyền một nhiễu loạn dọc với vận tốc vô hạn. Tuy nhiên, Stokes nhận xét rằng ether có thể hoạt động giống như một chất lỏng trong trường hợp có các nhiễu loạn hữu hạn, và giống như một chất rắn đàn hồi trong trường hợp có các nhiễu loạn vô cùng nhỏ trong quá trình truyền ánh sáng.

Fresnel cho rằng mật độ của ete là khác nhau trong các môi trường khác nhau, nhưng tính đàn hồi như nhau, trong khi C. Neumann và McCullagh cho rằng mật độ đồng nhất và tính đàn hồi khác nhau trong mọi chất. Theo giả định thứ hai, hướng dao động nằm trong mặt phẳng phân cực, và không vuông góc với nó, như trong lý thuyết Fresnel.

Trong khi các tác giả trên cố gắng giải thích tất cả các tính chất quang học của một môi trường dựa trên giả thuyết rằng chúng phát sinh hoàn toàn từ sự khác biệt về độ cứng hoặc mật độ của ether trong môi trường, thì có một trường phái khác thúc đẩy các lý thuyết trong đó tác động lẫn nhau giữa các phân tử của vật thể và ether được coi là nguyên nhân chính gây ra khúc xạ và tán sắc. [100] Những công nhân chính trong lĩnh vực này là J. Boussinesq, W. Sellmeyer, Helmholtz, E. Lommel, E. Ketteler, W. Voigt, và Ngài William Thomson trong các bài giảng của ông tại Đại học Johns Hopkins năm 1884. Cả trường này và trường được nêu tên đầu tiên đều không thành công trong việc giải thích tất cả các hiện tượng. Một trường thứ ba được thành lập bởi Maxwell. Ông đã đề xuất thuyết điện từ , thuyết này đã được phát triển rộng rãi gần đây. Nó sẽ được đề cập lại sau. Theo lý thuyết của Maxwell, hướng của dao động không chỉ nằm trong mặt phẳng phân cực, cũng không nằm trong mặt phẳng vuông góc với nó, mà có điều gì đó xảy ra ở cả hai mặt phẳng—một dao động từ tính ở một mặt và một dao động điện ở mặt kia. Fitzgerald và Trouton ở Dublin đã xác minh kết luận này của Maxwell bằng các thí nghiệm về sóng điện từ.

Trong số những đóng góp toán học và thực nghiệm gần đây cho quang học, phải kể đến H. A. Lý thuyết của Rowland về cách tử lõm , và của A. A. Công trình của Michelson về giao thoa, và ứng dụng của ông về các phương pháp giao thoa trong các phép đo thiên văn.

Trong điện học, lý thuyết toán học và các phép đo của **Henry Cavendish** (1731–1810) và trong từ học các phép đo của **Charles Augustin Coulomb** (1736- -1806), đã trở thành nền tảng cho một hệ thống đo lường. Đối với điện từ, điều tương tự đã được thực hiện bởi **Andrè Marie Ampère** (1775–1836). Phương pháp đo lường hoàn chỉnh đầu tiên là hệ thống đo tuyệt đối từ tính trên mặt đất do *Gauss* và **Wilhelm Weber** (1804–1891) giới thiệu và sau đó được mở rộng bởi Wilhelm Weber và F. Kohlrausch về điện từ và tĩnh điện.Năm 1861, Hiệp hội Anh và Hiệp hội Hoàng gia đã chỉ định

một ủy ban đặc biệt do Ngài William Thomson đứng đầu, để xem xét đơn vị điện trở. Ủy ban đã đề xuất một đơn vị về nguyên tắc giống như của W. Weber, nhưng lớn hơn hơn của Weber với hệ số 10^7. [101] Các cuộc thảo luận và nghiên cứu về chủ đề này tiếp tục trong hai mươi năm, cho đến năm 1881, một thỏa thuận chung đã đạt được tại một đại hội điện ở Paris.

Một hàm có tầm quan trọng cơ bản trong các lý thuyết toán học về điện và từ là "thế năng." Nó lần đầu tiên được Lagrange sử dụng để xác định các lực hấp dẫn vào năm 1773. Ngay sau đó, Laplace đưa ra phương trình vi phân nổi tiếng,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

được mở rộng bởi Poisson bằng cách viết $-4\pi k$ thay cho 0 ở vế phải của phương trình, sao cho nó không chỉ áp dụng cho một điểm bên ngoài phương trình thu hút khối lượng, nhưng đến bất kỳ điểm nào. Người đầu tiên áp dụng hàm thế cho các bài toán khác ngoài trọng lực là **George Green** (1793–1841). Ông đã đưa nó vào lý thuyết toán học về điện và từ. Green là một người đàn ông tự học, khởi nghiệp là một thợ làm bánh, và khi ông qua đời là đồng nghiệp của Cao đẳng Caius, Cambridge. Năm 1828, ông xuất bản theo đăng ký tại Nottingham một bài báo có tựa đề *Bài luận về việc áp dụng phân tích toán học vào lý thuyết điện và từ*. Nó đã thoát khỏi sự chú ý ngay cả của các nhà toán học Anh cho đến năm 1846, khi Sir William Thomson in lại nó trong *Crelle's Journal*, vols. xliv. và xlv. Nó chứa cái mà ngày nay được gọi là "Định lý Green" để giải thích thế năng. Trong khi đó, tất cả các định lý tổng quát của Green đã được khám phá lại bởi Sir William Thomson, Chasles, Sturm và Gauss. Thuật ngữ *hàm thế* là do Green. Hamilton đã sử dụng từ *lực-hàm*, trong khi Gauss, người vào khoảng năm 1840 đã đảm bảo cho sự chấp nhận chung của hàm, gọi nó đơn giản là *tiềm năng*.

William Thomson đã có những đóng góp to lớn cho điện và từ. Ông sinh năm 1824 tại Belfast, Ireland, nhưng là người gốc Scotch.

Anh và anh trai James học ở Glasgow. Từ đó, ông vào Cambridge, và tốt nghiệp với bằng Đệ nhị Wrangler năm 1845. William Thomson, Sylvester, Maxwell, Clifford, và J. J. Thomson là một nhóm trong số những người vĩ đại từng là Người sắp xếp thứ hai tại Cambridge. Ở tuổi hai mươi hai, W. Thomson được bầu làm giáo sư triết học tự nhiên tại Đại học Glasgow, một vị trí mà ông đã nắm giữ kể từ đó. Vì những thành tựu xuất sắc về toán học và vật lý, ông đã được phong tước hiệp sĩ, và vào năm 1892 được phong làm Lord Kelvin. Các nghiên cứu của ông về lý thuyết tiềm năng mang tính thời đại. Cái được gọi là "Nguyên lý Dirichlet" được ông phát hiện vào năm 1848, sớm hơn một chút so với Dirichlet. Chúng ta nợ Ngài William Thomson những phương pháp tổng hợp mới vô cùng tao nhã, đó là lý thuyết về ảnh điện và phương pháp đảo ngược điện được thành lập trên đó. Bằng chúng, ông đã xác định được sự phân phối điện trên một cái bát, một vấn đề trước đây được coi là không thể giải quyết được. Sự phân bố tĩnh điện trên dây dẫn đã được nghiên cứu trước đây chủ yếu bởi Poisson và Plana. Năm 1845 F. E. Neumann của Königsberg đã phát triển lý thuyết toán học từ các định luật thực nghiệm của Lenz của cảm ứng điện từ. Năm 1855 W. Thomson dự đoán bằng phân tích toán học rằng sự phóng điện của bình Leyden qua một dây dẫn tuyến tính sẽ trong trong một số trường hợp nhất định bao gồm một loạt các dao động phân rã. Điều này lần đầu tiên được xác lập bằng thực nghiệm bởi Joseph Henry của Washington. William Thomson đã tìm ra cảm ứng tĩnh điện trong cáp ngầm. Chủ đề về hiệu ứng sàng lọc chống lại cảm ứng do các tấm kim loại khác nhau tạo ra đã được Horace Lamb và cả bởi Charles Niven. Nghiên cứu chính của W. Weber là về điện động lực học. Helmholtz năm 1851 đã đưa ra lý thuyết toán học của dòng điện cảm ứng trong các trường hợp khác nhau. **Gustav Robert Kirchhoff** [97] (1824–1887) đã nghiên cứu sự phân bố dòng điện qua một dây dẫn phẳng và cả cường độ dòng điện trong mỗi nhánh của mạng của dây dẫn tuyến tính.

Toàn bộ chủ đề về điện từ đã được của **James Clerk Maxwell** (1831–1879) cách mạng hóa. Anh ấy sinh ra gần Edinburgh, vào Đại học Edinburgh và trở thành học trò của Kelland và Forbes. Năm 1850, ông đến Trinity College, Cambridge, và trở thành Second Wrangler, E. Routh trở thành Senior Wrangler. Maxwell sau đó trở thành giảng viên tại Cambridge, năm 1856 là giáo sư tại Aberdeen, và năm 1860 là giáo sư tại King's College, London. Năm 1865, ông lui về cuộc sống riêng tư cho đến năm 1871, khi ông trở thành giáo sư vật lý tại Cambridge. Maxwell không chỉ dịch sang ngôn ngữ toán học các kết quả thí nghiệm của Faraday, mà còn thiết lập lý thuyết điện từ của ánh sáng, do Hertz đã kiểm chứng bằng thực nghiệm. Những nghiên cứu đầu tiên của ông về vấn đề này được xuất bản vào năm 1864. Năm 1871, *Luận thuyết về Điện và Từ* vĩ đại của ông xuất hiện. Ông đã xây dựng lý thuyết điện từ từ các phương trình tổng quát, được thiết lập dựa trên các nguyên tắc động học thuần túy và xác định trạng thái của điện trường. Đó là một cuộc thảo luận toán học về ứng suất và biến dạng trong môi trường điện môi chịu tác dụng của lực điện từ. Lý thuyết điện từ đã nhận được sự phát triển từ Lord Rayleigh, J. J. Thomson, H. A. Rowland, R. T. Glazebrook, H. Helmholtz, L. Boltzmann, O. Heaviside, J. H. Poynting và những người khác. **Hermann von Helmholtz** chuyển sự chú ý của sang phần này của chủ đề vào năm 1871. Ông sinh năm 1821 tại Potsdam, học tại Đại học Berlin và xuất bản cuốn sách nhỏ *Ueber vào năm 1847 chết Erhaltung der Kraft*. Ông trở thành giáo viên giải phẫu tại Học viện Nghệ thuật ở Berlin. Ông được bầu làm giáo sư sinh lý học tại Königsberg năm 1849, tại Bonn năm 1855, tại Heidelberg năm 1858. Chính tại Heidelberg, ông đã cho ra đời công trình của mình về *Tonempfindung*. Năm 1871, ông nhận chức chủ tịch của vật lý tại Đại học Berlin. Kể từ thời điểm này trở đi, ông chủ yếu tham gia vào các nghiên cứu về điện và thủy động lực học. Mục tiêu của Helmholtz là xác định xem nên thực hiện các thí nghiệm theo hướng nào đối với quyết định giữa các lý thuyết của

W. Weber, F. E. Neumann, Riemann, và Clausius, người đã cố gắng giải thích các hiện tượng điện động lực học bằng giả định về các lực tác dụng ở khoảng cách giữa hai phần của chất lỏng điện giả định, —cường độ không chỉ phụ thuộc vào khoảng cách, mà còn phụ thuộc vào vận tốc và gia tốc,—và lý thuyết của Faraday và Maxwell, tác động từ xa và giả định ứng suất và biến dạng trong chất điện môi. Các thí nghiệm của ông ủng hộ lý thuyết của Anh. Ông đã viết về sự phân tán bất thường và tạo ra sự tương tự giữa điện động lực học và thủy động lực học. Lord Rayleigh đã so sánh các vấn đề điện từ với các chất tương tự cơ học của chúng, đưa ra một lý thuyết động lực học về nhiễu xạ và áp dụng hệ số Laplace cho lý thuyết về bức xạ. Rowland đã thực hiện một số sửa đổi trên bài báo của Stokes về nhiễu xạ và xem xét sự lan truyền của nhiễu loạn điện từ tùy ý và sóng ánh sáng hình cầu. Cảm ứng điện từ đã được Oliver Heaviside nghiên cứu về mặt toán học và ông đã chỉ ra rằng trong một sợi cáp, là một lợi ích thực tế. Heaviside và Poynting đã đạt được kết quả toán học đáng chú ý trong việc giải thích và phát triển lý thuyết Maxwell của họ. Hầu hết các bài báo của Heaviside đã được xuất bản từ năm 1882; họ bao gồm một lĩnh vực rộng lớn.

Một phần của lý thuyết về lực hút mao dẫn, do Laplace để lại khiếm khuyết, cụ thể là tác dụng của chất rắn lên chất lỏng và tác dụng tương hỗ giữa hai chất lỏng, đã được Gauss làm cho hoàn hảo về mặt động lực học. Ông đã phát biểu quy tắc về góc tiếp xúc giữa chất lỏng và chất rắn. Một quy tắc tương tự cho chất lỏng đã được thiết lập bởi Ernst Franz Neumann. Đứng đầu trong số những người gần đây nghiên cứu lý thuyết toán học về lực mao dẫn là Lord Rayleigh và E. Mathieu.

Nguyên tắc vĩ đại của việc bảo toàn năng lượng là được thiết lập bởi **Robert Mayer** (1814–1878), một bác sĩ ở Heilbronn, và một lần nữa độc lập bởi Colding of Copenhagen, Joule, và Helmholtz. **James Prescott Joule** (1818–1889) đã xác định bằng thực nghiệm đương lượng cơ học của nhiệt. Helmholtz vào năm 1847 đã áp dụng

các khái niệm về sự biến đổi và bảo toàn năng lượng cho các ngành vật lý khác nhau, và do đó liên kết nhiều hiện tượng nổi tiếng lại với nhau. Những nỗ lực này đã dẫn đến việc từ bỏ lý thuyết hạt của nhiệt. Việc xử lý toán học các vấn đề về nhiệt được yêu cầu bởi những cân nhắc thực tế. Nhiệt động lực học phát triển từ nỗ lực xác định về mặt toán học có thể tạo ra bao nhiêu công từ một động cơ hơi nước. **Sadi-Carnot**, một người ủng hộ tiểu thể lý thuyết , đã thúc đẩy điều này đầu tiên. Nguyên lý mang tên ông đã được xuất bản vào năm 1824. Mặc dù *B. P. E. Clapeyron* đã nhấn mạnh tầm quan trọng của công trình của ông, nhưng nó đã không được công nhận rộng rãi cho đến khi nó được đưa ra bởi William Thomson. Người sau đã chỉ ra rằng cần thiết phải sửa đổi lập luận của Carnot để làm cho nó phù hợp với lý thuyết mới y của nhiệt. William Thomson đã chỉ ra vào năm 1848 rằng nguyên lý Carnot đã dẫn đến quan niệm về thang nhiệt độ tuyệt đối. Năm 1849, ông xuất bản "bản trình bày về lý thuyết động lực của nhiệt của Carnot, với các kết quả bằng số được suy ra từ các thí nghiệm của Regnault." "urich (sau đó là giáo sư ở Bonn), đã gửi cho Học viện Berlin một bài báo về cùng chủ đề, trong đó có định luật nhiệt động lực học thứ hai của Protean. Trong cùng tháng **William John M. Rankine** (1820–1872), giáo sư kỹ thuật và cơ học tại Glasgow, đọc trước Hội Hoàng gia Edinburgh một bài báo trong đó ông tuyên bố bản chất của nhiệt bao gồm chuyển động quay của các phân tử, và đi đến một số kết quả mà Clausius đã đạt được trước đó. Ông không đề cập đến định luật thứ hai của nhiệt động lực học, nhưng trong một bài báo tiếp theo, ông tuyên bố rằng có thể được suy ra từ các phương trình trong bài báo đầu tiên của ông . Chứng minh của ông về định luật thứ hai không tránh khỏi sự phản đối.Vào tháng 3 năm 1851, appe là một bài báo của William Thomson, trong đó có bằng chứng hoàn toàn chặt chẽ của định luật thứ hai. Anh ta có được nó trước khi nhìn thấy các nghiên cứu của Clausius. Tuyên bố của luật này, do Clausius đưa ra, đã bị chỉ trích nhiều, đặc biệt là bởi Rankine, Theodor Wand, P. G. Tait

và Tolver Preston. Những nỗ lực lặp đi lặp lại để suy ra nó từ các nguyên tắc cơ học chung vẫn không có kết quả. Khoa học về nhiệt động lực học đã được phát triển thành công rực rỡ bởi Thomson, Clausius và Rankine . Ngay từ năm 1852, Thomson đã khám phá ra định luật tiêu tán năng lượng, sau đó cũng được Clausius suy ra. Entropy và sau đó tuyên bố rằng entropy của vũ trụ có xu hướng đạt cực đại. Đối với entropy, Rankine đã sử dụng thuật ngữ *hàm nhiệt động lực học*. G. Ad. Hirn of Colmar và Helmholtz cũng đã tiến hành các nghiên cứu về nhiệt động lực học (hệ thống một vòng và đa vòng). phương pháp nghiên cứu các mối quan hệ nhiệt động lực học đã được **J. Willard Gibbs** của Đại học Yale nghĩ ra vào năm 1873–1878. Trước tiên, Gibbs giải thích về những lợi ích của việc sử dụng các cặp khác nhau trong số năm đại lượng nhiệt động cơ bản để biểu diễn bằng đồ thị, sau đó thảo luận về biểu đồ entropy-nhiệt độ và entropy-thể tích cũng như bề mặt thể tích-năng lượng-entropy (được mô tả trong *Lý thuyết Heat* của Maxwell). Gibbs đã xây dựng tiêu chí năng lượng-entropy của trạng thái cân bằng và ổn định, đồng thời biểu thị nó dưới dạng có thể áp dụng cho các bài toán phân ly phức tạp. Các công trình quan trọng về nhiệt động lực học đã được Clausius chuẩn bị vào năm 1875, bởi R. Rühlmann vào năm 1875 và bởi Poincaré vào năm 1892.

Khi nghiên cứu định luật tiêu hao năng lượng và nguyên lý tác dụng nhỏ nhất, toán học và siêu hình học đã gặp nhau trên điểm chung . Học thuyết về tác động tối thiểu lần đầu tiên được Maupertius đề xuất vào năm 1744. Hai năm sau, ông tuyên bố rằng học thuyết này là một quy luật phổ quát của tự nhiên và là bằng chứng khoa học đầu tiên về sự tồn tại của Chúa. Nó được hỗ trợ một cách yếu ớt bởi anh ta, bị tấn công dữ dội bởi König của Leipzig, và được Euler kiên quyết bảo vệ. Quan niệm của Lagrange về nguyên lý về tác dụng tối thiểu đã trở thành nguồn gốc của cơ học giải tích, nhưng tuyên bố của ông về nó là không chính xác, như Josef Bertrand đã nhận xét trong ấn bản thứ ba của *Mécanique*

Analytique. Dạng của nguyên lý tác dụng nhỏ nhất, như nó hiện đang tồn tại, do Hamilton đưa ra, và được mở rộng sang điện động lực học bởi F. E. Neumann, Clausius, Maxwell và Helmholtz. Để nguyên tắc phụ thuộc vào tất cả các quá trình thuận nghịch, Helmholtz đã đưa vào đó nguyên tắc quan niệm về "động năng." Ở dạng này, nguyên tắc có giá trị phổ quát.

Một nhánh của lý thuyết cơ học về nhiệt là lý thuyết động học hiện đại của chất khí, được phát triển bằng toán học bởi *Clausius*, *Maxwell*, *Ludwig Boltzmann* của Munich, và những người khác. Những gợi ý đầu tiên về lý thuyết động học của vật chất có từ thời của người Hy Lạp. Công trình sớm nhất được đề cập ở đây là của Daniel Bernoulli, 1738. Ông được quy cho các phân tử khí vận tốc lớn, giải thích áp suất của chất khí bằng cách bắn phá phân tử và suy ra định luật Boyle như một hệ quả của các giả định của ông. Hơn một thế kỷ sau đó các ý tưởng của ông được tiếp thu bởi Joule (in 1846), A. K. Krönig (in 1856), và Clausius (in 1857). Joule đã từ bỏ suy đoán của mình về chủ đề này khi bắt đầu công việc thực nghiệm về nhiệt. Krönig được giải thích bằng lý thuyết động học thực tế xác định kinh nghiệm một cách lý trí bởi Joule rằng nội năng của một chất khí không bị thay đổi do sự giãn nở khi không có công bên ngoài nào được thực hiện. Clausius đã tiến một bước quan trọng khi giả định rằng các phân tử có thể chuyển động quay, và rằng các nguyên tử trong một phân tử có thể chuyển động tương đối với nhau. Ông giả định rằng lực tác dụng giữa các phân tử là một hàm của khoảng cách giữa chúng, rằng nhiệt độ chỉ phụ thuộc vào động năng của các chuyển động phân tử và rằng số lượng các phân tử tại bất kỳ thời điểm nào ở gần nhau đến mức chúng có thể cảm nhận được lẫn nhau là tương đối nhỏ đến mức có thể bỏ qua. Ông đã tính toán vận tốc trung bình của các phân tử và giải thích sự bay hơi. Những phản đối đối với lý thuyết của ông, được đưa ra bởi Buy's-Ballot và Jochmann, đã được Clausius và Maxwell trả lời thỏa đáng , ngoại trừ một trường hợp bổ sung thêm giả thuyết đã

được thực hiện. Maxwell tự đề xuất bài toán xác định số lượng trung bình của các phân tử, vận tốc của chúng nằm giữa các giới hạn cho trước. Biểu thức của ông do đó tạo nên định luật phân bố vận tốc quan trọng mang tên ông. Theo định luật này, sự phân bố của các phân tử theo vận tốc của chúng được xác định bởi cùng một công thức (được đưa ra trong lý thuyết xác suất) như sự phân bố của các quan sát thực nghiệm theo mức độ sai số của chúng. Vận tốc phân tử trung bình do Maxwell suy ra khác với vận tốc của Clausius bởi một hệ số không đổi. Lần khấu trừ đầu tiên của Maxwell về mức trung bình này từ quy luật phân phối của ông là không nghiêm ngặt. Một dẫn xuất âm thanh đã được đưa ra bởi O. E. Meyer vào năm 1866. Maxwell dự đoán rằng miễn là Định luật Boyle còn đúng, thì hệ số nhớt và hệ số dẫn nhiệt vẫn không phụ thuộc vào áp suất. Suy luận của ông rằng hệ số nhớt phải tỷ lệ với căn bậc hai của nhiệt độ tuyệt đối dường như trái ngược với kết quả thu được từ các thí nghiệm con lắc. Điều này khiến ông thay đổi chính nền tảng của lý thuyết động học chất khí của mình bằng cách giả sử giữa các phân tử có một lực đẩy nghịch biến thiên theo lũy thừa bậc năm của khoảng cách giữa chúng. Những người sáng lập lý thuyết động học đã cho rằng các phân tử của chất khí là những quả cầu cứng đàn hồi; nhưng Maxwell, trong bài thuyết trình thứ hai về lý thuyết vào năm 1866, đã tiếp tục giả định rằng các phân tử hoạt động giống như các tâm lực. Ông đã chứng minh một lần nữa định luật phân bố vận tốc; nhưng bằng chứng có một lỗ hổng trong lập luận, được Boltzmann chỉ ra và được Maxwell công nhận, người đã sử dụng một dạng hơi khác của hàm phân phối trong một bài báo năm 1879, nhằm giải thích bằng toán học các hiệu ứng quan sát được trong máy đo phóng xạ của Crookes. Boltzmann đã đưa ra một bằng chứng tổng quát nghiêm ngặt về định luật phân bố vận tốc của Maxwell.

Không có giả định cơ bản nào trong lý thuyết động học của chất khí dẫn đến các định luật xác suất dẫn đến kết quả rất gần với quan sát. Boltzmann đã cố gắng thiết lập các lý thuyết động học của

chất khí bằng cách giả sử lực giữa các phân tử tác dụng theo những định luật khác với những định luật đã giả định trước đây. Clausius, Maxwell và những người tiền nhiệm của họ cho rằng tác động lẫn nhau của các phân tử khi va chạm là lực đẩy, nhưng Boltzmann cho rằng chúng có thể hấp dẫn. Experiments của Joule và Lord Kelvin dường như ủng hộ giả định thứ hai của .

Trong số những nghiên cứu mới nhất về lý thuyết động học là Lord Kelvin bác bỏ định lý tổng quát của Maxwell và Boltzmann, khẳng định rằng động năng trung bình của hai các phần đã cho của một hệ phải tỷ lệ với số bậc tự do của các phần đó.

PHỤ LỤC



TRANG 13. *Akhmim papyrus* mới, được viết bằng tiếng Hy Lạp, có lẽ là bản sao của một cuốn papyrus cũ hơn, trước tác phẩm của Heron, và là cuốn sách văn bản cổ nhất còn tồn tại về số học thực tế của Hy Lạp. Nó chứa, bên cạnh các ví dụ số học, một bảng để tìm "phân số đơn vị", giống hệt về phạm vi với bảng của Ahmes, và, giống như của Ahmes, không có manh mối nào về phương thức xây dựng của nó. Xem BIBLIOTH. MATH., 1893, tr. 79–89. Giấy cói được biên tập bởi J. Baillet (*Mémoires publiés par les membres de la Mission Archéologique française au Caire*, T. IX., 1r *fascicule* , Paris, 1892, tr. 1–88).

TRANG 38. Định nghĩa của Chasles hoặc Simson về Chủ nghĩa Porism thích hợp hơn định nghĩa của Proclus, được đưa ra trong văn bản. Xem Gow, tr. 217–221.

TRANG 109. Nasir Eddin lần đầu tiên xây dựng lượng giác độc lập với thiên văn học và đạt đến độ hoàn hảo đến mức nếu công trình của ông được biết đến, người châu Âu ở thế kỷ 15 có lẽ đã không tiếc công sức của họ. Xem BIBLIOTH. MATH., 1893, tr. 6.

TRANG 111. Định luật sin này có lẽ đã được biết đến trước Gabir ben Aflah đến Tabit ben Korra và những người khác. Xem BIBLIOTH. MATH., 1893, tr. 7.

TRANG 120. Athelard có lẽ không phải là người đầu tiên dịch *Elements* của Euclid từ tiếng Ả Rập. Xem VORLESUNGEN, Tập II., tr. 91, 92 của M. Cantor.

TRANG 230. G. Eneström lập luận rằng Taylor chứ không phải Nicole mới là người thực sự phát minh ra sai phân hữu hạn. Xem BIBLIOTH. MATH., 1893, tr. 91.

TRANG 239. Một ấn phẩm trước đó trong đó $3,14159\ldots$ được chỉ định bởi π, là *Synopsis palmariorum matheseos* của W. Jones, London, 1706, p. 243, 263 *et seq.* Xem BIBLIOTH. MATH., 1894, tr. 106.

TRANG 322. Trước Gauss, một định lý về sự hội tụ, thường được cho là của Cauchy, được đưa ra bởi Maclaurin (*Fluxions*, § 350). Một quy luật hội tụ cũng được suy ra bởi Stirling. Xem *Bull. N. Y. Math. Soc.*, Tập III., tr. 186.

TRANG 343. Bề mặt của vật rắn với các lỗ p đã được Tonelli xem xét trước Clifford, và có lẽ đã được chính Riemann sử dụng. Xem MATH. ANNALEN, Tập 45, tr. 142.

TRANG 346. Ngay từ năm 1835, trong một cuốn hồi ký, Lobachevsky đã chỉ ra sự cần thiết của việc phân biệt giữa tính liên tục và tính khác biệt. Xem G. B. Bản dịch của Halsted của *Address* của A. Vasiliev trên Lobachevsky, tr. 23.

Những cái chết gần đây. Johann Rudolf Wolf, ngày 6 tháng 12 năm 1893; Heinrich Hertz, ngày 1 tháng 1 năm 1894; Eugène Catalan, Feb. 14, 1894; Hermann von Helmholtz, ngày 8 tháng 9 năm 1894; Arthur Cayley, ngày 26 tháng 1 năm 1895.

INDEX

THE MACMILLAN COMPANY'S

PUBLICATIONS ON

MATHEMATICS AND PHYSICS.

ALGEBRA.

ALDIS: A Text-book of Algebra. By W. S. ALDIS. 12mo. $1.90.

BALL (W. W. R.): **Elementary Algebra.** 16mo. $1.25.

CHRYSTAL: Algebra. An Elementary Text-book for the Higher Classes of Secondary Schools and Colleges. By G. CHRYSTAL.

PART I. New Edition. 8vo. $3.75. PART II. 8vo. $4.00.

THE SET. Two Volumes. $7.50.

DALTON: Rules and Examples in Algebra. By the Rev. T. DALTON, M.A.

PART I. New Edition. 18mo. 50 cents. PART II. 18mo. 60 cents.

KEY TO PART I. $1.90.

DUPUIS: Principles of Elementary Algebra. By NATHAN F. DUPUIS, M.A., F.R.S., Professor of Mathematics in Queen's College, Kingston, Canada. 12mo. $1.10.

ELSEE: Algebra. By the Rev. C. ELSEE, M.A. Seventh Edition. $1.00.

HALL and **KNIGHT:** Works by H. S. HALL, M.A., and S. R. KNIGHT, B.A.

Elementary Algebra for Schools. 16mo. 90 cents. With Answers. 16mo. $1.10.

KEY. 12mo. $2.25.

Algebraical Exercises and Examination Papers. 16mo. 60 cents.

Higher Algebra for Schools. 12mo. $1.90.

KEY to above. 12mo. $2.60.

Algebra for Beginners. 16mo. 60 cents.

HAYWARD: The Algebra of Co-Planar Vectors and Trigonometry. $2.00.

HEATH: Diaphantos of Alexandria: A Study in the History of Greek Algebra. By T. L. HEATH, M.A., Fellow of Trinity College, Cambridge. 8vo. $2.25.

HENSLEY: The Scholar's Algebra. An Introductory Work on Algebra. By LEWIS HENSLEY. 12mo. $1.10.

JONES and **CHEYNE: Algebraical Exercises.** Progressively arranged. By the Rev. C. A. JONES, M.A., and C. H. CHEYNE, M.A., F.R.A.S. New Edition. 18mo. 60 cents.

KEY to the Exercises. By W. FAILES, M.A. 12mo. $1.90.

KLEIN: On Riemann's Theory of Algebraic Functions and their Integrals. A Supplement to the Usual Treatises by FELIX KLEIN. Translated from

the German with the author's permission, by FRANCES HARDCASTLE, Girton College, Cambridge. 8vo. $1.40.

MACMICHAEL and **SMITH: Progressive Course of Examples in Algebra.** By the Rev. W. F. MACMICHAEL and R. PROWDE SMITH, M.A. With Answers. $1.10.

SMITH. Works by CHARLES SMITH, M.A., Master of Sidney Sussex College, Cambridge.

Elementary Algebra. 16mo. $1.10.

American Edition of the Elementary Algebra. Revised by Prof. IRVING STRINGHAM, University of California. *Nearly ready*.

SOLUTIONS to above. 12mo. $2.25.

A Treatise on Algebra. 12mo. $1.90.

SOLUTIONS to above. 12mo. $2.60.

SMITH: Algebra Examples. By R. PROWDE SMITH. $1.10.

TODHUNTER. Works by I. TODHUNTER, M.A., F.R.S., D.SC.

Algebra for Beginners. With Numerous Examples. New Edition. 18mo. 75 cents.

KEY. $1.75.

Algebra. For the Use of Colleges and Schools. New Edition. 12mo. $1.80.

KEY. $2.60.

ARITHMETIC.

ALDIS: The Great Giant Arithmos. A Most Elementary Arithmetic for Children. By MARY STEADMAN ALDIS. With Illustrations. 16mo. 75 cents.

ARMY PRELIMINARY EXAMINATION (Specimens of Papers set at the), 1882–89. With Answers to the Mathematical Questions. Subjects: Arithmetic, Algebra, Euclid, Geometrical Drawing, Geography, French, English, Dictation. 12mo. 90 cents.

BRADSHAW: A Course of Easy, Arithmetical Examples for Beginners. By J. G. BRADSHAW, B.A. 16mo. 60 cents.

BROOK-SMITH: Arithmetic in Theory and Practice. By J. BROOK-SMITH, M.A., LL.B. New Edition, Revised. 12mo. $1.25.

KEY. 12mo. $2.60.

Arithmetic for Beginners. By J. and E. J. BROOK-SMITH. 12mo. 50 cents.

DALTON: Rules and Examples in Arithmetic. By the Rev. T. DALTON, M.A. New Edition. With Answers. 18mo. 60 cents.

GOYEN: Higher Arithmetic and Elementary Mensuration. By P. GOYEN, Inspector of Schools, Dunedin, New Zealand. 12mo. $1.30.

HALL and **KNIGHT: Arithmetical Exercises and Examination Papers.** With an Appendix containing Questions on Logarithms and Mensuration. By H. S. HALL, M.A., and S. R. KNIGHT, B.A. 16mo. 60 cents.

HENSLEY: Figures Made Easy. By LEWIS HENSLEY. Stiff covers. 12mo. 13 cents.

ANSWERS to Examples. 12mo. 25 cents.

The Scholar's Arithmetic. With Answers to the Examples. 12mo. $1.10.

JACKSON (S.): **Commercial Arithmetic.** Globe 8vo. $1.10.

LOCK. Works by Rev. J. B. LOCK, M.A., Senior Fellow, Assistant Tutor and Lecturer in Gonville and Caius College, Cambridge.

Arithmetic for Beginners. A School Class-book of Commercial Arithmetic. 16mo. 60 cents. KEY. $2.25.

LOCK and **SCOTT: Arithmetic for Schools.** Adapted for Use in American Schools. By Rev. J. B. LOCK and Professor CHARLOTTE A. SCOTT, Bryn Mawr College. 70 cents.

PEDLEY: Exercises in Arithmetic for the Use of Schools. Containing more than 7000 Original Examples. By S. PEDLEY. 12mo. $1.25.

PENDLEBURY: Arithmetic. With 8000 Examples. By CHARLES PENDLEBURY, M.A., F.R.A.S. With Answers. $1.10.

SMITH: Arithmetic for Schools. By C. SMITH, M.A. $1.00.

Revised American Edition. (*In Preparation.*)

SMITH. Works by BARNARD SMITH, M.A.

Arithmetic for the Use of Schools. New Edition. $1.10.

KEY. New Edition. $2.25.

School Class-Book of Arithmetic. $1.00.

KEY. $1.50.

Shilling Book of Arithmetic. With Answers. 18mo. 40 cents.

KEY. 18mo. $1.10.

Examination Papers in Arithmetic. With Answers. 60 cents.

KEY. 18mo. $1.25.

The Metric System of Arithmetic. 18mo. Paper. 8 cents.

THOMAS: Enunciations in Arithmetic, Algebra, Euclid, and Trigonometry, with a Few Examples and Notes. By P. A. THOMAS, B.A., Assistant Master in Sedbergh School. Globe 8vo. 60 cents.

ASTRONOMY.

AIRY: Works by Sir G. B. AIRY, K.C.B., formerly Astronomer-Royal.

Popular Astronomy. With Illustrations. New Edition. 18mo. $1.10.

Gravitation. An Elementary Explanation of the Principal Perturbations in the Solar System. New Edition. 12mo. $1.90.

CHAMBERS: A Handbook of Descriptive and Practical Astronomy. By GEORGE F. CHAMBERS, F.R.A.S.

VOL. I. **The Sun, Planets, and Comets.** 8vo. $5.25.

VOL. II. **Instruments and Practical Astronomy.** 8vo. $5.25.

VOL. III. **The Starry Heavens.** (*Completing the work.*) 8vo. $3.50.

Pictorial Astronomy. By G. F. CHAMBERS. With Numerous Illustrations. $1.25.

CHEYNE: An Elementary Treatise on the Planetary Theory. By the late C. H. H. CHEYNE, M.A. Third Edition. Edited by Rev. A. FREEMAN, M.A. 12mo. $1.75.

CLARK and SADLER: The Star Guide. A List of the most remarkable Celestial Objects visible with small Telescopes, with their Positions for every Tenth Day in the Year, and other Astronomical Information. By LATIMER CLARK, F.R.A.S., and HERBERT SADLER, F.R.A.S. Royal 8vo. $2.50.

CLERKE: A Popular History of Astronomy during the Nineteenth century. By AGNES M. CLERKE. Third Edition, Revised and Enlarged. 8vo. $4.00.

CROSSLEY, GLEDHILL, and WILSON: A Handbook of Double Stars. For the Use of Amateurs. By EDWARD CROSSLEY, JOSEPH GLEDHILL, and JAMES M. WILSON, F.R.A.S. With Illustrations. 8vo. $6.00.

Corrections to the Handbook of Double Stars. 8vo. 30 cents.

DURHAM: Astronomy—Sun, Moon, Stars, etc. By WILLIAM DURHAM, F.R.S.E. 12mo. 50 cents.

FORBES: The Transit of Venus. By GEORGE FORBES, B.A. With Illustrations. 12mo. $1.00.

GODFRAY: Works by HUGH GODFRAY, M.A.

An Elementary Treatise on Lunar Theory. With a Brief Sketch of the Problem up to the Time of Newton. Second Edition, Revised. 12mo. $1.60.

A Treatise on Astronomy, for the Use of Colleges and Schools. 8vo. $3.25.

LOCKYER: Works by J. NORMAN LOCKYER, F.R.S., etc.

The Chemistry of the Sun. With Illustrations. 8vo. $4.50.

Contributions to Solar Physics. With Numerous Illustrations. 8vo. $7.50.

Elementary Lessons in Astronomy. With Spectra of the Sun, Stars, and Nebulæ, and Numerous Illustrations. New Edition, Revised throughout. 16mo. $1.25.

Questions on Lockyer's Elementary Lessons in Astronomy for Schools. By J. FORBES-ROBERTSON. 18mo. 40 cents.

The Meteoritic Hypothesis. A Statement of the Spectroscopic Inquiry into the Origin of Cosmical Systems. With Numerous Illustrations. 8vo. $5.25.

The Evolution of the Heavens and the Earth. With Illustrations. (*In the Press.*)

The Dawn of Astronomy. With Illustrations. 8vo. $5.00.

LOCKYER and **SEABROKE: Star-gazing Past and Present.** By J. N. LOCKYER and G. W. SEABROKE. With Illustrations. 8vo. $6.00.

MAIN: An Introduction to Plane Astronomy. By P. T. MAIN, M.A. Sixth Edition, Revised. $1.00.

SMYTH: A Cycle of Celestial Objects. Observed, Reduced, and Discussed. By Admiral W. H. SMYTH. Revised and Enlarged by G. F. CHAMBERS, F.R.A.S. 8vo. $3.00.

BOOK-KEEPING.

FOSTER: Double Entry Elucidated. By B. W. FOSTER. Fourteenth Edition. Fcap. 4to. 90 cents.

HAMILTON and **BALL: Book-keeping.** By R. G. C. HAMILTON and J. BALL. 16mo. 50 cents.

MEDHURST: Examination Papers on Book-keeping. Compiled and Arranged by J. T. MEDHURST, A.K.C. Second Edition. 75 cents.

THORNTON: Works by J. THORNTON.

First Lessons in Book-keeping. 8vo. 70 cents.

KEY. Oblong 4to.

Primer of Book-keeping. 18mo. 35 cents. KEY.

GEOMETRY.

ALDIS (W. S.): **Solid Geometry.** 12mo. $1.50.

BESANT (Dr. W. H.): **Conic Sections** treated Geometrically. 16mo. $1.10.

SOLUTIONS to the Examples. 16mo. $1.00.

COCKSHOTT and **WALTERS: A Treatise on Geometrical Conics,** in accordance with the Syllabus of the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. By A. COCKSHOTT and Rev. F. B. WALTERS, M.A. 12mo. $1.25.

CONSTABLE: Geometrical Exercises for Beginners. By SAMUEL CONSTABLE. 12mo. 90 cents.

CUTHBERTSON: Euclidian Geometry. By FRANCIS CUTHBERTSON, M.A. 16mo. $1.10.

CREMONA: Elements of Projective Geometry. By LUIGI CREMONA, LL.D. Translated by CHARLES LEUDESDORF, M.A. 8vo. $3.25.

DAY: Properties of Conic Sections Proved Geometrically. PART I. The Ellipse. With Problems. By the Rev. H. G. DAY, M.A. 12mo. 90 cents.

DEIGHTON: Euclid. The Elements. Books I.–IV. and part of Book XI. Newly translated from the Original Text, with numerous Riders and Chapters on Radical Axis, Poles and Polars, Centres of Similitude, Transversals, Harmonic Proportion, Plane Loci, etc. By HORACE DEIGHTON, M.A. Revised Edition, with symbols and abbreviations. $1.10.

DODGSON: Works by CHARLES L. DODGSON, M.A.

Euclid. Books I. and II. 12mo. 60 cents.

Euclid and his Modern Rivals. Second Edition. 12mo. $1.60.

Curiosa Mathematica. PART I. A New Theory of Parallels. 12mo. 75 cents.

DREW: A Geometrical Treatise on Conic Sections. By W. H. DREW, M.A. Sixth Edition. 12mo. $1.25.

DUPUIS; Elementary Synthetic Geometry of the Point, Line, and Circle in the Plane. By N. F. DUPUIS, M.A. 16mo. $1.10.

Elements of Synthetic Solid Geometry. 12mo. $1.60.

DYER: Exercises in Analytical Geometry. By J. M. DYER, M.A. With Illustrations. 12mo. $1.25.

EAGLES: Constructive Geometry of Plane Curves. With Examples. By T. H. EAGLES, M.A. 12mo. $3.25.

EDGAR and **PRITCHARD: Note-book on Practical Solid or Descriptive Geometry.** Containing Problems with Help for Solution. By J. H. EDGAR, M.A., and G. S. PRITCHARD. Fourth Edition, Enlarged. By ARTHUR G. MEEZE. 16mo. $1.10.

FERRERS: A Treatise on Trilinear Co-ordinates, the Method of Reciprocal Polars, and the Theory of Projections. By the Rev. N. M. FERRERS. Fourth Edition. 12mo. $1.75.

FROST: Works by PERCIVAL FROST, D.SC., F.R.S.

An Elementary Treatise on Curve Tracing. 8vo. $3.00.

Solid Geometry. A New Edition, Revised and Enlarged, of the Treatise by FROST and WOLSTENHOLME. Third Edition. 8vo. $6.00.

Hints for the Solution of Problems in the Third Edition of Solid Geometry. 8vo. $3.00.

GRAHAM: The Geometry of Position. By ROBERT H. GRAHAM, C.E., author of "Graphic and Analytical Statics." Illustrated. 12mo. $1.75.

HALL and **STEVENS: A Text-book of Euclid's Elements.** Including Alternative Proofs, together with additional Theorems and Exercises, Classified and Arranged. By H. S. HALL, M.A., and F. H. STEVENS, M.A.

BOOKS I.–VI. Globe 8vo. $1.10.

Also sold separately:

BOOK I. 30 cents.	BOOKS I. and II. 50 cents.
BOOKS I.–IV. 75 cents.	BOOKS III.–VI. 75 cents.
BOOK XI. 30 cents.	BOOKS V.–VI.–XI. 70 cents.

KEY to Examples in Books I.–IV., $1.75; Books I.–VI. and XI., $2.25.

HAYWARD: The Elements of Solid Geometry. By R. BALDWIN HAYWARD, M.A., F.R.S. 12mo. 75 cents.

HEATH (R. S.)**: Treatise on Geometrical Optics.** 8vo. $3.50.

An Elementary Treatise on Geometrical Optics. $1.25.

JOHNSTON (W. J.)**: An Elementary Treatise on Analytic Geometry.** $2.60.

KITCHENER: Geometrical Note-book. Containing Easy Problems in Geometrical Drawing, preparatory to the Study of Geometry. By F. E. KITCHENER, M.A. New Edition. 4to. 55 cents.

LACHLAN (R.)**: An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry.** 8vo. $2.25.

LOCK: Euclid for Beginners. Being an Introduction to the Existing Text-books. By the Rev. J. B. LOCK, M.A. Senior Fellow, Assistant Tutor and Lecturer, Gonville and Caius College, Cambridge, 16mo. (*In the Press.*)

First Book of Euclid's Elements. 16mo. 60 cents.

McCLELLAND: The Geometry of the Circle. By W. J. McCLELLAND, M.A., Trinity College, Dublin; Head Master of Santry School. Crown 8vo. Illustrated. $2.60.

McDOWELL: Exercises on Euclid and in Modern Geometry, containing Applications of the Principles and Processes of Modern Pure Geometry. By J. McDOWELL, M.A., F.R.A.S. Third Edition, Revised. $1.50.

MILLAR: Elements of Descriptive Geometry. By J. B. MILLAR, B.E. 12mo. $1.50.

MILNE and DAVIS: Geometrical Conics. By J. J. MILNE and R. F. DAVIS. PART I. The Parabola. 12mo. 60 cents.

MUKHOPADHAY: Geometrical Conic Sections. By ASUTOSH MUKHOPADHAY, M.A., Fellow of the University of Calcutta. Globe 8vo. $1.10.

NIXON: Euclid. Revised. Containing the Essentials of the Elements of Plane Geometry as given by Euclid. With Additional Propositions and Exercises. Edited by R. C. J. NIXON, M.A. $1.50.

BOOKS I. to IV. 12mo. 75 cents. BOOKS V. and VI. 12mo. 75 cents.

Geometry in Space. Containing parts of Euclid's Eleventh and Twelfth Books and some Properties of Polyhedra and Solids of Revolution, with Exercises. Edited by R. C. J. NIXON, M.A. 12mo. 90 cents.

PLANT: Practical Plane Geometry. By E. C. PLANT. (*In the Press.*)

PUCKLE: An Elementary Treatise on Conic Sections and Algebraic Geometry. With Examples and Hints for their Solution. By G. HALE PUCKLE, M.A. Fifth Edition, Revised and Enlarged. 12mo. $1.90.

RICHARDSON: The Progressive Euclid. Books. I.–II. With Notes, Exercises, and Deductions. By A. T. RICHARDSON, M.A. 60 cents.

RICHARDSON and **RAMSAY: Modern Plane Geometry.** By G. RICHARDSON and A. S. RAMSAY. $1.00.

RUSSELL (J. W.): **An Elementary Treatise on Pure Geometry.** With Numerous Examples. $2.60.

SMITH: Works by CHARLES SMITH, M.A., Fellow and Tutor of Sidney Sussex College, Cambridge.

An Elementary Treatise on Conic Sections. Seventh Edition. 12mo. $1.60.

Solutions to Conic Sections. 12mo. $2.60.

An Elementary Treatise on Solid Geometry. 12mo. $2.50.

SMITH: Introductory Modern Geometry of the Point, Ray, and Circle. By WILLIAM B. SMITH, PH.D., Professor of Mathematics in Missouri State University, Columbia, Mo. Part I., 75 cents. Complete Edition, $1.10.

SYLLABUS OF PLANE GEOMETRY: (Corresponding to Euclid, Books I.–IV.) Revised and brought into correspondence with the text-book prepared by the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. New Edition. 16mo. 30 cents.

SYLLABUS OF MODERN PLANE GEOMETRY: Paper. 12mo. 30 cents.

TAYLOR: Elements of Geometry. 18mo. Books I. and II., 50 cents. Books III. and IV., 50 cents. Books I. to IV., 90 cents. Books V. and VI., 40 cents. Edited by H. M. TAYLOR, M.A.

Solutions to the Exercises in Euclid. Books I.–IV. By W. W. TAYLOR, M.A. $1.75.

TODHUNTER: The Elements of Euclid. By ISAAC TODHUNTER, F.R.S. 18mo. 90 cents.

KEY. 12mo. $1.75.

Plane Co-ordinate Geometry, as Applied to the Straight Line and the Conic Sections. 12mo. $1.80.

KEY. By C. W. BOURNE, M.A. 12mo. $2.60.

Examples in Analytical Geometry of Three Dimensions. New Edition, Revised. 12mo. $1.00.

VYVYAN: Analytical Geometry for Schools. By T. G. VYVYAN. $1.10.

Analytical Geometry for Beginners. Part I. 60 cents.

WEEKS: Exercises in Euclid. Graduated and Systematised. By WILLIAM WEEKS, Lecturer on Geometry, St. Luke's Training College, Exeter. 18mo. 60 cents.

WILLIS: An Elementary Treatise on Geometrical Conic Sections. By H. G. WILLIS, M.A. $1.25.

WILSON: Works by Rev. J. M. WILSON, M.A. Late Head Master of Clifton College.

Elementary Geometry.

BOOKS I.–V. Containing the Subjects of Euclid's First Six Books. Following the Syllabus of the Geometrical Association. New Edition. 16mo. $1.10.

Solid Geometry and Conic Sections. With Appendices on Transversals and Harmonic Division. 16mo. 90 cents.

MENSURATION.

MOORE: An Elementary Treatise on Mensuration. By B. T. MOORE, M.A. With Numerous Examples. 90 cents.

STEVENS: Elementary Mensuration. With Exercises on the Mensuration of Plane and Solid Figures. By F. H. STEVENS, M.A. (*In the Press.*)

TODHUNTER: Mensuration for Beginners. By ISAAC TODHUNTER, F.R.S. 18mo. 75 cents.

KEY. By Rev. FR. L. MCCARTHY. 12mo. $1.90.

TRIGONOMETRY.

BEASLEY: An Elementary Treatise on Plane Trigonometry. With Examples. By R. D. BEASLEY, M.A. Ninth Edition, Revised and Enlarged. 12mo. 90 cents.

BOTTOMLEY: Four-Figure Mathematical Tables. Comprising Logarithmic and Trigonometrical Tables, and Tables of Squares, Square Roots, and Reciprocals. By J. T. BOTTOMLEY, M.A., F.R.G.S., F.C.S. 8vo. 70 cents.

DYER and **WHITCOMBE: Trigonometry, The Elements of.** By J. M. DYER, M.A., and the Rev. H. R. WHITCOMBE, M.A. $1.25.

HALL and **KNIGHT: Elementary Trigonometry.** By H. S. HALL, M.A., and S. R. KNIGHT, B.A., M.B., CH.B. 16mo. $1.10.

HAYWARD: The Algebra of Co-Planar Vectors and Trigonometry. By R. B. HAYWARD, M.A., F.R.S. $2.00.

HOBSON: Treatise on Plane Trigonometry. By E. W. HOBSON. 8vo. $3.00.

An Elementary Treatise on Plane Trigonometry for the Use of Schools. By E. W. HOBSON, M.A., and C. M. JESSOP, M.A. $1.25.

JONES: Logarithmic Tables. Royal 8vo. $1.00.

JOHNSON: Treatise on Trigonometry. By W. E. JOHNSON, M.A. Formerly Scholar of King's College, Cambridge. 12mo. $2.25.

LEVETT and **DAVISON: The Elements of Trigonometry.** By RAWDON LEVETT and A. F. DAVISON, Masters at King Edward's School, Birmingham. Crown 8vo. $1.60.

LOCK: Works by J. B. LOCK, M.A., Assistant Tutor and Lecturer in Gonville and Caius College, Cambridge.

Trigonometry for Beginners. As far as the Solution of Triangles. 16mo. 75 cents.

KEY. $1.75.

Elementary Trigonometry. Sixth Edition. (In this edition the chapter on Logarithms has been carefully revised.) 16mo. $1.10.

KEY. $2.25.

Higher Trigonometry. Fifth Edition. 16mo. $1.00.

TWO PARTS in one volume. $1.90.

The Trigonometry of One Angle. 12mo. Cloth, 65 cents.

A Treatise on Elementary and Higher Trigonometry. 16mo. $1.90.

LONEY: Plane Trigonometry. By S. L. LONEY, M.A. An Elementary Course, excluding the Use of Imaginary Quantities. Fcap. 8vo.

PART I. $1.40. Complete. $1.90.

McCLELLAND and PRESTON: A Treatise on Spherical Trigonometry. With Applications to Spherical Geometry, and Numerous Examples. By WILLIAM J. MCCLELLAND, M.A., and THOMAS PRESTON, B.A. 12mo.

PART I. $1.10. PART II. $1.25. TWO PARTS in one volume, $2.25.

NIXON: Elementary Plane Trigonometry. By R. C. J. NIXON. $1.90.

PALMER: Practical Logarithms and Trigonometry, Text-Book of. By J. H. PALMER. 16mo. $1.10.

SNOWBALL: The Elements of Plane and Spherical Trigonometry. By J. C. SNOWBALL, M.A. Fourteenth Edition. 12mo. $1.90.

TODHUNTER: Works by ISAAC TODHUNTER, F.R.S.

Trigonometry for Beginners. New Edition. 18mo. 60 cents.

KEY. $2.25.

Plane Trigonometry. 12mo. $1.30.

KEY. $2.60.

A Treatise on Spherical Trigonometry. For the Use of Colleges and Schools. 12mo. $1.10.

TODHUNTER and **HOGG: Plane Trigonometry.** By ISAAC TODHUNTER. New Edition. Revised by R. W. HOGG, M.A., Fellow of St. John's College, Cambridge. 12mo. $1.10.

VYVYAN: Introduction to Plane Trigonometry. By the Rev. T. G. VYVYAN, M.A. Third Edition, Revised and Corrected. 90 cents.

WARD (G. H.): **Trigonometry Examination Papers.** 60 cents.

WOLSTENHOLME: Examples for Practice in the Use of Seven-Figure Logarithms. By JOSEPH WOLSTENHOLME, D.SC. 8vo. $1.25.

PROBLEMS AND QUESTIONS IN MATHEMATICS.

ARMY PRELIMINARY EXAMINATION (Specimens of Papers set at the), 1882–89. With Answers to the Mathematical Questions. Subjects: Arithmetic, Algebra, Euclid, Geometrical Drawing, Geography, French, English, Dictation. 12mo. 90 cents.

BALL: Mathematical Recreations and Problems. By W. W. ROUSE BALL. $2.25.

CAMBRIDGE Senate-House Problems and Riders, with Solutions.

1875. Problems and Riders. Edited by A. G. GREENHILL, M.A. 12mo. $2.25.

1878. Solutions by the Mathematical Moderators and Examiners. Edited by J. W. L. GLAISHER, M.A. 8vo. $3.00.

CHRISTIE: A Collection of Elementary Test-Questions in Pure and Mixed Mathematics. With Answers and Appendices on Synthetic Division, and on the Solution of Numerical Equations by Horner's Method. By JAMES R. CHRISTIE, F.R.S. 12mo. $2.25.

DEAKIN: Rider Papers on Euclid. Books I. and II. Graduated and Arranged in Order of Difficulty, with an Introduction on Teaching Euclid. By ROBERT DEAKIN, M.A., Balliol College, Oxford, Head Master of King Edward's School, Stourbridge. 18mo. Cloth. 35 cents.

DYER: Mathematical Examples. A Collection of Examples in Arithmetic Pure and Mixed, Algebra, Trigonometry, Mensuration, Theory of Equations, Analytical Geometry, Statics and Dynamics. With Answers, etc. By J. M. DYER, M.A., and R. PROWDE SMITH, M.A. $1.50.

FILIPOWSKI (H. E.): **A Table of Anti-Logarithms.** Natural Numbers answering to all Logarithms from .00001 to .99999, etc. Third Edition. $3.50.

LAMB: Hydrodynamics. A Treatise on the Mathematical Theory of Fluid Motion. By HORACE LAMB, M.A. 8vo. $3.00.

MATTHEWS: Manual of Logarithms. By G. F. MATTHEWS, M.A. 8vo. $1.60.

MEDHURST (J. T.): **Examination Papers on Book-keeping.** Compiled and Arranged by J. T. MEDHURST, A.K.C. Second Edition. 75 cents.

MILNE: Works by the Rev. JOHN T. MILNE.

Weekly Problem Papers. With Notes intended for the Use of Students preparing for Mathematical Scholarships. 18mo. $1.00.

Solutions to the "Weekly Problem Papers." 12mo. $2.75.

A Companion to the "Weekly Problem Papers." Intended for the Use of Students preparing for Mathematical Scholarships, and for the Junior Members of the University who are reading for Mathematical Honors. 12mo. $2.60.

RICHARDSON (A. T.): **Progressive Mathematical Exercises for Home Work.** In Two Parts. By A. T. RICHARDSON, M.A., Senior Mathematical Master at the Isle of Wight College, formerly Scholar of Hertford College, Oxford. Intended for use in the lower forms of schools together with the ordinary text-books, so that the learner's progress can from time to time be tested. 60 cents.

SANDHURST MATHEMATICAL PAPERS for Admission into the Royal Military College, for the Years 1881–1889. Edited by E. J. BROOK-SMITH, B.A., LL.M., St. John's College, Cambridge. 12mo. $1.00.

SMITH: Mathematical Examples. By R. PROWDE SMITH. $1.50.

WARD: Trigonometry, Examination Papers in. By G. H. WARD, M.A. 60 cents.

KEY (for Tutors only). $1.25.

WRIGLEY: Collection of Examples and Problems in Arithmetic, Algebra, Geometry, Logarithms, Trigonometry, Conic Sections, Mechanics, etc., with Answers and Occasional Hints. By the Rev. A. WRIGLEY. Tenth Edition, Twentieth Thousand. 8vo. $2.00.

A KEY or Companion to the above. Second Edition. $2.60.

WOLSTENHOLME: Works of JOSEPH WOLSTENHOLME, D.SC.

Mathematical Problems on Subjects Included in the First and Second Division of the Schedule of Subjects for the Cambridge Mathematical Tripos Examination. New Edition, Enlarged. 8vo. $4.50.

Seven-Figure Logarithms. Examples for Practice in the Use of. For Colleges and Schools. 8vo. $1.25.

WOOLWICH MATHEMATICAL PAPERS for Admission into the Royal Military Academy, for the Years 1880–1888. Edited by E. J. BROOK-SMITH, B.A., LL.M., St. John's College, Cambridge; Instructor of Mathematics at Royal Military Academy, Woolwich. 12mo. $1.75.

HIGHER PURE MATHEMATICS.

AIRY: Works by Sir G. B. AIRY, K.C.B., formerly Astronomer-Royal.

Elementary Treatise on Partial Differential Equations. With Diagrams. Second Edition. 12mo. $1.50.

On the Algebraical and Numerical Theory of Errors of Observations and the Combination of Observations. Second Edition, Revised. 12mo. $1.75.

BESANT: Notes on Roulettes and Glissettes. By W. H. BESANT, D.SC., F.R.S. Second Edition, Enlarged. $1.25.

BOOLE: A Treatise on the Calculus of Finite Differences. By the late GEORGE BOOLE. Edited by J. F. MOULTON. Third Edition. 12mo. $2.60.

CAYLEY: Elementary Treatise on Elliptic Functions. By ARTHUR CAYLEY, D.SC., F.R.S. (*New Edition preparing.*)

EDWARDS: Differential Calculus. With Applications and Numerous Examples. An Elementary Treatise. By JOSEPH EDWARDS, M.A. 12mo. $2.75.

Differential Calculus for Beginners. 16mo. $1.10.

FERRERS: An Elementary Treatise on Spherical Harmonics and Subjects Connected with Them. By Rev. N. M. FERRERS, D.D., F.R.S. 12mo. $1.90. (*Out of print.*)

A Treatise on Trilinear Co-ordinates. New Edition. $1.75.

FORSYTH: Works by ANDREW RUSSELL FORSYTH, M.A.

A Treatise on Differential Equations. 8vo. $3.75.

Theory of Differential Equations. PART I. Exact Equations and Pfaff's Problems. 8vo. $3.75.

A Treatise on the Theory of Functions of a Complex Variable. Royal 8vo. $8.50.

FLEISCHER: A System of Volumetric Analysis. With Illustrations. $2.00.

FROST: An Elementary Treatise on Curve Tracing. By PERCIVAL FROST, M.A. 8vo. $3.00.

GREENHILL: Differential and Integral Calculus. With Applications. By ALFRED GEORGE GREENHILL, M.A. 12mo. $2.00.

Application of Elliptic Functions. 8vo. $3.00.

HEMMING: An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus. By G. W. HEMMING, M.A. 8vo. $2.50.

HUNTER (H. ST. J.): **Decimal Approximations.** 18mo. 40 cents.

A KEY to Dr. Todhunter's Differential Calculus. $2.60.

KELLAND and **TAIT: Introduction to Quaternions.** With Examples. By P. KELLAND, M.A., and P. G. TAIT, M.A. Second Edition. 12mo. $2.00.

KEMPE: How to Draw a Straight Line. A Lecture on Linkages. By A. B. KEMPE, B.A. With Illustrations. 12mo. 50 cents.

KNOX: Differential Calculus for Beginners. With Examples. By ALEXANDER KNOX, B.A. 16mo. 90 cents.

LOVE: Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 8vo. Vol. I. $3.00. Vol. II. $3.00.

MESSENGER OF MATHEMATICS: Edited by J. W. L. GLAISHER. Published Monthly. 35 cents each number.

MORLEY and **HARKNESS: The Theory of Functions.** By FRANK MORLEY, M.A., Professor of Mathematics, Haverford College, Pa., and JAMES HARKNESS, M.A., Professor of Mathematics, Bryn Mawr College, Pa. 8vo. $5.00.

MUIR: Works by THOMAS MUIR, Mathematical Master in the High School, Glasgow.

A Treatise on the Theory of Determinants. With Examples. 12mo. New Edition. $2.25.

The Theory of Determinants in the Historical Order of its Development. PART I. Determinants in General. Leibnitz (1693) to Cayley (1841). 8vo. $2.50.

PRICE: Treatise on Infinitesimal Calculus. By BARTHOLOMEW PRICE, M.A., F.R.S., Professor of Natural Philosophy, Oxford.

VOL. I. **Differential Calculus.** Second Edition. 8vo. $3.75.

VOL. II. **Integral Calculus, Calculus of Variations, and Differential Equations.** 8vo. (*Reprinting.*)

VOL. III. **Statics, including Attractions; Dynamics of a Material Particle.** 8vo. $4.00.

VOL. IV. **Dynamics of Material Systems.** Together with a Chapter on Theoretical Dynamics, by W. F. DONKIN, M.A. 8vo. $4.50.

SCOTT: A Treatise on the Theory of Determinants and their Applications in Analysis and Geometry. By ROBERT SCOTT, M.A. 8vo. $3.50.

SMALLEY: Facts and Formulæ in Pure Mathematics and Natural Philosophy. Containing Facts, Formulæ, Symbols, and Definitions. By the late G. R. SMALLEY, B.A., F.R.A.S. New Edition by J. M'DOWELL, M.A., F.R.A.S. 16mo. 70 cents.

SMITH: Mathematical Papers of the late Rev. J. S. Smith, Savilian Professor of Geometry in the University of Oxford, With Portrait and Memoir. 2 vols. 4to. (*In Preparation.*)

TAIT: An Elementary Treatise on Quaternions. By P. G. TAIT, M.A., Professor of Natural Philosophy in the University of Edinburgh. Third Edition, Much Enlarged. 8vo. $5.50.

TODHUNTER: Works by ISAAC TODHUNTER, F.R.S.

An Elementary Treatise on the Theory of Equations. 12mo. $1.80.

A Treatise on the Differential Calculus. 12mo. $2.60. KEY. $2.60.

A Treatise on the Integral Calculus and its Applications. 12mo. $2.60. KEY. $2.60.

An Elementary Treatise on Laplace's Lamé and Bessel's Functions. 12mo. $2.60. (*Out of print.*)

WATSON and **BURBURY: A Treatise on the Application of Generalized Co-ordinates** to the Kinetics of a Material System. By H. W. WATSON and S. H. BURBURY. 8vo. $1.50.

WELD: A Short Course in the Theory of Determinants. By LAENAS GIFFORD WELD, B.S., M.A. $1.90.

WHITWORTH: Trilinear Co-ordinates, and other methods of Modern Analytical Geometry of Two Dimensions. An Elementary Treatise. By W. ALLEN WHITWORTH, M.A. 8vo. $4.00.

MECHANICS.

ALDIS: Rigid Dynamics, An Introductory Treatise on. By W. STEADMAN ALDIS, M.A. $1.00.

ALEXANDER and **THOMPSON: Elementary Applied Mechanics.** PART II. Transverse Stress. $2.75.

BALL: Experimental Mechanics. A Course of Lectures delivered to the Royal College of Science for Ireland. By Sir R. S. BALL, LL.D., F.R.S. Second Edition. With Illustrations. 12mo. $1.50.

BASSET: A Treatise on Hydrodynamics. 2 vols. 8vo. $9.00.

An Elementary Treatise on Hydrodynamics and Sound. 8vo. $3.00.

A Treatise on Physical Optics. 8vo. $6.00.

BAYNES: Lessons on Thermodynamics. By R. E. BAYNES, M.A. 12mo. $1.90.

BESANT: A Treatise on Hydromechanics. Fifth Edition, Revised. PART I. Hydrostatics. 12mo. $1.25.

A Treatise on Dynamics. $1.75.

Elementary Hydrostatics. 16mo. $1.00.

Solutions to the Examples. (*In the Press.*)

CLIFFORD: Works by W. KINGDON CLIFFORD, F.R.S.

Elements of Dynamic. An Introduction to the Study of Motion and Rest in Solid and Fluid Bodies.

PART I. Books I.–III. 12mo. $1.90.

PART II. Book IV. and Appendix. 12mo. $1.75.

COTTERILL: Applied Mechanics. An Elementary General Introduction to the Theory of Structures and Machines. By JAMES H. COTTERILL, F.R.S. 8vo. $5.00.

COTTERILL and **SLADE: Elementary Manual of Applied Mechanics.** By Prof. J. H. COTTERILL, F.R.S., and J. H. SLADE. 12mo. $1.25.

CREMONA (LUIGI): **Graphical Statics.** Two Treatises on the Graphical Calculus and Reciprocal Figures in Graphical Calculus. Authorized English Translation by T. HUDSON BEARE. 8vo. $2.25.

GARNETT: Elementary Dynamics, A Treatise on. For the Use of Colleges and Schools. By WILLIAM GARNETT, M.A., D.C.L. Fifth Edition, Revised. $1.50.

GOODWIN: Elementary Statics. By H. GOODWIN, D.D., Bishop of Carlisle. Second Edition. 75 cents.

GREAVES. Works by JOHN GREAVES, M.A.

A Treatise on Elementary Statics. Second Edition, Revised. 12mo. $1.90.

Statics for Beginners. 16mo. 90 cents.

Treatise on Elementary Hydrostatics. 12mo. $1.10.

GREENHILL: Hydrostatics. By A. G. GREENHILL. 12mo. $1.90.

GUILLEMIN (A.): **The Applications of Physical Forces.** Translated and Edited by J. NORMAN LOCKYER, F.R.S. With Colored Plates and Illustrations. Royal 8vo. $6.50.

HICKS: Elementary Dynamics of Particles and Solids. By W. M. HICKS. 12mo. $1.60.

HOROBIN: Elementary Mechanics. Stage I. By J. C. HOROBIN, B.A. With Numerous Illustrations. 12mo. Cloth. 50 cents. Stages II. and III. (*In Preparation.*)

Theoretical Mechanics. Division I. (*In the Press.*)

HOSKINS: The Elements of Graphic Statics. A Text-book for Students of Engineering. By L. M. HOSKINS, C.E., M.S. 8vo. $2.25.

JELLETT: A Treatise on the Theory of Friction. By JOHN H. JELLETT, B.D., late Provost of Trinity College, Dublin. 8vo. $2.25.

JESSOP: The Elements of Applied Mathematics, including Kinetics, Statics, and Hydrostatics. By C. M. JESSOP. $1.25.

KENNEDY: The Mechanics of Machinery. By ALEXANDER B. W. KENNEDY, F.R.S. With Illustrations. 12mo. $3.50.

LAMB: Hydrodynamics. A Treatise on the Mathematical Theory of Fluid Motion. By H. LAMB. 8vo. $3.00.

LOCK: Works by the Rev. J. B. LOCK, M.A.

Dynamics for Beginners. 16mo. $1.00.

Elementary Statics. 16mo. $1.10. KEY. 12mo. $2.25.

Mechanics for Beginners. PART I. 90 cents. Mechanics of Solids.

Elementary Hydrostatics. (*In Preparation.*)

Mechanics of Solids. 16mo. (*In the Press.*)

Mechanics of Fluids. 16mo. (*In the Press.*)

LONEY: A Treatise on Elementary Dynamics. New and Enlarged Edition. By S. L. LONEY, M.A. 12mo. $1.90.

Solutions of the Examples contained in the Above. 12mo. $1.90.

The Elements of Statics and Dynamics.

PART I. Elements of Statics. $1.25.

PART II. Elements of Dynamics. $1.00.

Complete in one volume. 12mo. $1.90. KEY. 12mo. $1.90.

Mechanics and Hydrostatics for Beginners. 16mo. $1.25.

MACGREGOR: An Elementary Treatise on Kinematics and Dynamics. By JAMES GORDON MACGREGOR, M.A., D.SC., Munro Professor of Physics, Dalhousie College, Halifax. 12mo. $2.60.

MINCHIN: Works by G. M. MINCHIN, M.A.

A Treatise on Statics. Third Edition, Corrected and Enlarged.

VOL. I. **Equilibrium of Coplanar Forces.** 8vo. $2.25.

VOL. II. **Statics.** 8vo. $4.00.

Uniplanar Kinematics of Solids and Fluids. 12mo. $1.90.

Hydrostatics and Elementary Hydrokinetics. $2.60.

PARKINSON (R. M.): **Structural Mechanics.** $1.10.

PARKINSON: A Treatise on Elementary Mechanics. For the use of the Junior Classes at the University and the Higher Classes in Schools. With a collection of Examples by S. PARKINSON, F.R.S. Sixth Edition. 12mo. $2.25.

PIRIE: Lessons on Rigid Dynamics. By the Rev. G. PIRIE, M.A. 12mo. $1.50.

RAWLINSON: Elementary Statics. By G. RAWLINSON, M.A. Edited by E. STURGES. 8vo. $1.10.

ROUTH: Works by E. J. ROUTH, LL.D., F.R.S.

A Treatise on the Dynamics of a System of Rigid Bodies. With Examples. New Edition, Revised and Enlarged. 8vo. In Two Parts.

PART I. Elementary. Fifth Edition, Revised and Enlarged. $3.75.

PART II. Advanced. $3.75.

Stability of a Given State of Motion, Particularly Steady Motion. 8vo. $2.25.

A Treatise on Analytical Statics. With Numerous Examples. Vol. I. 8vo. $3.75.

SANDERSON: Hydrostatics for Beginners. By F. W. SANDERSON, M.A. 16mo. $1.10.

SELBY: Elementary Mechanics of Solids and Fluids. $1.90.

SYLLABUS OF ELEMENTARY DYNAMICS.

PART I. Linear Dynamics. With an Appendix on the Meanings of the Symbols in Physical Equations. Prepared by the Association for the Improvement of Geometrical Teaching. 4to. 30 cents.

TAIT and **STEELE: A Treatise on Dynamics of a Particle.** By Professor TAIT, M.A., and W. J. STEELE. Sixth Edition, Revised. 12mo. $3.00.

TAYLOR: Resistance of Ships, and Screw Propulsion. By D. W. TAYLOR. $3.75.

TODHUNTER. Works by ISAAC TODHUNTER, F.R.S.

Mechanics for Beginners. With Numerous Examples. New Edition. 18mo. $1.10. KEY. $1.75.

A Treatise on Analytical Statics. Fifth Edition. Edited by Professor J. D. EVERETT, F.R.S. 12mo. $2.60.

WALTON: Mechanics, A Collection of Problems in Elementary. By W. WALTON, M.A. Second Edition. $1.50.

Problems in Theoretical Mechanics. Third Edition, Revised. With the addition of many fresh Problems. By W. WALTON, M.A. 8vo. $4.00.

WEISBACH and **HERRMANN: The Mechanics of Hoisting Machinery,** including Accumulators, Excavators, and Pile-Drivers. A Text-Book for Technical Schools, and a Guide for Practical Engineers. By Dr. JULIUS

WEISBACH and Professor GUSTAV HERRMANN. Authorized Translation from the Second German Edition. By KARL P. DAHLSTROM, M.E., Instructor of Mechanical Engineering in the Lehigh University. With 177 Illustrations. $3.75.

ZIWET: An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics. In Three Parts: Kinematics, Statics, and Dynamics. By ALEXANDER ZIWET, University of Michigan.

PART I. $2.25. PART II. $2.25. PART III. (*In Preparation.*)

PHYSICS.

AIRY. Works by Sir G. B. AIRY, K.C.B., formerly Astronomer-Royal.

On Sound and Atmospheric Vibrations. With the Mathematical Elements of Music. Designed for the Use of Students in the University. Second Edition, Revised and Enlarged. 12mo. $2.50.

Gravitation. An Elementary Explanation of the Principal Perturbations in the Solar System. New Edition. 12mo. $1.90.

ALDIS: Geometrical Optics. An Elementary Treatise. By W. STEADMAN ALDIS, M.A. Third Edition, Revised. 12mo. $1.00.

CLAUSIUS: Mechanical Theory of Heat. By R. CLAUSIUS. Translated by WALTER R. BROWNE, M.A. 12mo. $2.60.

DANIELL: A Text-Book of the Principles of Physics. By ALFRED DANIELL, D.SC. Illustrated. New Edition, Revised and Enlarged. 8vo. $3.50.

DAUBENY'S Introduction to the Atomic Theory. 16mo. $1.50.

DONKIN (W. F.): **Acoustics.** Second Edition. 12mo. $1.90.

EVERETT: Units and Physical Constants. By J. D. EVERETT, F.R.S., Professor of Natural Philosophy, Queen's College, Belfast. New Edition. 16mo. $1.25.

FERRERS: Spherical Harmonics and Subjects Connected with them. By Rev. N. M. FERRERS, D.D., F.R.S. 12mo. $1.90.

FISHER: Physics of the Earth's Crust. By OSMOND FISHER. Second Edition, Enlarged. 8vo. $3.50.

FOURIER: The Analytical Theory of Heat. By JOSEPH FOURIER. Translated with Notes, by A. FREEMAN, M.A. 8vo. $4.50.

GALLATLY: Physics, Examples in Elementary. Comprising Statics, Dynamics, Hydrostatics, Heat, Light, Chemistry, and Electricity. With Examination Papers. By W. GALLATLY, M.A. $1.00.

GARNETT: Heat, An Elementary Treatise on. By W. GARNETT, M.A., D.C.L. Fifth Edition, Revised and Enlarged. $1.10.

GLAZEBROOK: Heat. By R. T. GLAZEBROOK, M.A., F.R.S. $1.00.

Light. *Cambridge Natural Science Manuals.* $1.00.

HEATH: Treatise on Geometrical Optics. By R. S. HEATH. 8vo. $3.50.

An Elementary Treatise on Geometrical Optics. By R. S. HEATH. 12mo. $1.25.

HOGG'S (JABEZ) **Elements of Experimental and Natural Philosophy.** With Index and upwards of 400 Woodcuts. $1.50.

IBBETSON: The Mathematical Theory of Perfectly Elastic Solids. With a Short Account of Viscous Fluids. By W. J. IBBETSON, late Senior Scholar of Clare College, Cambridge. 8vo. $5.00.

JELLETT (JOHN H. B. D.): **A Treatise on the Theory of Friction.** 8vo. $2.25.

JONES: Examples in Physics. By D. E. JONES, B.SC. 16mo. 90 cents.

Sound, Light, and Heat. An Elementary Text-book. By D. E. JONES, B.SC., author of "Examples in Physics," etc. With Illustrations. 16mo. 70 cents.

Lessons in Heat and Light. 16mo. $1.00.

LOEWY. Works by B. LOEWY, F.R.A.S.

Experimental Physics. Questions and Examples in Physics, Sound, Light, Heat, Electricity, and Magnetism. 16mo. 50 cents.

A Graduated Course of Natural Science, Experimental and Theoretical, for Schools and Colleges. PART I. First Year's Course for Elementary Schools and the Junior Classes of Technical Schools and Colleges. 16mo. 60 cents. PART II. 60 cents.

LOVE: Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. 8vo. Vol. I. $3.00. Vol. II. $3.00.

LUPTON: Numerical Tables and Constants in Elementary Science. By SYDNEY LUPTON. 16mo. 70 cents.

MACFARLANE: Physical Arithmetic. By ALEXANDER MACFARLANE, Professor of Physics, University of Texas. 12mo. $1.90.

MAXWELL: The Scientific Papers of James Clerk Maxwell, M.A., LL.D. B.SC., etc., etc. Edited by W. D. NIVEN, M.A., F.R.S. With Steel Portraits and Page Plates. 2 vols. 4to. $25.00.

McAULAY (A.): **Utility of Quaternions in Physics.** 8vo. $1.60.

MOLLOY: Gleanings in Science. A Series of Popular Lectures on Scientific Subjects. By the Rev. GERARD MOLLOY, D.D., D.SC. 8vo. $2.25.

NEWTON'S Principia. Edited by Professor Sir W. THOMSON and Professor BLACKBURN. (Latin Text.) 4to. $12.00.

This volume does not contain an English Translation.

FIRST BOOK. Sections I., II., III. With Notes and Problems. By P. FROST, M.A. Third Edition. 8vo. $3.00.

The First Three Sections of Newton's Principia, with an Appendix; and the Ninth and Eleventh Sections. By J. H. EVANS, M.A. The Fifth Edition, edited by P. T. MAIN. $1.00.

PARKER: A Treatise on Thermodynamics. By T. PARKER, M.A., Fellow of St. John's College, Cambridge. $2.25.

PARKINSON: A Treatise on Optics. By S. PARKINSON, D.D., F.R.S. Fourth Edition, Revised and Enlarged. 12mo. $2.50.

PEARSON: A History of the Theory of Elasticity. By ISAAC TODHUNTER. Edited by Professor KARL PEARSON. Vol. I. Galilei to Saint-Venant, 1639–1850. 8vo. $6.00. Vol. II. Saint-Venant to Lord Kelvin (Sir William Thomson). In Two Parts. $7.50.

PERRY: An Elementary Treatise on Steam. By JOHN PERRY. With Woodcuts, Numerical Examples, and Exercises. 18mo. $1.10.

PRESTON: The Theory of Light. By THOMAS PRESTON. With Illustrations. 8vo. $3.25.

The Theory of Heat. By the same author. 8vo. $5.50.

RAYLEIGH: The Theory of Sound. By LORD RAYLEIGH, M.A., F.R.S. 8vo. New edition in two volumes. (*In the Press.*)

VOL. I. $3.25. (*Out of Print.*)

VOL. II. $3.25.

VOL. III. (*In the Press.*)

SAINT-VENANT (BARRI DE): **The Elastic Researches of.** Edited for the Syndics of the Cambridge University Press by KARL PEARSON, M.A. 8vo. $2.75.

SHANN: An Elementary Treatise on Heat in Relation to Steam and the Steam-Engine. By G. SHANN, M.A. With Illustrations. 12mo. $1.10.

SHAW: Practical Work at the Cavendish Laboratory. Edited by W. N. SHAW.

Heat. 8vo. 90 cents.

SPOTTISWOODE: Polarization of Light. By W. SPOTTISWOODE, LL.D. Illustrated. 12mo. $1.25.

STEWART. Works by BALFOUR STEWART, F.R.S.

Lessons in Elementary Physics. With Illustrations and colored Diagrams. 16mo. $1.10.

Questions on the Same for Schools. By T. H. CORE. 40 cents.

A Treatise on Heat. With Numerous Woodcuts and Diagrams. Fourth Edition. 16mo. $1.90.

STEWART and **GEE: Lessons on Elementary Practical Physics.** By BALFOUR STEWART, M.A., LL.D., F.R.S., and W. W. HALDANE GEE.

VOL. I. **General Physical Processes.** 12mo. $1.50.

VOL. II. **Electricity and Magnetism.** $2.25.

VOL. III. **Optics, Heat, and Sound.** (*In the Press.*)

Practical Physics for Schools and the Junior Students of Colleges.

VOL. I. **Electricity and Magnetism.** 16mo. 60 cents.

VOL. II. **Optics, Heat, and Sound.** (*In the Press.*)

STOKES. Works by GEORGE GABRIEL STOKES, F.R.S.

On Light. Burnett Lectures. On the Nature of Light. On Light as a Means of Investigation. On the Beneficial Effects of Light. 12mo. $2.00.

Mathematical and Physical Papers. 8vo.

VOL. I. $3.75. VOL. II. $3.75. VOL. III. (*In the Press.*)

STONE: Elementary Lessons on Sound. By W. H. STONE, M.B. With Illustrations. 16mo. 90 cents.

TAIT. Works by P. G. TAIT, M.A., SEC. R.S.E.

Lectures on Some Recent Advances in Physical Science. With Illustrations. Third Edition, Revised and Enlarged, with the Lecture on Force Delivered before the British Association. 12mo. $2.50.

Heat. With Numerous Illustrations. 12mo. $2.00.

Light. An Elementary Treatise. With Illustrations. 12mo. $2.00.

Properties of Matter. Second Edition, Enlarged. 12mo. $2.25.

TAYLOR: Sound and Music. An Elementary Treatise on the Physical Constitution of Musical Sounds and Harmony. By SEDLEY TAYLOR, M.A. Illustrated. Second Edition. 12mo. $2.50.

THOMSON. Works of J. J. THOMSON, Professor of Experimental Physics in the University of Cambridge.

A Treatise on the Motion of Vortex Rings. An Essay. With Diagrams. 8vo. $1.75.

Application of Dynamics to Physics and Chemistry. 12mo. $1.90.

THOMSON. Works of Sir W. THOMSON, F.R.S. Professor of Natural Philosophy in the University of Glasgow.

Mathematical and Physical Papers.

VOL. I. 8vo. $5.00. VOL. II. 8vo. $4.50. VOL. III. 8vo. $5.50.

Popular Lectures and Addresses on Various Subjects in Physical Science.

VOL. I. **Constitution of Matter.** 12mo. $2.00.

VOL. II. **Geology and General Physics.** 12mo. $2.00.

VOL. III. **Navigational Affairs.** With Illustrations. 12mo. $2.00.

On Elasticity. 4to. $1.25.

On Heat. 4to. $1.25.

TODHUNTER: A History of the Theory of Elasticity. By ISAAC TODHUNTER. Edited by Professor KARL PEARSON.

VOL. I. Galilei to Saint-Venant, 1639–1850. 8vo. $6.00.

VOL. II. Saint-Venant to Lord Kelvin (Sir William Thomson). In Two Parts. $7.50.

TURNER: A Collection of Examples on Heat and Electricity. By H. H. TURNER, B.A. 12mo. 75 cents.

WALKER: The Theory and Use of a Physical Balance. By JAMES WALKER, M.A. With Illustrations in Collotype and Photolithography. 8vo. 90 cents.

WATSON and **BURBURY.** Works by H. W. WATSON, D.SC., and S. H. BURBURY, M.A.

A Treatise on the Application of Generalized Co-ordinates to the Kinetics of a Material System. 8vo. $1.50.

WOOD: Light. By Sir H. TRUMAN WOOD. 16mo. 60 cents.

WOOLCOMBE: Practical Work in Heat. For Use in Schools and Colleges. By W. G. WOOLCOMBE, M.A., B.SC., Senior Science Master in King Edward's High School, Birmingham. Crown 8vo. pp. 61. $1.00.

WRIGHT: Light. A Course of Experimental Optics, Chiefly with the Lantern. By LEWIS WRIGHT. With nearly 200 Illustrations. 12mo. $2.50.

ELECTRICITY AND MAGNETISM.

ALLSOP (F. C.): **Practical Electric Light Fitting.** 200 Illustrations. $1.50.

BENNETT: The Telephoning of Great Cities. Paper. 35 cents.

BLAKESLEY: Alternating Currents of Electricity. Third Edition, Enlarged. (*In the Press.*)

BONNEY (G. E.): **Induction Coils.** $1.00.

Electrical Experiments. A Manual of Instructive Amusement. With 144 Illustrations. 12mo. 75 cents.

BOTTONE (S. R.): **Electricity and Magnetism.** With 103 Illustrations. 16mo. 90 cents.

How to Manage the Dynamo. A Handbook for Ship Engineers, Electric Light Engineers, etc. 16mo. 60 cents.

A Guide to Electric Lighting. By S. R. BOTTONE, author of "Electric Bells, and All About them," "Electromotors: How Made, and How Used," etc. With Many Illustrations. 75 cents.

CAVENDISH: The Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish, F.R.S. Written between 1771 and 1781. Edited from the original manuscripts of the late J. CLERK MAXWELL, F.R.S. 8vo. $5.00.

CUMMING: An Introduction to the Theory of Electricity. By LINN CUMMING, M.A. With Illustrations. 12mo. $2.25.

DAY: Electric Light Arithmetic. By R. E. DAY, M.A. 18mo. 40 cents.

EMTAGE: An Introduction to the Mathematical Theory of Electricity and Magnetism. By W. T. A. EMTAGE, M.A., of Pembroke College, Oxford. 12mo. $1.90.

GRAY: The Theory and Practice of Absolute Measurements in Electricity and Magnetism. By ANDREW GRAY, M.A., F.R.S.E. In two volumes. Vol. I., 12mo. $3.25. Vol. II. (in two parts). $6.25.

Absolute Measurements in Electricity and Magnetism for Beginners. By ANDREW GRAY, M.A., F.R.S.E. Students' Edition, Abridged from the larger work. 16mo. $1.25.

GUILLEMIN: Electricity and Magnetism. A Popular Treatise. By AM. GUILLEMIN, author of "The Forces of Nature," "The Applications of Physical Forces," etc. Translated and edited, with Additions and Notes, by Professor SILVANUS P. THOMPSON, author of "Elementary Lessons in Electricity and Magnetism," etc. With 600 Illustrations. Super royal 8vo. $8.00.

HAWKINS and **WALLIS: The Dynamo.** Its Theory, Design, and Manufacture. By C. C. HAWKINS and F. WALLIS. With 190 Illustrations. $3.00.

HEAVISIDE (Oliver): **Electrical Papers.** For Advanced Students in Electricity. 2 vols. 8vo. $10.00.

HERTZ (H.): **Researches in the Propagation of Electrical Forces.** Authorized Translation by D. E. JONES, B.SC. Illustrated. 8vo. $3.00.

JACKSON (D. C.): **A Text-Book on Electro-Magnetism** and the Construction of Dynamos. By DUGALD C. JACKSON, B.S., C.E., Professor of Electrical Engineering, University of Wisconsin. 12mo. $2.25.

LODGE (Oliver J.): **Modern Views of Electricity.** By OLIVER J. LODGE, LL.D., D.SC., F.R.S. Illustrated. $2.00.

Lightning Conductors and Lightning Guards. With Numerous Illustrations. $4.00.

MAXWELL: An Elementary Treatise on Electricity. By JAMES CLERK MAXWELL, M.A. Edited by WILLIAM GARNETT, M.A. Second Edition. 8vo. $1.90.

A Treatise on Electricity and Magnetism. By JAMES CLERK MAXWELL, M.A. 2 vols. 8vo. Second Edition. $8.00.

Supplementary volume, by J. J. THOMSON, M.A. $4.50.

MAYCOCK: A First Book of Electricity and Magnetism. For the Use of Elementary Science and Art and Engineering Students and General Readers. By W. PERREN MAYCOCK, M.I.E.E. With 84 Illustrations. Crown 8vo. 60 cents.

Electric Lighting and Power Distribution. Illustrated. Complete in three parts. 16mo. Paper. 75 cents each.

MURDOCK: Notes on Electricity and Magnetism. Designed as a companion to Silvanus P. Thompson's "Elementary Lessons in Electricity and Magnetism." BY J. B. MURDOCK, Lieut. U.S.N. 18mo. New Edition. 60 cents.

POOLE: The Practical Telephone Handbook. By JOSEPH POOLE. With 227 Illustrations. Small crown 8vo. $1.00.

PREECE and **STUBBS: A Manual of Telephony.** By WM. HENRY PREECE and ARTHUR J. STUBBS. $4.50.

RUSSELL: Electric Light Cables and the Distribution of Electricity. By STUART A. RUSSELL, A.M., I.C.E. With over 100 Illustrations. 12mo. $2.25.

STEWART and **GEE: Practical Physics for Schools and Junior Students of Colleges.** By BALFOUR STEWART, M.A., LL.D., F.R.S., and W. W. HALDANE GEE, B.SC.

VOL. I. Electricity and Magnetism. 16mo. 60 cents.

Lessons in Elementary Practical Physics. By BALFOUR STEWART, M.A., LL.D., F.R.S., and W. W. HALDANE GEE, B.SC.

VOL. II. Electricity and Magnetism. 12mo. $2.25.

THOMSON: Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism. Intended as a Sequel to Professor CLERK MAXWELL'S "Treatise on Electricity and Magnetism." By J. J. THOMSON. 8vo. $4.50.

THOMSON: Reprints of Papers of Electrostatics and Magnetism. By Sir WILLIAM THOMSON, D.C.L., LL.D., F.R.S., F.R.S.E. 8vo. $5.00.

THOMPSON: Elementary Lessons in Electricity and Magnetism. By SILVANUS P. THOMPSON, D.SC., B.A., F.R.A.S. New Edition. With Illustrations. 16mo. $1.25.

Notes to the same, by J. B. MURDOCK. 60 cents.

WALKER: How to Light a Colliery by Electricity. 4to. Limp. 75 cents.

Town Lighting by Electricity. (*In the Press.*)

WATSON and **BURBURY: The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.** By H. W. WATSON, D.SC., F.R.S., and S. H. BURBURY, M.A.

VOL. I. Electrostatics. 8vo. $2.75.

II. Magnetism and Electrodynamics. 8vo. $2.60.

HISTORICAL.

BALL: Works by WALTER W. ROUSE BALL.

A Short Account of the History of Mathematics. 12mo. $2.60.

History of the Study of Mathematics at Cambridge. 12mo. $1.90.

BARROW: Mathematical Works. Edited by W. WHEWELL. $2.25.

CAYLEY (Arthur): **The Collected Mathematical Papers of.** To be completed in ten volumes. Vols. I.–VI. published. $5.50 each.

GOW: A Short History of Greek Mathematics. By J. GOW. 8vo. $3.00.

HEATH: Diophantos of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. By T. L. HEATH, B.A. 8vo. $2.25.

KLEIN: Lectures on Mathematics. *The Evanston Colloquium.* Reported by ALEXANDER ZIWET. $1.50.

SMITH (Henry J. S.): **Mathematical Papers.** With Portrait and Memoir. 2 vols. (*In the Press.*)

WOOLWICH: Mathematical Papers. Edited by E. J. BROOKSMITH, B.A. $1.75.

A SHORT ACCOUNT

OF

THE HISTORY OF MATHEMATICS.

BY WALTER W. ROUSE BALL,

FELLOW AND TUTOR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

Second Edition, Revised. $3.25.

"While technical and exact enough to be of value to the specialist in mathematics as a handy book of reference, it is so clearly and familiarly written, that it is the best work on this subject for the general reader that we know of.... From this history, or historical sketch, the intelligent reader can gain a very complete view of the progress of mathematical science from its beginnings

until its contemporary differentiation into numerous specialties,—each of them important and difficult enough to detain for a lifetime a brilliant mind,—all of which are fruitful in their applications to the various phases of modern science and modern industry."—*Science*.

A HISTORY

OF

THE STUDY OF MATHEMATICS AT CAMBRIDGE.

BY WALTER W. ROUSE BALL,

12mo. $1.90.

A SHORT HISTORY

OF

GREEK MATHEMATICS.

BY JAMES GOW,

8vo. $3.00.

"...Evidently the production of a scholar, and the result of years of laborious research. Mr. Gow divides his history into three parts. The first treats of the decimal scale and Egyptian arithmetic; the second and third parts are concerned with Greek arithmetic and geometry.... The largest part of Mr. Gow's history, and that which will probably be the most interesting to the general mathematical reader, is justly devoted to geometry; for it is in this department of mathematics that the acuteness of the Greek mind is most conspicuously seen, and that the continuity of mathematical discovery can be more fully traced.... The interesting character of the notes is quite a feature of the book, which is in this respect distinguished from almost all histories of mathematics.... It must be to all students of mathematics a most welcome and instructive volume."—J. S. MACKAY, in *The Academy*.

DIOPHANTOS OF ALEXANDRIA:

A STUDY IN THE HISTORY OF

GREEK ALGEBRA.

BY T. S. HEATH, B.A.,

SCHOLAR OF TRINITY COLLEGE, CAMBRIDGE.

8vo. $2.00.

THE MACMILLAN COMPANY,
66 FIFTH AVENUE, NEW YORK.